Algunas Cuestiones Concernientes a Continuidad y Funciones de Baire.

Alejandro López Yáñez *

La idea de escribir este trabajo surgió al estar enseñando en un curso de Cálculo Diferencial los consabidos ejemplos de una función continua sin derivada en un punto, de una función continua sin derivada en ningún punto y de una función cuya derivada es discontinua en un punto. De aquí se nos ocurrió en analogía al primer y segundo ejemplos, si existiría una función cuya derivada fuese discontinua en todo punto. Después de buscar en la mayoría de los libros de Cálculo y uno que otro de Análisis, no encontramos ni siquiera comentarios acerca del problema. Posteriormente en algunos libros de Análisis hallamos respuestas parciales, de las cuales surgieron nuevas preguntas, como, ¿Que tan discontinua puede ser una función que es límite puntual de funciones continuas?. Finalmente dimos con la monografía (2) en la cual estaban las respuestas a algunas de nuestras preguntas, además de una serie de resultados más refinados y generales relacionados con el tema. En dicha monografía se presupone el conocimiento de Medida de Lebesque y algunos otros tópicos de Análisis, así es que a los estudiantes que hayan llevado estos cursos, recomendamos ver directamente (2). Aquí expondremos los resultados más simples y algunos otros puntos relacionados con

*Facultad de Ciencias. U.N.A.M.

el tema, dando además referencias para encontrar las demostraciones más elaboradas, procurando que la exposición y las demostraciones citadas sean bastante accesibles para los estudiantes de los primeros años de la carrera.

Como es usual, R denotará al conjunto de los números reales, $]\beta,\gamma[$ un intervalo abierto de R y $[\beta,\gamma]$ un intervalo cerrado de R. Un intervalo abierto conteniendo a α será llamado una vecindad de α y será denotado por V.

Definición. Sea $f:]\beta,\gamma[\longrightarrow R$ y $\alpha \in]\beta,\gamma[$, diremos que el límite por la izquierda de f en α existe, o que $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)$ existe, si el límite de $f(x)$ existe cuando x tiende por la izquierda a α. Análogamente, diremos que límite por la derecha de f en α existe, o que $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ existe, si el límite de $f(x)$ existe cuando x tiende a α por la derecha. Recordemos que se dice que x tiende por la izquierda a α, si x tiende a α con $x < \alpha$ y x tiende por la derecha a α, si x tiende a α con $\alpha < x$.

Claramente, f es continua en α si y sólo si, $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ existen y son iguales a $f(\alpha)$.

Definición. Supongamos que $f: R \longrightarrow R$ es discontinua en $\alpha \in R$.

1) α es llamada una discontinuidad de f de la 1a. clase o discontinuidad simple si $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ existen.
2) Si al menos uno de los límites siguientes: $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ no existe, diremos que α es una discontinuidad de la 2a.clase.

Observamos que si $f:]\beta,\gamma[\longrightarrow R$ y $\alpha \in]\beta,\gamma[$, sólo hay dos posibilidades para que α sea una discontinuidad de f de la 1a. clase:

1) $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ o

2) $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) \neq f(\alpha)$

En el caso 2), si α es una discontinuidad aislada de f, esto es, si existe una vecindad V de α, tal que f es continua en $V-\{\alpha\}$, entonces cambiando el valor de f en α, o sea definiéndolo como $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)$, hacemos a f continua en α. En esta situación α es llamada una discontinuidad removible. Notemos que formalmente lo que hacemos es definir una nueva función $g\colon]\beta,\gamma[\longrightarrow R$ por medio de $g(x) = f(x)$ si $x \in]\beta,\gamma[$ y $x \neq \alpha$ y $g(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)$, entonces f y g coinciden en cada punto de $]\beta,\gamma[$ con la excepción de α, y g es continua en α.

El siguiente ejemplo demuestra que si la discontinuidad no es aislada, el proceso de redefinir la función no puede llevarse a cabo en general, a menos que se cambie radicalmente la función.

Sea $h\colon R \longrightarrow R$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ con } \frac{p}{q} \text{ en forma irreducible} \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Vemos que h es continua en cada irracional, ya que dada una vecindad V del irracional $\imath$ y un natural n_0, existe sólo un número finito de racionales con denominador menor o igual que n_0 en la vecindad V. La función h es claramente discontinua en cada racional, es más en cada racional ρ se tiene que $\lim_{x\to\rho^-} h(x) = \lim_{x\to\rho^+} h(x) = 0.$, ya que la propiedad mencionada anteriormente es válida también para cualquier vecindad V del racional ρ . Si modificamos h de la manera planteada anteriormente, tendríamos que darle el valor cero en cada racional obteniendo así la función constante igual a cero.

Ahora consideremos la siguiente bien conocida función k: $R \longrightarrow R$ dada por:

$$k(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es racional} \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Primero, es claro que todo número real es una discontinuidad de k de la 2a. clase.

Segundo, ya que k es discontinua en todo R y todas sus discontinuidades son de la 2a. clase, surgen varias preguntas:

I. ¿Existe una función f: $R \longrightarrow R$ discontinua en todo R y tal que todas sus discontinuidades sean de la 1a. clase?

II. Dado un subconjunto $S \subset R$. ¿Existe una función f: $R \longrightarrow R$ discontinua en los puntos de S y sólo en ellos?

III. ¿Existe $f: R \longrightarrow R$ discontinua exactamente en S y con todas sus discontinuidades de la 1a. (2a.) clase?

A continuación contestaremos la pregunta II caracterizando el conjunto de puntos de discontinuidad de una función arbitraria.

Definiciones. Decimos que un subconjunto $A \subset R$ es abierto si para todo $x \in A$ existe una vecindad V de x tal que $V \subset A$. Decimos que un subconjunto $C \subset R$ es cerrado si su complemento es abierto. Un conjunto cerrado C es denso en ninguna parte, si no contiene ningún intervalo abierto. Los conjuntos que pueden ser expresados como una unión finita o numerable de conjuntos densos en ninguna parte, son llamados de la 1a. categoría. Un conjunto que no es de la 1a. categoría es llamado de la 2a. categoría.

Por ejemplo el conjunto de los números racionales Q es de la 1a. categoría, ya que $Q = \bigcup_{n \in N} \{\rho_n\}$ donde estamos considerando una numeración de Q, claramente cada conjunto $\{\rho_n\}$ es cerrado y denso en ninguna parte. Un resultado que se demuestra usualmente en el primer curso de Análisis es: R es de la 2a. categoría o más generalmente todo espacio métrico completo es de 2a. categoría. (3).

De aquí deducimos que el conjunto de los números irracionales no es de 1a. categoría, ya que de serlo, los números reales serían la unión de dos conjuntos de 1a. categoría y por lo tanto serían un conjunto de 1a. categoría.

Definición. Un conjunto $S \subset R$ es llamado un G_δ, si S puede ser expresado como una intersección a lo más numerable de conjuntos abiertos. $S \subset R$ es llamado un F_σ, si S puede ser expresado como una unión a lo más numerable de conjuntos cerrados.

Es inmediato que el complemento de un G_δ es un F_σ y el complemento de un F_σ es un G_δ.

Sea $f: R \longrightarrow R$ y $C = \{x \varepsilon R : f \text{ es continua en } x\}$, o sea, C es el conjunto de puntos de continuidad de f, entonces C es un G_δ.

Demostración. Consideremos el conjunto $S = \bigcap_{n \varepsilon N} A_n$ con

$$A_n = \bigcup_{x \varepsilon B_n}]x-\delta_x, x+\delta_x[\quad \text{y}$$

$B_n = \{x \varepsilon \mathbf{R} : \exists\ \delta_x > 0$ tal que

$$f(]x-\delta_x\ ,\ x+\delta_x[) \subset]f(x)-\tfrac{1}{n}\ ,\ f(x)+\tfrac{1}{n}[\}.$$

De aquí inferimos que A_n es abierto para toda n, por ser unión de conjuntos abiertos y por lo tanto que S es un G_δ. Ahora demostraremos que $S = C$. Primero, $S \subset C$. Sea $\alpha \varepsilon S$ y supongamos dado el intervalo $]f(\alpha)-\varepsilon\ ,\ f(\alpha)+\varepsilon[$, entonces $\alpha \varepsilon A_{2m}$ con $\frac{1}{m} < \varepsilon$, de aquí tenemos que existe β y δ_β tales que

$$\alpha \varepsilon]\beta-\delta_\beta\ ,\ \beta+\delta_\beta[\subset A_{2m} \quad \text{y}$$

$$f(]\beta-\delta_\beta\ ,\ \beta+\delta_\beta[) \subset]f(\beta)-\tfrac{1}{2m}\ ,\ f(\beta)+\tfrac{1}{2m}[$$

pero $]\beta-\delta_\beta,\ \beta+\delta_\beta[$ contiene un intervalo abierto con centro en α y la imagen de éste bajo f está contenida en $]f(\beta)-\frac{1}{2m}$, $f(\beta)+\frac{1}{2m}[$ y por lo tanto está contenida en $]f(\alpha)-\varepsilon,\ f(\alpha)+\varepsilon[$ y esto demuestra que f es continua en α, o sea $\alpha \in C$.

Segundo, $C \subset S$. Porque si $\alpha \in C$ dado $]f(\alpha)-\frac{1}{n}, f(\alpha)+\frac{1}{n}[$ consideramos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{n}$ y sabemos que existe un intervalo $]\alpha-\delta,\ \alpha+\delta[$ tal que $f(]\alpha-\delta,\ \alpha+\delta[) \subset]f(\alpha)-\varepsilon,\ f(\alpha)+\varepsilon[\subset]f(\alpha)-\frac{1}{n},\ f(\alpha)+\frac{1}{n}[$ y por lo tanto $\alpha \in A_n$ para toda $n \in N$, o sea que $\alpha \in S$.

En vista del resultado anterior colegimos que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función $f: R \longrightarrow R$ es un F_σ.

Tenemos que si $S \subset R$ es un F_σ, entonces S es de la 1a. categoría o S contiene un intervalo abierto.

Demostración. La o de la afirmación es excluyente, pero aquí demostraremos únicamente que si S no contiene un intervalo, entonces S es de la 1a. categoría, ya que por un lado $S=\bigcup_{n\in N} C_n$ con C_n cerrado para toda n y por otro lado ningún C_n contiene un intervalo, o sea que cada C_n es denso en ninguna parte y por lo tanto S es de la 1a. categoría. Para la demostración de la otra parte, véase (3).

Ya hemos visto que los irracionales no son un conjunto de la 1a. categoría, tampoco contienen ningún intervalo abierto, concluimos que no son un F_σ, y por lo tanto no existe una función $f: R \longrightarrow R$ tal que sea continua en cada racional y discontinua en cada irracional.

La pregunta II queda totalmente contestada por el teorema siguiente que puede ser visto en (5).

Teorema. Dado un subconjunto F_σ de R existe una función $f: R \longrightarrow R$ que es discontinua exactamente en el conjunto dado.

Con respecto a la pregunta III, tenemos el siguiente muy conocido resultado:
Sea $f: R \longrightarrow R$, el conjunto de discontinuidades de f de la 1a. clase es a lo más numerable y dado cualquier subconjunto numerable de R existe una función $g: R \longrightarrow R$ continua en el complemento del subconjunto y con discontinuidades de la 1a. clase en éste, de hecho g puede ser construida de manera tal que resulte monótona.

Demostración. Definiremos una función inyectiva del conjunto de discontinuidades de f de la 1a. clase al conjunto de ternas de números racionales. Consideremos primero el caso en que $\lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) < \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$, le asociamos a α una terna (ρ_1, ρ_2, ρ_3) tal que:

1) $\lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) < \rho_1 < \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$

2) $f(x) < \rho_1$ para $x \in \,]\rho_2, \alpha[$

3) $f(x) > \rho_1$ para $x \in \,]\alpha, \rho_3[$

El caso en que $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) > \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ es considerado de la misma forma.

Cuando $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) < f(\alpha)$, le asociamos a α la terna (ρ_1, ρ_2, ρ_3) de manera que

1) $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) < \rho_1 < f(\alpha)$

2) $f(x) < \rho_1$ para $x \in]\rho_2, \alpha[$ y $x \in]\alpha, \rho_3[$

De un modo análogo tratamos el caso $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) > f(\alpha)$.

Es fácil ver, pero latoso de escribir, que la asociación definida es inyectiva y por lo tanto el conjunto de discontinuidades de f de la 1a. clase es a lo más numerable.

Para la segunda parte, tenemos que si $\{\gamma_n\}$ es un conjunto dado a lo más numerable, definimos la función:

$$f(x) = \sum_{n:\gamma_n<x} \frac{1}{n^2}$$, donde sumamos para todos los índices n tales que $\gamma_n < x$.

Claramente esta función es creciente, esto es, $\alpha < \beta$ implica $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

Un resultado que se demuestra usualmente en el primer curso de Análisis Real es que las funciones monótonas no tienen discontinuidades de la 2a. clase, o sea, que en cualquier discontinuidad, los límites por la izquierda y por la derecha existen. Véase por ejemplo (8).

Demostremos ahora que $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = f(\alpha)$ para toda $\alpha \in R$ y en particular obtendremos que $\lim\limits_{x\to\gamma_m^-} f(x) = f(\gamma_m)$.

Dado $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon$. Sea $\{\alpha_i\}$ una sucesión que tiende por la izquierda a α; entonces

$$\left| f(\alpha) - f(\alpha_i) \right| = \left| \sum_{n:\gamma_n<\alpha} \frac{1}{n^2} - \sum_{n:\gamma_n<\alpha_i} \frac{1}{n^2} \right| =$$

$$\left| \sum_{n:\alpha_i\le\gamma_n<\alpha} \frac{1}{n^2} \right|$$

llamemos n_1 al mínimo índice n tal que $\alpha_i \le \gamma$, de aqui si i es suficientemente grande, n_1 es mayor que n_0 y por lo tanto

$$\left| \sum_{n:\alpha_i\le\gamma_n<\alpha} \frac{1}{n^2} \right| \le \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon.$$

Obsérvese aquí que el punto importante es que γ_n es tomada estrictamente menor que α.

Vemos que $\lim\limits_{x\to\gamma_m^+} f(x) > f(\gamma_m)$ ya que para $x > \gamma_m$ en la suma que define a $f(x)$ siempre aparece cuando menos un término más, a saber $\frac{1}{m^2}$, que en la suma que define $f(\gamma_m)$.

De aquí deducimos que f tiene una discontinuidad de la 1a. clase en cada γ_n, y de hecho el salto, esto es,

$$\lim_{x\to\gamma_m^+} f(x) - \lim_{x\to\gamma_m^-} f(x) = \frac{1}{m^2}$$

Ahora si $\alpha \neq \gamma_n$ para toda n, se tiene que $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ ya que si α_i converge a α por la derecha

$$\left| f(\alpha_i) - f(\alpha) \right| = \left| \sum_{n:\gamma_n<\alpha_i} \frac{1}{n^2} - \sum_{n:\gamma_n<\alpha} \frac{1}{n^2} \right| =$$

$$\left| \sum_{n:\alpha<\gamma_n<\alpha_i} \frac{1}{n^2} \right|$$

Aquí, otra vez como γ_n es tomada estrictamente mayor que α (ya que $\alpha \neq \gamma_n$ para toda n) repitiendo el argumento anterior llegamos a que

$$\left| \sum_{n:\alpha<\gamma_n<\alpha_i} \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon$$

En consecuencia si $\alpha \neq \gamma_n$ para toda n, entonces f es continua en α, ya que $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$.

Ahora consideremos las preguntas siguientes, que como veremos están relacionadas entre si.

IV. ¿Qué tan discontinua puede ser la derivada de una función $f: R \longrightarrow R$?

V. ¿Qué tan discontinua puede ser una función que es límite puntual de funciones continuas?

VI. ¿Cualquier función $f: R \longrightarrow R$ puede ser expresada como límite puntual de una sucesión de funciones continuas?

Recordemos primero que si $f\colon R \longrightarrow R$ es derivable, entonces la derivada $f'\colon R \longrightarrow R$ tiene la propiedad del valor intermedio, esto es, dado γ tal que

$f(\alpha) < \gamma < f(\beta)$ existe $\eta \in]\alpha,\beta[$ tal que $f(\eta) = \gamma$.

Las funciones que tienen esta propiedad son conocidas con el nombre de funciones de Darboux.

Una consecuencia inmediata de que las derivadas son funciones de Darboux es que sus discontinuidades son de la 2a. clase, ya que estas funciones no pueden tener saltos. También sabemos que si $f\colon R \longrightarrow R$ es derivable, entonces f es continua y esto nos permite ver que toda derivada es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas, ya que,

$f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ donde $g_n\colon R \longrightarrow R$ esta dada por

$$g_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

Claramente g_n es continua para toda n.

Hasta aquí, ya tenemos algunas restricciones para las discontinuidades de las derivadas.

Recordemos un hecho más de Análisis, la función $k(x)$ definida anteriormente puede ser expresada como:

$$k(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x) \quad \text{donde} \quad g_m(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^m(x) \quad \text{y}$$

$$f_n^m(x) = (\cos m!\pi x)^{2n}$$

Claramente $f_n^m(x)$ es continua en todo R, sin embargo $g_m(x)$ no es continua en R, de hecho en cada intervalo de la forma $[n, n+1]$ tiene un número finito de discontinuidades de la 1a. clase. O sea que $k(x)$ puede ser expresada como límite puntual de funciones que son a su vez límite puntual de funciones continuas. El siguiente resultado demostrará que no es posible expresar $k(x)$ como límite puntual de funciones continuas directamente.

(Lebesgue). Una condición necesaria y suficiente para que una función $f: R \longrightarrow R$ sea continua o límite puntual de funciones continuas es que para cualquier $\alpha \in R$, los conjuntos

$\{\beta \in R: f(\beta) > \alpha\}$ y $\{\gamma \in R : f(\gamma) < \alpha\}$ sean F_σ. (7).

Aplicando este teorema a $k(x)$, con $\alpha = \frac{1}{2}$, vemos que los irracionales coinciden con el conjunto $\{\gamma \in R : k(\gamma) < \frac{1}{2}\}$, ya que los irracionales no son un F_σ, concluimos que la función $k(x)$ no es límite puntual de funciones continuas.

Consideremos las siguientes familias de funciones de R a R, definidas y estudiadas por Baire y de aquí, que actualmente lleven su nombre.

La clase B_0 estará formada por las funciones continuas.
La clase B_1 estará formada por las funciones que pueden ser expresadas como límite puntual de funciones que pertenecen a la clase B_0.

La clase B_2 estará formada por las funciones que pueden ser expresadas como límite puntual de funciones que pertenecen a la clase B_1.

Y así sucesivamente podemos definir una clase B_n para cada número natural n.

Claramente $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \; B_n \subset B_{n+1} \subset \ldots\ldots$
Estas familias de funciones aparecen también de manera natural en Teoría de la Medida, cuando se estudia la estructura de los conjuntos de Borel.

Para el estudio de puntos como:

1) La contención de B_n en B_{n+1} es estricta para toda n.
2) El límite uniforme de funciones en B_n está en B_n.
3) La relación entre las funciones de Baire y los conjuntos de Borel.
4) Condiciones necesarias y suficientes sobre los elementos

de una sucesión $\{f_i\} \subset B_n$ convergente puntualmente, para que su límite pertenezca a B_n.

Véase (4), (6) y (7) .

De paso mencionaremos que la unión de las familias B_n forma un conjunto con la cardinalidad del continuo y por lo tanto "hay muchas" funciones que no pertenecen a ninguna clase B_n. Apuntamos simplemente que la cardinalidad de las funciones medibles es 2^c, donde c denota la cardinalidad del continuo.

En contraste, tenemos que cualquier función es límite puntual de una sucesión de funciones de Darboux.

En términos de funciones de Baire podemos afirmar que la derivada de una función pertenece a la clase B_1 y no necesariamente a la clase B_0 y según vimos, la función $k(x)$ pertenece a la clase B_2 y no pertenece a la clase B_1. Usaremos el resultado siguiente:

(Baire) El conjunto de puntos de continuidad de una función de la clase B_1 es denso. (7).

Como el conjunto de puntos de discontinuidad es un F_σ , si la función pertenece a B_1, no puede contener un intervalo abierto, ya que el complemento, esto es, el conjunto de puntos de continuidad no sería denso, contradiciendo esto el resultado anterior. Por lo tanto el conjunto de puntos de discontinuidad de una función de la clase B_1, es de la 1a.

categoría . (Recuérdese que un F_σ que no contiene un intervalo abierto es de la 1a. categoría).

Entonces tenemos el siguiente teorema:
El conjunto de discontinuidades de una derivada es un F_σ de la 1a. categoría. El recíproco también es válido, esto es, dado un F_σ de la 1a. categoría, existe una derivada que lo tiene como conjunto de discontinuidades. (2).

Una consecuencia inmediata del Teorema de Categoría de Baire es que un G_δ denso no puede ser a lo más numerable y de aquí inferimos que no existe una derivada continua sólo en un conjunto a lo más numerable.

Con esto concluímos estas notas, como se verá, algo de reflexión plantea nuevas preguntas, algunas quizás ya contestadas, otras posiblemente no, por lo tanto al lector interesado le sugerimos consultar la bibliografía, donde encontrará material interesante y otras referencias pertinentes al tema.

Bibliografía

1. R.P. Boas, A primer of real functions, Carus Mathematical Monograph No. 13, MAA, 1960.

2. A.M. Bruckner and J.L. Leonard, Derivatives, The American Mathematical Monthly, Volume 73, No. 4, April 1966.

3. J.Dugundji, Topology , Allyn and Bacon.

4. C. Goffman , Real Functions, Prindle, Weber and Schmidt, 1970.

5. H. Hahn, Reele Funktionen, Chelsea, 1958.

6. K. Kuratowski, Topology, Volume I, Academic Press, 1966.

7. I.P. Natanson, Theory of Functions of a Real Variable, Volume II, Frederick Ungar Publishing Co., 1960.

8. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Second Edition , Mc Graw-Hill, 1964.