Miscelánea Matemática **58** (2014) 31-47 SMM

La constante de Cheeger

Joel García-León

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
jgarcia@unam.mx

Resumen

En este trabajo hacemos un recuento de la *desigualdad isoperimétrica* y definimos la constante de Cheeger. A partir de esta definición, introducimos el concepto *función de Cheeger*. De aquí se infiere, con qué condiciones impuestas a la función de Cheeger, una variedad satisface la llamada *propiedad isoperimétrica* y como una aplicación probamos que las superficies mínimas satisfacen dicha propiedad.

1. Antecedentes

Responder a la pregunta: *¿qué es la constante de Cheeger*?, puede ser muy simple y al mismo tiempo muy complicado, el tema es así, tiene la delicia de lo simple y el sabor de lo complicado. La constante de Cheeger esta fuertemente relacionada con el *problema isoperimétrico* y este se deriva del siguiente problema geométrico: de todas las figuras planas con el mismo perímetro, ¿Cuál es la de mayor área?

La respuesta se sabe desde la época de los griegos: es el círculo. Recíprocamente si tomamos todas las figuras planas con la misma área, la que tiene el menor perímetro es nuevamente el círculo. Este problema llevó a buscar una relación directa entre el área y el perímetro de figuras planas, encontrándose que dicha relación está dada por la desigualdad:

$$L^2 \geq 4\,\pi\,A, \tag{1}$$

la cual es satisfecha por cualquier figura plana donde tiene sentido hablar tanto de su área, denotada por A, como de su perímetro, denotado por L.

La desigualdad (1) la llamaremos *desigualdad isoperimétrica clásica.* Nótese que para el círculo la igualdad se cumple, mientras que para cualquier otra figura geométrica se obtiene la desigualdad estricta.

El problema isoperimétrico es un problema antiguo y en sí mismo interesante. Actualmente se han encontrado novedosas aplicaciones relacionadas con temas aparentemente desligados, en su origen, de este. Por ejemplo: Grigory'an encontró que la ecuación de calor: $\triangle = \frac{\partial}{\partial t}$ tiene solución vía el núcleo de calor, siempre y cuando la variedad M —sobre la cual estudiamos esta ecuación— cumpla una «propiedad isoperimétrica» que explicaremos más adelante (ver [8], [9], [10] y [12]). Este resultado, naturalmente, conecta directamente un problema físico con uno geométrico.

Como una última observación de este apartado diremos que tomando variedades discretas, se han encontrado aplicaciones a la estadística, es decir, en el campo de lo aplicado también tiene su propio interés explorar esta desigualdad. En resumen, motivaciones para estudiar el problema isoperimétrico sobran.

2. La desigualdad isoperimétrica

En esta sección estudiaremos la desigualdad isoperimétrica clásica, debido a que nuestro principal objetivo —la constante de Cheeger— es un desprendimiento natural de esta última. La pregunta ¿cómo generalizar la desigualdad isoperimétrica? es interesante por sí misma, sin embargo, aún no se tienen más que respuestas parciales y el campo está completamente abierto.

Empezamos aclarando cuál es nuestro objeto de estudio. Denotaremos por S una superficie suave en el sentido dado por DoCarmo [5]. Supondremos que S tiene área definida y la denotamos por $A\,(S)$. También asumiremos que si $\Omega \subset S$ es un subconjunto abierto, precompacto con frontera suave, entonces tanto Ω como su frontera $\partial\,\Omega$ tienen área y longitud bien definidas denotadas por $A\,(\Omega)$ y $L\,(\partial\,\Omega)$. En adelante supondremos, a menos que se indique lo contrario, que Ω es un conjunto *no vacío.*

Definición 2.1. Sea S una superficie suave. Decimos que la superficie S tiene la *propiedad isoperimétrica* si y solo si, para cualquier Ω subconjunto abierto, precompacto con frontera suave $\partial\,\Omega$, se satisface la desigualdad isoperimétrica:

$$L\,(\partial\,\Omega) \,\geq\, C\,A\,(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}\,, \tag{2}$$

donde C es una constante no negativa y n un número natural fijo.

Observación 2.1. El ejemplo más sencillo de superficie que posee la propiedad isoperimétrica es $\mathbb{R}^2$, Chavel [4] demuestra este hecho, para ello solo se requiere aplicar el *teorema de la divergencia* visto en los cursos de cálculo vectorial. Nótese además que en la desigualdad (2), $n = 2$ y $C = 2\sqrt{\pi}$.

Observación 2.2. La definición 2.1 es mucho más general de la usada aquí, ya que se puede considerar M como una variedad diferenciable en lugar de una superficie S. En la mayoría de la literatura n es considerado como la dimensión de M, para este caso $n = 2$. En este trabajo no la consideraremos como tal, para nosotros solamente será un número natural fijo, a menos que se indique lo contrario.

El siguiente ejemplo nos ayuda a entender la observación 2.2.

Ejemplo 2.1. Tomemos $S = I \times I$, donde I es el intervalo unitario $(0, 1)$. De antemano, sabemos que si Ω es un subconjunto precompacto con frontera suave, entonces tenemos:

$$L(\partial\Omega) \geq 2\sqrt{\pi} A(\Omega)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Ahora bien, tenemos $A(\Omega) \leq A(S) \leq 1$, por tanto si $n \geq 2$ obtenemos la desigualdad:

$$A(\Omega)^{\frac{1}{2}} \geq A(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

Combinando las ecuaciones (3) y (4), tenemos que S satisface la propiedad isoperimétrica (2) con $C = 2\sqrt{\pi}$ y $n \geq 2$ un número natural fijo.

No toda superficie cumple la propiedad isoperimétrica establecida por la definición (2.1), el siguiente ejemplo es una muestra de ello:

Ejemplo 2.2. Sea S el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, y sea $\Omega = S^1 \times (0, h)$, donde h es cualquier número positivo, ver la figura 1. En este caso, la frontera $\partial\Omega$ son dos copias de S^1 y por tanto $L(\partial\Omega)$ es constante, mientras que $A(\Omega)$ crece o decrece según el valor de $h > 0$. De esta manera no podemos encontrar una constante $C > 0$ ni un número n natural fijo tal que satisfaga la desigualdad (2), pues el área de Ω se puede hacer tan grande como queramos. Lo anterior muestra que S no satisface la definición (2.1).

3. Constantes isoperimétricas

En esta sección asumimos que S tiene la propiedad isoperimétrica. Ahora tratamos de buscar cual es la constante óptima $C > 0$. Si $C > 0$

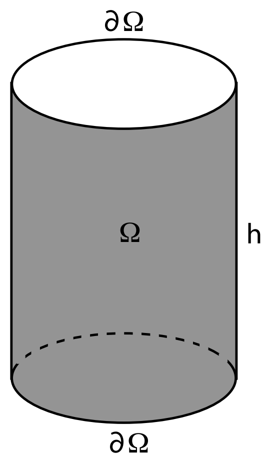

Figura 1. Cilindro.

es una constante obtenida de la desigualdad (2), entonces cualquier Ω abierto, precompacto de frontera suave satisface:

$$\frac{L\,(\partial\,\Omega)}{A\,(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \geq C. \tag{5}$$

Denotemos ahora por Γ el conjunto de todos los subconjuntos abiertos y precompactos de frontera suave, entonces de la desigualdad (5) obtenemos:

$$\frac{L\,(\partial\,\Omega)}{A\,(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \inf_{\Omega\in\Gamma} \frac{L\,(\partial\,\Omega)}{A\,(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \geq C, \tag{6}$$

para cualquier $\Omega \in \Gamma$. El número intermedio en (6) lo denotamos por $I_n(S)$ o simplemente por I_n y lo llamaremos *constante isoperimétrica*, esto es:

$$I_n := \inf_{\Omega\in\Gamma} \frac{L\,(\partial\,\Omega)}{A\,(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}}. \tag{7}$$

Observación 3.1. Nótese que S tiene la propiedad isoperimétrica, si y solo si S tiene constante isoperimétrica. No esta por demás decir que I_n tiene interés cuando $n \geq 2$, pues para $n = 1$ no tiene sentido.

Observación 3.2. Las constantes I_n forman una sucesión I_2, I_3, $\ldots$; la pregunta natural es: ¿converge esta sucesión?.

4. La constante de Cheeger

La constante de Cheeger de la superficie S, denotada por $h(S)$, se define como *el «límite» de la sucesión de constantes isoperimétricas*, esto es:

$$h(S) := \inf_{\Omega \in \Gamma} \frac{L(\partial \Omega)}{A(\Omega)}. \tag{8}$$

Para calcular y entender mejor la constante de Cheeger, necesitamos construir ejemplos ilustrativos, empezaremos así con el más simple:

Ejemplo 4.1. Una primera inspección de la ecuación (8) nos hace pensar que la constante de Cheeger de $\mathbb{R}^2$ debe ser cero. Para argumentarlo hagamos lo siguiente: tomamos bolas abiertas B_r con centro en el origen y radio $r > 0$, entonces:

$$\frac{L(\partial B_r)}{A(B_r)} = \frac{2}{r} \geq h\left(\mathbb{R}^2\right). \tag{9}$$

Como el radio r es arbitrario, al tomar $r \to \infty$ concluimos que la constante de Cheeger del plano es cero, en otras palabras:

$$h\left(\mathbb{R}^2\right) = 0. \tag{10}$$

Observación 4.1. Nótese que el hecho de tomar el origen como centro de la bola en el ejemplo 4.1 es irrelevante, en realidad al tomar cualquier $p \in \mathbb{R}^2$ y $B_r(p)$ no cambia nuestro argumento.

Ejemplo 4.2. Supongamos que S es una superficie compacta, entonces

$$h(S) = 0. \tag{11}$$

El argumento es el siguiente: sea $p \in S$ y $\varepsilon > 0$, tenemos:

$$\inf_{\varepsilon > 0} \frac{L(\partial B_\varepsilon(p))}{A(S \setminus B_\varepsilon(p))} \geq h(S), \tag{12}$$

donde $B_\varepsilon(p)$ es una bola de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de $p \in S$. Como el radio es tan pequeño como queramos, entonces la longitud de la frontera es también muy pequeña, es decir el cociente:

$$\frac{L(\partial B_\varepsilon(p))}{A(S \setminus B_\varepsilon(p))} \to 0, \tag{13}$$

por tanto el ínfimo en (12) es cero, en otras palabras, la constante de Cheeger de la superficie S es cero.

El siguiente ejemplo muestra que la constante de Cheeger no siempre es cero, en este caso es estrictamente positiva:

Ejemplo 4.3. Recordemos que la superficie $\mathbb{H}^2$ es el conjunto de coordenadas $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ donde $y > 0$. En este ejemplo tomamos como métrica la distancia hiperbólica (ver Chavel [4]). Para calcular la constante de Cheeger, suponemos

$$h\left(\mathbb{H}^2\right) \,=\, \lim_{r\to\infty} \frac{L\left(\partial B_r\right)}{A\left(B_r\right)},$$

donde B_r son bolas geodésicas, de este modo tenemos (ver Anderson [1], Chavel [4], García-León [6] y Grogory'an [11]):

$$h\left(\mathbb{H}^2\right) \,=\, \lim_{r\to\infty} \frac{L\left(\partial B_r\right)}{A\left(B_r\right)} \,=\, \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{senh} r}{\int_0^r \operatorname{senh} s\, d\, s}, \tag{14}$$

así, aplicando la regla de L'Hôpital al límite del lado derecho en (14), tenemos:

$$h\left(\mathbb{H}^2\right) \,=\, 1. \tag{15}$$

Observación 4.2. En los ejemplos 4.1, 4.2 y 4.3 usamos la propiedades métricas de las superficies, de este modo estudiar las superficies y sus métricas tiene importancia al estudiar la constante de Cheeger.

5. La desigualdad de Cheeger

Recordemos que el operador laplaciano $\triangle$ en $\mathbb{R}^n$ está definido por

$$\triangle \,:=\, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Existe una definición general del operador laplaciano $\triangle$ y se puede consultar en Chavel [3], [4], García-León [6] y Rosenberg [17].

El problema de Dirichlet con valores propios reales, se plantea en general de la siguiente manera: Sea Ω un subconjunto abierto, precompacto con frontera suave no vacía. Se trata de encontrar λ número real que satisfaga el problema con valor en la frontera:

$$\begin{cases} \triangle\, u \,-\, \lambda\, u &=\; 0, \text{ en } \Omega \\ \\ u|_{\partial\Omega} &=\; 0 \end{cases} \tag{16}$$

cuando $u \neq 0$. Naturalmente $\triangle$ es un operador lineal sobre el espacio de las funciones continuas con dominio $\overline{\Omega}$ y con segundas derivadas continuas en Ω. Si el número λ es solución de (16), este se conoce como valor propio del operador de Laplace $\triangle$. Rosenberg (ver [17]) demuestra que los valores propios son en realidad, sucesión de números reales $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$0 \,\le\, \lambda_1 \,\le\, \lambda_2 \,\le\, \ldots\,, \tag{17}$$

donde cada valor propio se repite de acuerdo a su multiplicidad.

El estimar los valores propios del operador de Laplace tiene importancia en distintas rama de la matemática, la constante de Cheeger nos proporciona una cota inferior para dichos valores propios, el resultado es la llamada *desigualdad de Cheeger*.

Teorema 5.1 (Desigualdad de Cheeger)**.** *Sea S una superficie regular y sea Ω un subconjunto abierto de S. Sea $\lambda_1(\Omega)$ el primer valor propio que satisface (16) y sea $h(\Omega)$ la constante de Cheeger, entonces*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{1}{4} h^2(\Omega). \tag{18}$$

Observación 5.1. El teorema 5.1 está formulado para superficies, que es el contexto de este arículo, sin embargo es un resultado general (se puede consultar en Chavel [3] y García-León [6]).

6. La constante de Cheeger en esferas

La esfera $\mathbb{S}_R^2$ es un caso especial pues no existe una única *desigualdad isoperimétrica* propiamente dicha sobre esta superficie, en esta sección explicaremos a que nos referimos con ello. Antes calculamos $h(\mathbb{S}_R^2)$ del siguiente modo:

Tomemos una esfera de radio $R > 0$ y consideremos dos planos paralelos a una distancia h entre ellos, con la condición $0 < h \leq 2R$, a su vez exigimos que éstos intersecten a la esfera, la región que obtenemos es una región semiesférica. De acuerdo a Osserman [16] el área A de esta porción de esfera es proporcional a la altura h, la proporcionalidad implica que podemos hallar una $c > 0$ constante de tal manera que $A = ch$. Para encontrar el valor de c es suficiente tomar ambos planos tangentes a la esfera y obtenemos el área total de superficie, es decir $A = 4\pi R^2 = c2R$, de este modo obtenemos $c = 2\pi R$ y por tanto:

$$A = 2\pi Rh. \tag{19}$$

Observación 6.1. En esta parte mantendremos fijo uno de los planos y asumiremos que es tangente a la esfera en el punto p, mientras que el otro plano es paralelo al anterior y no es tangente (ver figura 2).

De este modo la intersección entre el segundo plano y la esfera es una circunferencia de radio $r' > 0$. Ahora, la relación entre r' y h está dada por la ecuación (ver figura 2):

$$r' = \sqrt{h\,(2\,R - h)}. \tag{20}$$

De la ecuación (20) obtenemos inmediatamente:

$$L = 2\,\pi\,\sqrt{h\,(2\,R - h)}. \tag{21}$$

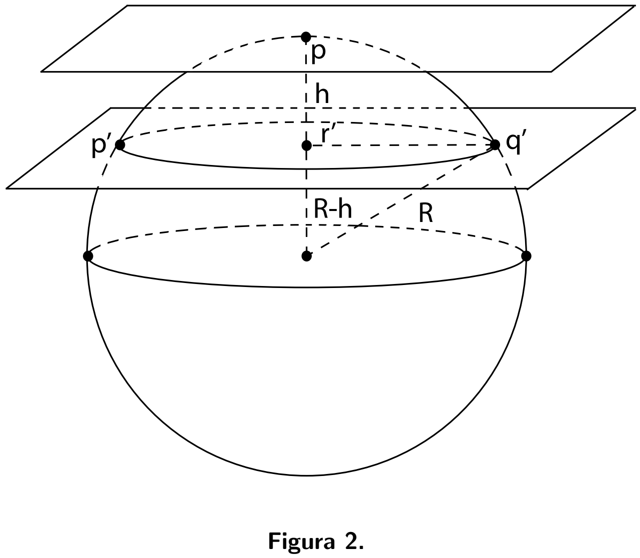

Figura 2.

De aquí podemos obtener la constante de Cheeger como sigue:

$$\frac{L}{A} \geq h\left(\mathbb{S}^2_R\right). \tag{22}$$

Sustituyendo los valores de L y A de acuerdo con las ecuaciones (19) y (20) de arriba obtenemos:

$$\frac{L}{A} = \left(\frac{2}{Rh} - \frac{1}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Tomando ahora el límite cuando $h \to 2R$, y usando (22) y (23) concluimos:

$$h\left(\mathbb{S}^2_R\right) = 0. \tag{24}$$

Observación 6.2. Es necesario aclarar que la cantidad r' no representa la distancia o métrica geodésica denotada por $r > 0$, sin embargo, es claro de la figura 2 que ambas dependen entre sí de la siguiente manera:

$$\tan r = \frac{r'}{R - h}.$$

Observación 6.3. Nótese que este resultado es compatible con el ejemplo 4.2, el cual de antemano nos dice que la constante de Cheeger en $\mathbb{S}^2_R$ es cero.

7. Desigualdades isoperimétricas en $\mathbb{S}^2_R$

Recordemos que el conjunto Ω lo tomamos como una *bola geodésica*, denotada por $B_r(p) = \Omega$, donde el punto p es el centro y $r > 0$ representa la longitud del arco que une p con cualquier otro punto de la esfera. A $B_r(p)$ la llamaremos simplemente *bola* cuando no se preste a confusión.

Entonces claramente toda bola satisface la ecuación (21) y por tanto tenemos:

$$\begin{aligned} L^2 &= 4\,\pi^2\,(h(2R\,-\,h)) \\ &= 4\,\pi^2\,2hR\,-\,4\,\pi^2 h^2 \\ &= 4\,\pi A - \frac{A^2}{R^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

En otras palabras: en toda bola se satisface la igualdad (25), mientras que cualquier otro conjunto convexo satisface la desigualdad estricta, esto es, la esfera cumple una «desigualdad isoperimétrica» de la forma:

$$L^2 \,\geq\, 4\,\pi A \,-\, \frac{A^2}{R^2}. \tag{26}$$

F. Bernstein en su artículo de 1905 [2] demuestra un resultado que generaliza la desigualdad (26), si tomamos un conjunto convexo y $g(R,\,d)$ es definida como:

$$g(R,\,d) \,=\, \operatorname{sen}\left[\frac{d}{4\,R\,(1\,+\,2\,\pi)}\right], \tag{27}$$

donde d es la mínima distancia del anillo esférico que contiene al conjunto dado y R el radio de la esfera, entonces

$$L^2 \,-\, 4\,\pi\,A \,+\, \frac{A^2}{R^2} \,\geq\, (2\,R\,g(R,\,d))^2\,\left(2\,\pi\,+\,g(R,\,d)^2\right). \tag{28}$$

Naturalmente, si el conjunto es una bola sabemos que $d\,=\,0$, entonces en (28) tenemos la igualdad (26).

Observación 7.1. Finalmente, nótese que tomando $R\,\to\,\infty$ en (26) y (28) obtenemos la desigualdad isoperimétrica clásica, esto significa que mientras mayor sea el radio R tendremos una aproximación a la desigualdad establecida por la ecuación (1).

8. Curvatura y desigualdad isoperimétrica

Una pregunta natural surge a partir del ejemplo del cilindro: ¿qué clase de superficies tienen la propiedad isoperimétrica dada por la definición 2.1?, es decir, que la desigualdad del tipo (2) sea satisfecha por cualquier subconjunto abierto y conexo con frontera suave. Como primera aproximación tomaremos el caso cuando $n\,=\,2$. En [2] encontramos la primera respuesta parcial (ver artículo de R. Osserman [16]):

Teorema 8.1. *Si S tiene la propiedad isoperimétrica clásica, entonces esta tiene curvatura gaussiana no positiva.*

La demostración se basa en el siguiente hecho: *Si en s la desigualdad isoperimétrica (1) se satisface para subconjuntos simplemente conexos, entonces su curvatura gaussiana no es positiva.*

Por supuesto que el inverso del teorema 8.1 no es válido, el cilindro sirve como contra-ejemplo. El problema es en este caso que la desigualdad no es cierta para todos los subconjuntos conexos, de hecho en el cilindro se cumple la desigualdad (1) solamente sobre conjuntos simplemente conexos, Osserman [16] da cuenta de ello (ver teorema 4.1 [Bechenbach & Radó], página 1202), es decir, basta con checar que el signo de la curvatura de S no es positivo para estar seguros que en esta superficie se satisface la desigualdad isoperimétrica clásica sobre conjuntos simplemente conexos.

Por supuesto que esta forma nos limita solamente al estudio de los conjuntos simplemente conexos que tiene su interés desde el punto de vista de la topología y el álgebra, sin embargo por el momento, es el aspecto geométrico del problema el que nos interesa.

Como conclusión de esta parte podemos decir lo siguiente: $\mathbb{H}^2$ es una superficie que tiene la propiedad isoperimétrica clásica, mientras que $\mathbb{S}^2$ satisface al menos otra «desigualdad isoperimétrica» diferente.

Ambas desigualdades, afortunadamente están relacionadas por la siguiente proposición, a esta simplemente nos referiremos como *desigualdad isoperimétrica* (ver Chavel, [4]).

Proposición 8.1. *Sea S una superficie que tiene curvatura gaussiana κ, constante y distinta de cero. Entonces cualquier subconjunto abierto, precompacto, conexo y con frontera suave satisface la desigualdad isoperimétrica:*

$$L^2 \geq 4\pi A - \kappa A^2. \tag{29}$$

Notamos lo siguiente: Si $\kappa > 0$, entonces la desigualdad (29) es en realidad la desigualdad dada en (26) sección 7. Por otro lado si $\kappa < 0$, entonces de (29) se deduce inmediatamente la desigualdad isoperimétrica clásica.

Respecto a la pregunta de si la esfera satisface la propiedad isoperimétrica clásica, esta tiene respuesta positiva, sin embargo su demostración debe de esperar hasta la sección 11, por lo pronto plantearemos el material necesario para ello en las siguientes dos secciones.

9. Desigualdad isoperimétrica modificada

El caso del cilindro merece también tratarse por separado (ver ejemplo 2.2); sabemos de antemano que esta superficie no satisface la definición 2.1. Tomando como Ω el mismo conjunto que en el ejemplo mencionado, tenemos que $L = 4\pi$ y $A = 2\pi h$, donde h es la distancia entre las dos circunferencias paralelas, lo que permite el crecimiento desmesurado del conjunto Ω por lo cual no se cumple la desigualdad (2). En [6] se demuestra el siguiente resultado: Si Ω es un subconjunto abierto del cilindro tal que $A(\Omega) \leq 1$, entonces satisface la desigualdad (2).

La demostración se limita al caso $n = 2$, puesto que para $n \geq 2$ se obtiene directamente de la hipótesis. Resumimos la discusión hasta ahora dada en la siguiente:

Definición 9.1. Sean $A_{\text{máx}}$ un número real extendido (esto es; $A_{\text{máx}}$ puede ser finito o no) y S una superficie. S tiene la propiedad isoperimétrica modificada, si y solo si cualquier subconjunto Ω de S abierto, precompacto de frontera suave, tal que $A(\Omega) \leq A_{\text{máx}}$, satisface la desigualdad isoperimétrica:

$$L(\partial\Omega) \geq C\, A(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}, \tag{30}$$

donde C es una constante positiva y n es un número natural fijo.

Es claro entonces que el cilindro (ver ejemplo 2.2) satisface la desigualdad isoperimétrica modificada, en los ejemplos que hasta ahora hemos manejado como el plano euclidiano y el plano hiperbólico también satisfacen esta propiedad, donde $A_{\text{máx}} = \infty$, $n = 2$ y $C = 2\sqrt{\pi}$.

10. La función de Cheeger

Originalmente obtuvimos la constante de Cheeger suponiendo que la superficie S satisface la desigualdad isoperimétrica, en esta parte nos proponemos dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué condiciones debe cumplir la constante de Cheeger para que la superficie S satisfaga la definición 9.1?

La constante de Cheeger también se puede definir sobre conjuntos abiertos y precompactos de la siguiente manera. Sea Ω un conjunto abierto y precompacto y sea Γ_Ω la familia de conjuntos definida del siguiente modo: $B \in \Gamma_\Omega$ si y solo si B es subconjunto abierto de Ω. La constante de Cheeger de Ω está dada por:

$$h(\Omega) := \inf_{B \in \Gamma_\Omega} \frac{L(\partial B)}{A(B)}. \tag{31}$$

Basados en la ecuación (31) definimos la *función de Cheeger* como sigue:

Definición 10.1. Sea S una superficie suave, y sea $p \in S$. La función de Cheeger, $h(r)$, está dada por:

$$h(r) = h_p(r) := h(B_r(p)). \tag{32}$$

Aquí $B_r(p)$ es la bola de radio $r > 0$ con centro en p.

Observación 10.1. Claramente la función de Cheeger es una función decreciente no negativa y el que esté bien definida depende de dos cosas:

- La métrica de S.
- El punto p: En los superficies de curvatura constante, dicha dependencia se desvanece debido a la existencia de isometrías, en otras palabras, si $p \neq q$ son puntos sobre una superficie de curvatura constante, entonces $h_p(r) = h_q(r)$. Sin embargo, el caso general no sigue el mismo patrón, es decir, no se puede afirmar $h_p(r) = h_q(r)$, cuando $p \neq q$ para cualquier superficie (ver por ejemplo [4]).

Por la observación 10.1 concluimos los siguiente: Si la métrica definida es la distancia geodésica, entonces tal vez no lleguemos muy lejos y estamos limitados a una distancia «máxima» denotada como $r_{\text{máx}}$. Los ejemplos más simples de esta afirmación son los siguientes:

- Si $S = \mathbb{S}^2$, entonces $r_{\text{máx}} = \pi < \infty$, además:
$$\lim_{r \to r_{\text{máx}}} h(r) = 0.$$
- Si $S = \mathbb{R}^2$, entonces $h(r) = \frac{2}{r} > 0$ para cualquier $r > 0$ y de este modo tenemos que $r_{\text{máx}} = \infty$.

La pregunta original se transforma ahora en la siguiente: ¿bajo que condiciones sobre la función de Cheeger garantizamos la desigualdad isoperimétrica?, la primera respuesta parcial la obtenemos del siguiente teorema:

Teorema 10.1. *Sea S una superficie y supongamos que la función de Cheeger satisface:*
$$h(r) = \frac{n}{r} - h_0(r), \tag{33}$$
donde $h_0(r)$ es una función continua sobre $(0, r_{\text{máx}})$, tal que
$$J := \int_0^{r_{\text{máx}}} h_0(r)\, d\,r < \infty. \tag{34}$$
Si $A_{\text{máx}}$ un número real extendido, entonces para cualquier conjunto abierto $\Omega \subset S$ con frontera suave y cerradura compacta, tal que $A(\Omega) \leq A_{\text{máx}}$, la siguiente desigualdad se satisface:
$$L(\partial\Omega) \geq C\, A(\Omega)^{1 - \frac{1}{n}}, \tag{35}$$
donde $C > 0$ es una constante.

Antes de dar una síntesis de la demostración, hacemos tres observaciones necesarias:

Observación 10.2. Como mencionamos en el ejemplo 2.1, el número $n \in \mathbb{N}$ no necesariamente es la dimensión de la superficie, en realidad puede ser un número mayor, en el caso que sea $n = 2$, la desigualdad (35) se convierte en la desigualdad isoperimétrica clásica (1), tomando $C = 2\sqrt{\pi}$.

Observación 10.3. Acerca de la constante C en el teorema 10.1, encontramos que esta depende fuertemente del número n, aunque esta dependencia no la hace la «mejor constante». La relación encontrada está dada como sigue:

$$C := 4^{-n} \left(\frac{3}{7}\,\omega_n \right)^{\frac{1}{n}} \exp\left(-\frac{J}{n} \right). \tag{36}$$

Observación 10.4. Encontramos durante la demostración del teorema que los números $r_{\text{máx}}$ y $A_{\text{máx}}$ están estrechamente relacionados por la ecuación:

$$A_{\text{máx}} = \frac{3}{7}\,\omega_n\, r_{\text{máx}}^n \exp\left(-J\right). \tag{37}$$

En las ecuaciones (36) y (37) ω_n es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Demostración del teorema 10.1. La idea de la demostración está basada en las técnicas propuestas en el artículo de Michael y Simon [13]. Sea $\Omega \subset S$ un conjunto abierto con frontera suave y cerradura compacta, tal que $V(\Omega) \leq A_{\text{máx}}$, y sea $\mathcal{C} = \{B_r\}$ una cubierta de bolas abiertas de Ω, tal que $B_r \cap \Omega \neq \emptyset$. Definimos dos funciones $s, m : (0, r_{\text{máx}}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, como sigue:

$$\begin{cases} s(r) & := & L\left(\partial\Omega \cap B_r\right) \\ m(r) & := & A\left(\Omega \cap B_r\right). \end{cases} \tag{38}$$

Ahora definimos las funciones $H(r)$ y $F(r)$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} H(r) & := & \int_a^r h(t)\,dt \\ F(r) & := & \exp\left(-H(r)\right). \end{cases} \tag{39}$$

Gracias al teorema de la función inversa podemos afirmar que las funciones de la ecuación (39) son funciones invertibles y por tanto está bien definido el número:

$$r_0 := H^{-1}\left(\ln\left(\frac{7}{3} V\left(\Omega\right) \omega^{-1} \right) \right), \tag{40}$$

donde $\omega := a^n \omega_n \exp\left(-\int_0^a h_0(r)dr\right)$. De este modo, afirmamos que existe $r \in (0, r_0)$, de tal manera que:

$$s(r) \geq \frac{1}{r_0} m(4r) \frac{F(4r)}{F(r)}, \tag{41}$$

aquí, naturalmente nos referimos a $s(r)$ y $m(r)$ como las funciones dadas por la ecuación (38). Para terminar la demostración se requiere de un teorema de cubiertas cuya demostración es larga (ver [6, p. 65]), por ello solo escribimos su enunciado:

Teorema 10.2. *Sea (M, d) un espacio métrico con base numerable. Supongamos que por cada punto $p \in M$ le asociamos una bola métrica $B_{r_p}(p)$, con $0 \leq r_p \leq r_0$. Entonces existe $N \subset M$ a lo más numerable tal que:*

1. *Si $p, p' \in N$, con $p \neq p'$, entonces $B_{r_p}(p) \cap B_{r_{p'}}(p') = \emptyset$.*
2. *$\mathcal{C} = \{B_{4r}(p) : p \in N\}$ es una cubierta abierta de M.*

Así, tenemos el sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} L(\partial\Omega) &\geq \textstyle\sum_i L(\partial\Omega \cap B_{r_i}) \\ &\geq \textstyle\sum_i \frac{1}{r_0} 4^{-n} A(\Omega \cap B_{4r_i}) \\ &\geq \frac{1}{r_0}\frac{1}{4^n} A(\Omega), \end{aligned} \tag{42}$$

donde $r_1, r_2, \ldots,$ son los radios obtenidos por el teorema 10.2. Para completar la demostración, la desigualdad:

$$r_0 \leq \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \omega_n^{-\frac{1}{n}} \exp\left(\frac{J}{n}\right) A(\Omega)^{\frac{1}{n}}, \tag{43}$$

y solo resta sustituir los valores correspondientes en la ecuación (41).
□

11. Aplicaciones del teorema 10.1

En esta sección aplicaremos el teorema 10.1 a superficies de curvatura promedio acotada, ejemplos 11.1 y 11.2. De dicha aplicación obtenemos de manera natural los siguientes corolarios:

Corolario 11.1. *Toda superficie de curvatura promedio constante tiene la propiedad isoperimétrica.*

Corolario 11.2. *Toda superficie mínima cumple la propiedad isoperimétrica.*

Ejemplo 11.1. El caso más simple es por supuesto el plano euclidiano, donde la función de Cheeger está dada por $h(r) = \frac{2}{r}$ y por tanto satisface las hipótesis del teorema 10.1. Así que el plano tiene la propiedad isoperimétrica, más aún, tenemos: $r_{\text{máx}} = A_{\text{máx}} = \infty$.

Ejemplo 11.2. En este ejemplo consideramos una superficie S generalizada, es decir, la superficie que estudiamos está inmersa en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Sea $p \in S$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una curva regular tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = T$, supongamos además $\|T\| = 1$. La curvatura normal de $\alpha(s)$ en p está dada por:

$$\kappa(N, T) = \frac{d^2\alpha}{ds^2}(0) \cdot N = \alpha''(0) \cdot N, \tag{44}$$

donde $N \in T_p^{\perp}$ es cualquier vector normal.

Las curvaturas principales las tomamos como:

$$\kappa_1(N) = \max_T \kappa(N, T), \quad \kappa_2(N) = \min_T \kappa(N, T), \tag{45}$$

y la curvatura promedio tiene la forma:

$$\frac{1}{2}\left(\kappa_1(N) + \kappa_2(N)\right). \tag{46}$$

De acuerdo a Osserman [14] y [15], existe un vector $H \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$H \cdot N = \frac{1}{2}\left(\kappa_1(N) + \kappa_2(N)\right), \tag{47}$$

para cualquier $N \in T_p^{\perp}$. Dicho vector le llamaremos *vector curvatura promedio* de S en el punto p. La afirmación es la siguiente: Toda superficie con curvatura promedio acotada satisface la propiedad isoperimétrica.

Para demostrarlo usaremos el teorema 10.1 y procedemos de la siguiente manera: Sean $p, q \in S$ y tomamos la distancia extrínseca entre ellos $\rho_p(q)$, es decir la distancia del medio ambiente. Claramente si $r_p(q)$ es la distancia geodésica entre dichos puntos, tenemos $\rho_p(q) \leq r_p(q)$, para cualquier q. Adicionalmente, sabemos que $\|\nabla \rho_p\| \leq 1$, para todos los puntos $p \in S$.

Nuestra hipótesis implica que existe K constante positiva de tal manera que:

$$\sup \|H\| \leq K < \infty, \tag{48}$$

aquí el supremo se toma sobre todos los puntos de la superficie. Tomemos entonces K y $r_{\text{máx}} > 0$ el número: $r_{\text{máx}} := \frac{n}{K}$.

Osserman [15] y Grogory'an [11] demuestran lo siguiente[1]: Si ρ_p es la distancia extrínseca, existen coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en $\mathbb{R}^m$ tal

[1]Una demostración de este hecho también se puede encontrar en [6] y [7].

que:

$$\begin{aligned} \triangle\rho_0^2 &= 2\left(\textstyle\sum_{i=1}^m x_i H_i + \sum_{i=1}^m \|\nabla x_i^2\|\right) \\ &= 2\left(\textstyle\sum_{i=1}^m x_i H_i + n\right). \end{aligned} \tag{49}$$

Aquí, estamos considerando que $p = 0$ y H_i son las coordenadas del vector curvatura. La cantidad $\sum_{i=1}^m \|\nabla x_i^2\| = n$ fue hecha por simple cálculo, donde $\sum_{i=1}^m \nabla x_i^2$ significa el gradiente de la función $(x_i)_{i=1}^m \mapsto \sum_{i=1}^m x_i^2$. Sin pérdida de generalidad, asumiremos $\sum_{i=1}^m x_i H_i > 0$.

Naturalmente, por la desigualdad de Schwarz se obtiene:

$$\sum_{i=1}^m x_i H_i \le \rho_0(x)\|H\|, \tag{50}$$

así tenemos:

$$\begin{aligned} \triangle\rho_0^2 &= 2\left(n + \textstyle\sum_{i=1}^m x_i H_i\right) \\ &\ge 2\left(n - \textstyle\sum_{i=1}^m x_i H_i\right). \end{aligned} \tag{51}$$

Sabemos de antemano $\|H\| \le K$ por hipótesis, entonces es fácil concluir:

$$\triangle\rho_0^2 \ge 2\left(n - K\rho_0\right). \tag{52}$$

Sean $\varphi(r) = n - Kr$ y $h_0(r) = K$, con $0 < r < r_{max}$ y notamos inmediatamente lo siguiente:

$$\int_0^{r_{\text{máx}}} h_0(r)\, dr = K r_{\text{máx}} = n =: J < \infty. \tag{53}$$

Por definición de función de Cheeger tenemos:

$$h\left(B_r(p)\right) \ge \frac{\varphi(r)}{r} = \frac{n}{r} - K. \tag{54}$$

Sea Ω un conjunto abierto, precompacto con frontera suave, e integramos la desigualdad (52) sobre ese conjunto, obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\Omega \triangle\rho_0^2\, dV &\ge 2\textstyle\int_\Omega \varphi(\rho_0)\, dV \\ &\ge 2\varphi(r) V(\Omega). \end{aligned} \tag{55}$$

Por el *teorema de Green* tenemos

$$2rA(\partial\Omega) \ge \int_\Omega \triangle\rho_0^2\, dV. \tag{56}$$

Gracias a la ecuación (55), se obtiene la ecuación:

$$\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)} \ge \frac{\varphi(r)}{r} = \frac{n}{r} - K. \tag{57}$$

De este modo, solo nos resta usar el teorema 10.1 para obtener el resultado esperado.

Agradezco a los revisores las sugerencias para mejorar este artículo.

Bibliografía

[1] J. W. Anderson, *Hyperbolic geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, 2003.

[2] F. Bernstein, «Über die isoperimetrich eigenschaft des kreises auf der kugeloberfläche und in der ebene», *Math. Ann.*, vol. 60, 1905, 117–136.

[3] I. Chavel, *Eigenvalues in riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1984.

[4] ———, *Isoperimetric inequalities: Differential and analytic perspectives*, Cambridge Tracts in Mathematics, 145, CUP, 2001.

[5] M. P. DoCarmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

[6] J. García-León, «Cheeger constant and isoperimetric inequalities on riemannian manifolds», tesis de doctorado, Imperial College, 2004.

[7] ———, «Cheeger's constant in balls and isoperimetric inequality on riemannian manifolds», *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 136, 2008, 4445–4452, N^0 12.

[8] A. A. Grigory'an, «On the existence of positive fundamental solutions of the laplace equation on riemannian manifolds», *Math. USSR Sbornik*, vol. 56, 1987, 349–358.

[9] ———, «The heat equation on non riemannian manifolds», *Math. USSR Sbornik*, vol. 72, 1992, 47–77, N^0 1.

[10] ———, «Heat kernel upper bounds on a complete non compact manifolds», *Revista Iberoamericana*, vol. 10 (10), 1994, 395–452.

[11] ———, «Estimates of heat kernel on riemann manifolds», *London Mathematical Society, Lecture Note Series 273, Cambridge University Press*, 1999, 140–225.

[12] A. A. Grigory'an y S.-T. Yau, «Isoperimetric properties of higher eigenvalues of elliptic operatros», *Amer. J. Math.*, vol. 125, 2003, 893–940.

[13] J. H. Michael y L. M. Simon, «Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of $\mathbb{R}^n$», *Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 26, 1973, 361–379.

[14] R. Osserman, «A survey of minimal surfaces», *Uspehi Mat. Nauk*, vol. 22, 1967, 55–136, English translation is available, by Dover Publications, NY 1986.

[15] ———, «Minimal varieties», *Bulletin of AMS*, vol. 75 (6), 1969, 1092–1120.

[16] ———, «The isoperimetric inequality», *Bulletin of AMS*, vol. 84, núm. 6, 1978, 1182–1238.

[17] S. Rosenberg, *The laplacian on a riemannian manifold*, Student Texts 31, London Mathematical Society, 1991.