Miscelánea Matemática **72** (2021) 1-20 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7201

¿«!Te lo aseguro!» o «¡te lo apuesto!»? He ahí el dilema...

Alfredo Erick Cano Ramos
Colaborador de la Licenciatura en Actuaría. Facultad de Ciencias Actuariales. Universidad Anáhuac México
Huixquilucan, Estado de México
alfredo.canora@anahuac.mx
y
José Daniel López Barrientos
Facultad de Ciencias Actuariales, Universidad Anáhuac México
Huixquilucan, Estado de México
daniel.lopez@anahuac.mx

1. ¿En qué se parece asegurar a apostar?

Matemáticamente, asegurar y apostar son el mismo fenómeno. En efecto, en ambos casos se trata de fijar un valor (o una función de valor) a una variable aleatoria (o a un proceso estocástico) que modela un fenómeno en el que el riesgo esta inmiscuido. Comúnmente, el valor (resp. función de valor) al (la) que nos referimos aquí es la esperanza matemática (resp. función de esperanza matemática). Sin embargo, desde un punto de vista filosófico, se trata de dos cosas muy diferentes. Uno *apuesta* cuando gusta de incrementar la variabilidad de su bienestar, mientras que *asegura* cuando busca lograr el efecto contrario. Otra manera de decir esto es:

> Quien apuesta es amante del riesgo, mientras que quien asegura, es adverso al riesgo.

De aquí se desprende nuestra primera lección: *el riesgo es la variabilidad de nuestro bienestar* (véase el video: https://youtu.be/LRsUDZ_n87g). A continuación brindamos un ejemplo de dos apuestas, ambas con igual probabilidad de ganar, que de perder. En la primera apuesta, usted puede perder un peso, o ganar ese mismo monto; y en la segunda, usted puede perder un millón de pesos, o ganar la misma suma. La

Palabras clave: función de masa, función de distribución, esperanza matemática, ley de los grandes números, cadena de Markov, probabilidad de la ruina.

segunda apuesta es más *riesgosa* que la primera, pues en ella hay mayor variabilidad en su bienestar futuro.

Ahora ilustremos las nociones de *apuesta* y *seguro*. Digamos que pagamos un peso por participar en un juego de azar en el cual, si ocurre el evento E, nos regresan 30,001 pesos. De este modo, la ganancia neta es de 30,000 pesos. Digamos que el evento es:

$$E = \{\text{se lanza un dado y cae el número seis}\}.$$

En este caso, hablamos de apostar. La razón es que, si usted participa en el juego, puede ganar un total de 30,000 pesos (cuando E ocurre), o perder un peso cuando ocurre

$$E' = \{\text{se lanza un dado y NO cae el número seis}\}.$$

O sea que su bienestar varía mucho entre los dos resultados posibles del experimento. Sin embargo, si usted no participa en el experimento, su bienestar no varía con ninguno de los resultados posibles.

Ahora suponga que el evento es $E = \{\text{su teléfono se extravía}\}$. En este caso, participar en el experimento hace que el riesgo decrezca. En efecto, si usted decide *no* participar, su bienestar puede variar mucho entre la ocurrencia E, y la de $E' = \{\text{su teléfono NO se extravía}\}$. De cualquier modo, si usa un peso para jugar, cuando ocurra E, habrá perdido su teléfono, mas estará en posesión de 30,000 pesos (que puede usar para comprar otro aparato); y si ocurre E', ciertamente habrá perdido la cantidad con la que entró al experimento, pero seguirá contando con su teléfono. De esta manera, su bienestar es similar, independientemente de si ocurrió E, o E'. En este caso, hablamos de asegurar.

El estudio de la aversión y el apetito al riesgo es uno de los temas principales de la teoría de la utilidad (véase por ejemplo [3, cap. 1.2] y [15, cap. 18.2]). Las herramientas de las que echaremos mano para la propuesta que presentamos son habituales de esta teoría, y de las ciencias actuariales en general. De hecho, confiamos en que nuestro tratamiento sirva como introducción al modelo clásico estudiado, por ejemplo en [14, cap. 1], [16, cap. 1], y [17, cap. 7.2]. La razón es que hemos procurado incluir ejemplos computacionales sencillos, y resolverlos paso a paso con el fin de sembrar en el lector algunas de las ideas más importantes en las Ciencias Actuariales. Más aún, consideramos que nuestro trabajo puede servir para introducir algunos conceptos en la teoría del control *estocástico* aplicada a los seguros en, por ejemplo, [20, cap. 1]; y a una de las disciplinas actuariales por excelencia: las pensiones (véase [1, cap. 2] y [10, cap. 2]).

Hemos confeccionado el resto del trabajo de la siguiente manera. La sección 2 presenta un juego de azar que perfectamente puede asociarse con el contexto de las apuestas, y a través de la implementación de la técnica llamada *de la transformación inversa*, nos permite averiguar cuánto es lo mínimo que debe costar la participación de un jugador en tal esquema, y cuál es la probabilidad de que el jugador caiga en insolvencia cobrando tal tarifa. La sección 3 vuelve al mismo esquema, y lo itera. Nuestra meta es introducir el concepto fundamental de *cadena de Markov*, aplicarlo para pronosticar el desempeño del jugador en un horizonte de tiempo, y calcular la *probabilidad de la ruina* del jugador. Esto nos servirá para modificar la *prima* de forma **justa** para quien la paga, de tal suerte que la probabilidad de la ruina se ajuste a un nivel que resulte **aceptable** para el jugador. Usamos la sección 4 para presentar nuestras conclusiones. El apéndice A contiene un resultado auxiliar de cálculo que usamos en el cuerpo principal del trabajo.

2. Un juego de apuestas

Ahora analizaremos una situación de riesgos que, en principio, corresponde a un juego de apuestas, pese a que podría tratarse de un esquema de seguros.

Cierto juego de azar consiste en lanzar repetidamente dos dados, hasta que aparezca alguno de los resultados siguientes: $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, o $(6,6)$. En este juego, el participante cobra una tarifa la primera vez que lanza los dados, y a cambio, acepta el riesgo de pagar un peso cada vez que no aparece alguno de los resultados mencionados.

Decimos que se trata de un juego de apuestas porque el hecho de lanzar los dados evoca esta idea. Sin embargo, debemos hacer énfasis en que la diferencia entre apostar y asegurar radica en si el efecto de nuestra participación en estos esquemas aumenta la variabilidad del bienestar, o por el contrario, la disminuye. A continuación analizamos el juego.

El evento en que el jugador no tenga que pagar equivale a que la primera vez que los dados se lanzan, el resultado sea un número doble. Como hay seis tales resultados, y el total de casos posibles es de 36, la probabilidad de cobrar la prima sin tener que pagar nada a cambio es de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Calcular la probabilidad de que el jugador tenga que pagar exactamente un peso equivale a encontrar la probabilidad del evento en que los dados se lanzan solo dos veces. Esto ocurre si la primera vez que los dados se lanzan, el resultado no coincide con ninguno de los arriba mencionados, y en la segunda ocasión, sí. Del párrafo anterior, sabemos que las probabilidades de obtener estos resultados son $\frac{5}{6}$, y $\frac{1}{6}$, respectivamente. De aquí se sigue que la probabilidad de que el jugador tenga que pagar exactamente un peso es $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$. Razonando de la misma manera, es posible obtener la probabilidad de que el jugador tenga que pagar exactamente dos pesos. Efectivamente, se trata de la probabilidad de que haya dos fracasos, seguidos de un éxito, o sea: $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$.

Observe que las probabilidades de perder cero pesos, un peso, y dos pesos nos regalan un patrón que podemos utilizar para calcular la probabilidad de que el jugador pierda n pesos, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Lo que debemos hacer es abstraer el fenómeno usando álgebra. Sea N el número de pesos perdidos en el juego. Así, podemos escribir la probabilidad de que la pérdida N sea igual a n como

$$\mathbb{P}(N = n) := \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{6}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Esta expresión es la que los actuarios, los economistas y los matemáticos llamamos *función de masa de una variable aleatoria geométrica* (cf. [9, cap. 5.4]). Véase la figura 1.

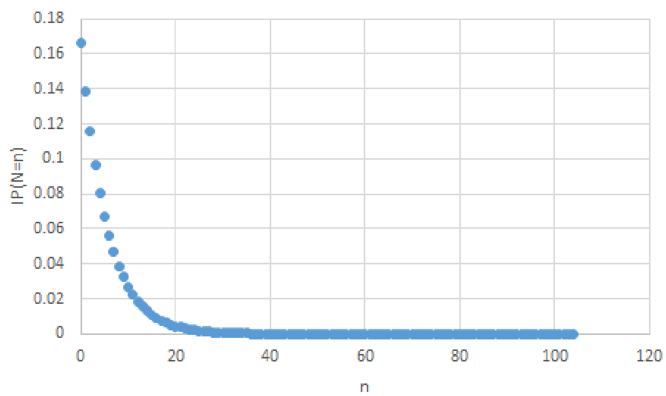

Figura 1. Función de masa de una variable aleatoria geométrica con parámetro $\frac{1}{6}$.

2.1 ¿Cuánto debemos cobrar?

Ahora calcularemos el valor mínimo de la tarifa que el jugador debe cobrar para aceptar participar en el juego. Una manera de hacer esto es *simular*[1] que participamos en el juego muchas veces, y calcular el promedio de las pérdidas en que incurriremos. La ventaja de hacer esto es que no tendremos que desembolsar un solo peso para obtener el número que buscamos.

[1]Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, «simular» viene del verbo latino *simulare*, que quiere decir *representar algo, fingiendo o imitando lo que no es*. Para nosotros, la simulación es un conjunto de técnicas matemáticas que tiene como núcleo la capacidad de generar números (pseudo-)aleatorios con el fin de modelar un fenómeno natural de la manera más fiel posible para estudiarlo a través de herramientas propias de la probabilidad (vea el prefacio y el capítulo 3 de [19]).

Para trabajar de manera eficiente, recurriremos a la técnica de simulación de la transformación inversa (cf. [19, cap. 4]). Describimos este algoritmo a continuación. Observe que este programa debe ser alimentado por $\mathbb{P}(N \leq n)$ para $n = 0, 1, \ldots$, esto es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N \leq 0) &= \mathbb{P}(N = 0), & (2)\\
\mathbb{P}(N \leq 1) &= \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 1), & (3)\\
&\vdots \\
\mathbb{P}(N \leq n) &= \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 1) + \cdots + \mathbb{P}(N = n), & (4)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

La colección de valores $\mathbb{P}(N \leq n)$ para $n = 0, 1, \ldots$ se llama *función de distribución de la variable aleatoria N*.

Pseudocódigo 1: Técnica de la transformación inversa

Datos: $\mathbb{P}(N \leq n)$ para $n = 0, 1, \ldots$
Resultado: Pérdida P en la que el jugador incurre por participar en el juego descrito arriba.

$u \leftarrow$ `rnd()`;
▷ `La función rnd() devuelve un número real al azar entre 0 y 1. Interpretamos este número como una probabilidad.`
seleccionar u **hacer**
  caso $0 \leq u < \mathbb{P}(N \leq 0)$ **hacer**
    $P = 0$;
  fin
  caso $\mathbb{P}(N \leq 0) \leq u < \mathbb{P}(N \leq 1)$ **hacer**
    $P = 1$;
  fin
  caso $\mathbb{P}(N \leq 1) \leq u < \mathbb{P}(N \leq 2)$ **hacer**
    $P = 2$;
  fin
  $\vdots$
  caso $\mathbb{P}(N \leq n-1) \leq u < \mathbb{P}(N \leq n)$ **hacer**
    $P = n$;
  fin
  $\vdots$
fin
devolver P;

Para implementar el pseudocódigo 1, utilizamos una hoja de cálculo en `Microsoft Excel`©.[2] El primer paso es preparar el insumo para el programa. Mire la figura 2.

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	IP(N<=n)

(a) Usamos la primera fila para etiquetar los valores de nuestro interés.

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	IP(N<=n)
2	0	=1/6*(5/6)^A2	

(b) Capturemos (1) en la segunda columna.

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	IP(N<=n)
2	0	0.16666667	=B2

(c) La tercera comumna sirve para capturar la función de distribución de N.

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	IP(N<=n)
2	0	0.16666667	0.16666667
3	=1+A2		

(d) Iteramos el valor de n.

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	IP(N<=n)
2	0	0.16666667	0.16666667
3	1	=1/6*(5/6)^A3	

(e) Repetimos el paso de la figura 2b.

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	IP(N<=n)
2	0	0.16666667	0.16666667
3	1	0.13888889	=C2+B3

(f) Capturamos (3).

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	IP(N<=n)
2	0	0.16666667	0.16666667
3	1	0.13888889	0.30555556
4			
5			

(g) Seleccionamos el rango `A3:C3` y lo arrastramos hasta que la tercera columna muestre el valor de 1.

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	IP(N<=n)
104	102	1.3975E-09	0.99999999
105	103	1.1646E-09	0.99999999
106	104	9.7051E-10	1
107			

(h) La figura 1 puede obtenerse insertando un gráfico de dispersión de las primeras dos columnas.

Figura 2. Siga estos pasos para capturar (1), y (2)-(4).

La tercera columna en la figura 2h representa el insumo del pseudocódigo 1[3]. Usaremos la función `BUSCARV`[4] de `Microsoft Excel`© para efectivamente, implementar el pseudocódigo 1. Para ello, es necesario un último preparativo. Véase la figura 3.

[2]Nos hemos decantado por esta herramienta (en vez de alguna más sofisticada) por la simplicidad de su sintaxis, y la sinopsis que se logra para la visualización de la información. El lector interesado puede encontrar desarrollos similares a los que mostramos en este trabajo en, por ejemplo [11]. En esa obra, los autores han trabajado sus resultados en `R`.

[3]Note que, aunque hemos obtenido el valor de 1 en la fila 106 de nuestra hoja de trabajo, esto depende en realidad del formato de puntuación decimal que usemos en las celdas. De manera que usted podría obtener el mismo valor de 1 en otra fila.

[4]La función `BUSCARV` es una de las herramientas de *búsqueda y referencia de* `Microsoft Excel`©. Según la documentación del programa, esta función se usa cuando necesitamos buscar elementos en una tabla, o en un rango por fila. La sintaxis es como sigue:

```
=BUSCARV(valor buscado, rango de búsqueda, índice de columna en rango que contiene el
  valor que se devolverá, devolverá una coincidencia aproximada (1) o exacta (0)).
```

	A	B	C
1	n	IP(N=n)	0
2	0	0.16666667	0.16666667
3	1	0.13888889	0.30555556

(a) Cambie el encabezado de la tercera columna.

	A	B	C	D
1	n	IP(N=n)	0	0
2	0	0.166666667	0.166666667	1
3	1	0.138888889	0.305555556	2
4	2	0.115740741	0.421296296	3
5	3	0.096450617	0.517746914	4
6	4	0.080375514	0.598122428	5
7	5	0.066979595	0.665102023	6

(b) Copie y pegue la primera columna, en la cuarta.

Figura 3. Último preparativo para implementar el algortimo 1.

Usaremos las columnas `F:H` para ejecutar las instrucciones del pseudocódigo 1. Mire la figura 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	IP(N=n)	0	0		consecutivo	aleatorio	pérdida
2	0	0.166666667	0.166666667	1		1	=ALEATORIO()	
3	1	0.138888889	0.305555556	2				

(a) Línea 1 del pseudocódigo 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n	IP(N=n)	0	0		consecutivo	aleatorio	pérdida		
2	0	0.166666667	0.166666667	1		1	0.877599827	=+BUSCARV(G2,$C$1:$D$106,2,1)		
3	1	0.138888889	0.305555556	2						
4	2	0.115740741	0.421296296	3						

(b) Líneas 2-17 del pseudocódigo 1. Observe que se usa el rango `$C$1:$D$106`, pues en nuestro caso, la función de distribución alcanzó el valor de 1 en la celda `C106` (véase la figura 2h).

Figura 4. Una ejecución del pseudocódigo 1.

La ejecución del pseudocódigo 1 representa una simulación de las veces que habrá que lanzar los dados hasta obtener números dobles. Sin embargo, gracias a nuestro modelo, no es necesario que arriesguemos un solo peso para saber cuántos tiros deberíamos hacer para lograr el primer tiro «exitoso». De hecho, la repetición de nuestras simulaciones nos dará a conocer el promedio de las veces que es necesario lanzar los dados para obtener un tiro con números dobles. En efecto, si usamos el rango `F:H` para repetir el experimento que mostramos en la figura 4, y posteriormente calculamos el promedio de las pérdidas, veremos que en promedio, hace falta perder cinco pesos antes de lograr números dobles. Mire la figura 5[5].

1	n	IP(N=n)	0	0		consecutivo	aleatorio	pérdida
14526						14525	0.350855043	2
14527						14526	0.145389465	0
14528						14527	0.470078647	3
14529						14528	0.657433975	5
14530						14529	0.874623157	=+BUSCARV(G14530,$C$1:$D$106,2,1)

(a) 14,529 repeticiones del pseudocódigo 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	IP(N=n)	0	0		consecutivo	aleatorio	pérdida	
14529						14528	0.833781644	9	
14530						14529	0.824596551	9	
14531							promedio	=+PROMEDIO(H2:H14530)	

(b) Cálculo del promedio de las 14,529 repeticiones del pseudocódigo 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	IP(N=n)	0	0		consecutivo	aleatorio	pérdida
14529						14528	0.833781644	9
14530						14529	0.824596551	9
14531							promedio	4.9556

(c) El promedio es de aproximadamente 5.

Figura 5. Bastó con repetir la ejecución del pseudocódigo 1 *unas cuantas veces* para saber que, en promedio, se perderán cinco pesos antes de lograr números dobles.

Resulta natural pensar que el promedio de los valores obtenidos en las simulaciones que propusimos sea el valor mínimo de la tarifa que el jugador debe cobrar para aceptar participar en el juego. Sin embargo, el hecho de que, para obtener tal valor promedio, tuviéramos que diseñar un modelo computacional basado en el esquema de *apuestas* que propusimos también debe hacernos meditar sobre si la única forma de obtener la tarifa es jugar (o simular) una cantidad *suficiente* de experimentos. Después de todo, simular más de catorce mil veces el lanzamiento de los dados no es algo que resulte muy entretenido (sin mencionar el hecho de que la razón por la que propusimos correr estas simulaciones es precisamente que no deseábamos arriesgar nuestro dinero, ni nuestro tiempo).

Hay muchos matemáticos ilustres asociados al uso del resultado de calcular las probabilidades para una gran cantidad de simulaciones, mucho antes de que se probara por primera vez en 1713. La lista incluye los nombres de Cardano, Halley, Kepler, De Witt, De Moivre y Montmort. Hoy en día, el resultado se enuncia en dos formas diferentes: la Ley fuerte de los grandes números, y la ley débil de los grandes números

[5]Observe que en la columna de valores aleatorios, sus resultados pueden *y deben* diferir de los nuestros (esto, debido al hecho de que trabajamos con una muestra de números pseudo-aleatorios).

(véase por ejemplo [4, cap. 7.4 y 7.5], [5, cap. 8], [7, cap. 8.4], [9, cap. 8], [12], y [18, cap. 8.4]). A continuación presentamos el segundo de estos enunciados.

Teorema 2.1. *[Ley débil de los grandes números; Teorema de oro; Teorema de Bernoulli.] Sea $N_1, N_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes*[6] *e idénticamente distribuidas con media común*

$$\mu := \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(N_i = n) \text{ para cualquier } i = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Considere, asimismo la definición recursiva *de las observaciones,*

$$\bar{N}_k := \frac{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}{k}. \tag{6}$$

Entonces, para cualquier número positivo ε,

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{N}_k - \mu\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ cuando } k \text{ es muy grande.}$$

El teorema 2.1 dice que, para cualquier margen no-nulo especificado ($\varepsilon > 0$), con una muestra lo suficientemente grande (de tamaño k), hay una probabilidad muy baja de que el promedio de las observaciones (6) se aleje de la media μ por más del margen mencionado. En este trabajo *no* demostraremos el teorema 2.1, sino que más bien lo usaremos ahora para introducir la noción de *la Esperanza Matemática* de la pérdida del jugador; y más tarde, en el pseudocódigo 2, donde en vez de referirnos a $N_1, N_2, \ldots$, hablaremos de variables aleatorias que pueden tomar los valores 0 ó 1.

El número μ obtenido por la fórmula (5) se conoce con el nombre de *Esperanza Matemática*. En el apéndice A proponemos un argumento algebraico, y de cálculo para ver que $\mu = 5$. Esto es consistente con los resultados que nos dio la simulación, y con el enunciado del teorema 2.1.

Ahora es posible hacernos la pregunta ¿cuál es la probabilidad de que la pérdida sobrepase el valor mínimo de la tarifa que el jugador debe cobrar para aceptar participar en el juego?

---

[6]Decimos que dos variables aleatorias, N_1 y N_2 definidas en el mismo espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ son independientes si para todos los eventos medibles B y C, tales que $\mathbb{P}(N_1 \in B) \neq 0 \neq \mathbb{P}(N_2 \in C)$, se cumple que

$$\mathbb{P}(N_1 \in B, N_2 \in C) = \mathbb{P}(N_1 \in B) \times \mathbb{P}(N_2 \in C).$$

Equivalentemente, podemos decir que N_1 y N_2 son independientes si

$$\mathbb{P}(N_1 \in B | N_2 \in C) = \mathbb{P}(N_1 \in B).$$

O sea, si la probabilidad de que N_1 pertenezca a B, *condicionado a que* N_2 pertenezca a C es, simplemente la probabilidad de que N_1 pertenezca a B. Véase [9, cap. 3 y 5].

Para responder, es necesario calcular $\mathbb{P}(N > 5)$. Para lograr esto, basta con hacer

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N > 5) &= 1 - \mathbb{P}(N = 0) - \mathbb{P}(N = 1) - \mathbb{P}(N = 2) \\
&\quad - \mathbb{P}(N = 3) - \mathbb{P}(N = 4) - \mathbb{P}(N = 5) \\
&= 1 - \frac{1}{6}\left[1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^5\right] \\
&= 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6}{1 - \frac{5}{6}} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.33489797668.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que, si el jugador cobra solo cinco pesos a cambio de aceptar el riesgo de pagar un peso cada vez que no salgan números dobles en los dados, hay un 33.48 % de posibilidad de que *no* le alcance para hacer frente a su responsabilidad. Por esta razón, el individuo debería cobrar una cantidad mayor a los cinco pesos para participar en el juego, y/o contar con un capital inicial que amortigüe el efecto del riesgo que asume al jugar.

3. Un juego de seguros

Suponga que participamos en un esquema de seguros idéntico al descrito en la sección 2, donde el siniestro que tratamos de cubrir ocurre con probabilidad $\frac{5}{6}$, y que pagamos un peso cada vez que se da. De acuerdo a lo que vimos en la sección 2, la tarifa mínima que debemos cobrar para ser *solventes* ante la eventualidad adversa es de cinco pesos. Aunque esto nos deja desprotegidos el 33.48 % de las veces que participamos en el juego. Analicemos la evolución de la situación cuando contamos con un capital inicial de w pesos, cobramos la prima mínima de cinco pesos, e iteramos nuestra participación en el juego. ¿Será que la probabilidad de insolvencia se mantiene constante?, o por el contrario, ¿ocurrirá que el cobro de la prima antes de cada sucesión de «lanzamientos de los dados» reduce esta probabilidad? Quizás resulte que el cobro de la tarifa mínima nos conduce a un estado de insolvencia con una alta probabilidad. Veremos que este último, es el caso.

3.1 La cadena de Markov de la riqueza

Llamemos W_k a nuestra riqueza en el tiempo $k = 1, 2, \ldots$ En cada período recibiremos un monto fijo de primas, que denotaremos por π. Del mismo modo, tendremos que pagar un monto por concepto de siniestros, al que llamaremos N_k. Así, la evolución de nuestra riqueza esta caracterizada por:

$$\begin{aligned} W_0 &= w, & (7)\\ W_{k+1} &= W_k + \pi - N_k \text{ para } k = 1, 2, \dots & (8)\end{aligned}$$

Esta manera de definir la evolución de la riqueza es muy conveniente, pues nos permite describirlo en términos de su valor en el período pasado, y de una variable aleatoria independiente de él. Cuando podemos hacer esto, trabajamos con una *cadena de Markov.*

Definición 3.1. ([8, cap. 1]) Una colección de variables aleatorias que toman valores en $\mathbb{R}$, digamos $W_\bullet := \{W_k, k = 0, 1, \dots\}$, cumple la **propiedad de Markov** si satisface que

$$\mathbb{P}(W_m \in B | W_0, \dots, W_k) = \mathbb{P}(W_m \in B | W_k)$$

para todo $B \subseteq \mathbb{R}$ y todo $m \geq n = 0, 1, \dots, k$. A esta colección de variables aleatorias se le llama **cadena de Markov**. Equivalentemente podemos decir que $W_\bullet$ es una cadena de Markov si cumple que

$$\mathbb{P}(W_{k+1} \in B | W_0, \dots, W_k) = \mathbb{P}(W_{k+1} \in B | W_k)$$

para todo $B \subseteq \mathbb{R}$, y $k = 0, 1, \dots$

El resultado siguiente nos presenta una manera general de caracterizar cadenas de Markov a partir de sucesiones de variables aleatorias definidas en términos de relaciones de recurrencia, como (7)-(8).

Teorema 3.2. *Sean $W_\bullet = \{W_k, k = 0, 1, \dots\}$ y $N_\bullet = \{N_k, k = 0, 1, \dots\}$ dos colecciones de variables aleatorias tales que $N_0, N_1, \dots$ son independientes por parejas. Además, suponga que W_0 es independiente de $N_\bullet$, y que existe una función $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$W_{k+1} = G(W_k, N_k) \text{ para todo } k = 0, 1, \dots, \tag{9}$$

entonces $W_\bullet$ es una cadena de Markov.

Demostración. Observe que, por las hipótesis del teorema, para cualquier $k = 0, 1, \dots$, los conjuntos de variables aleatorias $\{W_0, W_1, \dots, W_k\}$ y $\{N_k, N_{k+1}, \dots\}$ son independientes uno del otro. En efecto, sabemos que, por hipótesis, W_0 es independiente de $\{N_0, N_1, \dots\}$. Para probar la independencia de W_1 de $\{N_1, N_2, \dots\}$, empleamos la relación (9) para ver que $W_1 = G(W_0, N_0)$, donde se desprende que W_1 es *dependiente* de N_0, pero también que *no depende* de $\{N_1, N_2, \dots\}$. Esta noción puede generalizarse fácilmente a través de un argumento inductivo y ver que, en general, los conjuntos de variables aleatorias $\{W_0, W_1, \dots, W_k\}$ y $\{N_k, N_{k+1}, \dots\}$ son independientes uno del otro.

Por lo tanto, para todo $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{k+1} \in B|W_0 = w, \ldots, W_k = w_k) &= \mathbb{P}(G(w_k, N_k) \in \\ &\quad B|W_0 = w, \ldots, W_k = w_k) \\ &= \mathbb{P}(G(w_k, N_k) \in B).\end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{k+1} \in B|W_0 = w, \ldots, W_k = w_k) &= \mathbb{P}(G(W_k, N_k) \in B|W_k = w_k) \\ &= \mathbb{P}(W_{k+1} \in B|W_k = w_k).\end{aligned}$$

Esto demuestra el resultado. □

Una aplicación del teorema 3.2 a la función $G(W_k, N_k) := W_k + \pi - N_k$ nos da que la evolución de la riqueza definida por (7)-(8) es ciertamente una cadena de Markov.

Ahora utilizaremos la cadena de Markov de la riqueza (7)-(8) para pronosticar cómo nos irá en los próximos diez períodos participando en el juego de seguros definido arriba. Fijemos el capital inicial w en dos pesos, y el valor de prima en los cinco pesos que calculamos en la sección 2. De este modo, lo único que nos hace falta es simular las reclamaciones periódicas N_k para $k = 0, 1, 2, \ldots$ Para este efecto, volveremos a echar mano de la implementación que hicimos del pseudocódigo 1 en las figuras 4-5. Para ello añadimos una columna en la que capturamos la riqueza de la compañía de seguros. Véase la figura 6.

La figura 7 es una representación gráfica de una realización de la cadena de Markov de la riqueza[7].

La realización de la cadena de Markov de la riqueza que mostramos en la figura 7 es afortunada, pues todos sus valores quedan por arriba del eje de las abscisas. Una pregunta natural (y muy importante) que uno puede hacerse es si hay alguna manera de evitar que haya algún valor por debajo de $W = 0$. A partir de (7)-(8), es evidente que existen dos maneras: el incremento en la prima mínima que debemos cobrar, y/o en el capital inicial con el que contamos. El evento de que en algún momento el capital W caiga al nivel de cero, o más abajo, se llama *ruina* (véase [3, p. 400].)

3.2 ¿Es posible evitar la ruina?

La figura 8 muestra diez caminos generados a partir de la simulación de (7)-(8) cuando $w = 2$ y $\pi = 5$ para $k = 0, 1, \ldots, 10$.

[7]Note que hemos elegido usar *trazos continuos* en la figuras 7 y 8. Sin embargo, en estricto rigor, deberíamos haber usado una gráfica de dispersión, pues hablamos de un proceso que se realiza a *tiempo discreto*. Justificamos esto porque deseamos hacer hincapié en la idea de que seguimos una *trayectoria*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n	IP(N=n)	0	0		k	aleatorio	pérdida	riqueza	2
2	0	0.166666667	0.166666667	1	promedio	1	0.578617873	4	`=+J1+$E$5-H2`	
3	1	0.138888889	0.305555556	2	5.05630119	2	0.113716576	0		
4	2	0.115740741	0.421296296	3	prima	3	0.346937348	2		
5	3	0.096450617	0.517746914	4	5	4	0.147801944	0		
6	4	0.080375514	0.598122428	5		5	0.672075468	6		
7	5	0.066979595	0.665102023	6		6	0.329828869	2		
8	6	0.055816329	0.720918353	7		7	0.637486681	5		
9	7	0.046513608	0.767431961	8		8	0.966617918	18		
10	8	0.03876134	0.806193301	9		9	0.824887743	9		
11	9	0.032301117	0.838494417	10		10	0.796626793	8		

(a) La riqueza inicial es de dos pesos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n	IP(N=n)	0	0		k	aleatorio	pérdida	riqueza	2
2	0	0.166666667	0.166666667	1	promedio	1	0.340413576	2	5	
3	1	0.138888889	0.305555556	2	4.95037511	2	0.406885929	2	`=+I2+$E$5-H3`	
4	2	0.115740741	0.421296296	3	prima	3	0.605306675	5	8	
5	3	0.096450617	0.517746914	4	5	4	0.474189935	3	10	
6	4	0.080375514	0.598122428	5		5	0.126106427	0	15	
7	5	0.066979595	0.665102023	6		6	0.490947691	3	17	
8	6	0.055816329	0.720918353	7		7	0.626684703	5	17	
9	7	0.046513608	0.767431961	8		8	0.877757504	11	11	
10	8	0.03876134	0.806193301	9		9	0.772426763	8	8	
11	9	0.032301117	0.838494417	10		10	0.19048269	1	12	

(b) Las riquezas consecutivas siempre dependen de la riqueza anterior.

Figura 6. Simulación de la cadena de Markov de la riqueza.

Figura 7. Una trayectoria de la cadena de Markov de la riqueza.

Definición 3.3. (Véase [3, cap. 13.1].) Sea $\tau := \text{mín}\{k : W_k < 0\}$ el tiempo de ruina de la cadena Markov de la riqueza definida por (7)-(8),

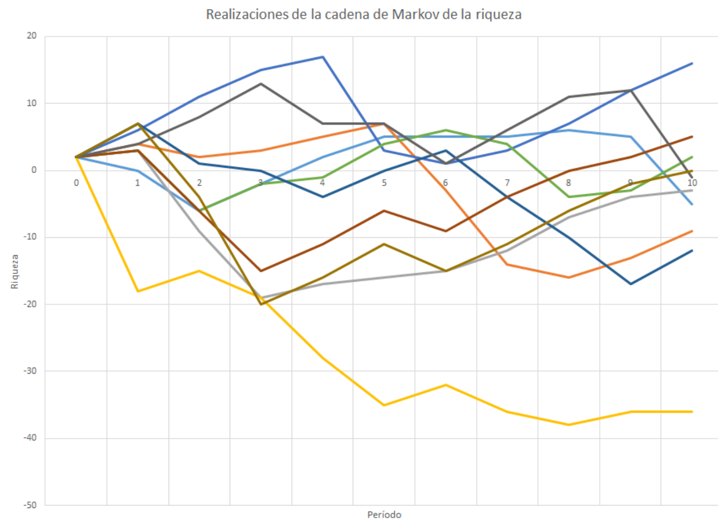

Figura 8. En nueve de las diez trayectorias simuladas, la riqueza cayó por debajo de cero en algún momento.

y $\psi(w,\pi) := \mathbb{P}(\tau < \infty)$, la probabilidad de que la ruina llegue en algún momento para la compañía de seguros.

Estamos interesados en calcular $\psi(w,\pi)$, para posteriormente, incrementar el capital inicial w y/o la prima π; de tal suerte que esta probabilidad esté en un nivel que resulte *aceptable* para la aseguradora, mientras que la prima es *justa* para el asegurado. Para lograrlo, nos restringiremos a un horizonte de solo diez períodos[8], y recurriremos a una consecuencia muy importante del teorema 2.1: el pseudocódigo 2 (véase [6, cap. 15.2] y [19, cap. 10]). Se trata de la técnica de simulación de Monte Carlo. Este un método numérico se vale de otros métodos de simulación (en nuestro caso el de la transformación inversa) para encontrar soluciones numéricas.

Nos concentraremos en el cálculo de la probabilidad de la ruina de la línea 16 del pseudocódigo 2, aunque una implementación completa requeriría las cotas provistas por el resultado completo de la línea 18. Fijamos el horizonte en $T = 10$, y usaremos una nueva hoja de cálculo, y la distribución (2)-(4) de la variable aleatoria N que mostramos en la figura 2. Recuerde que, por la figura 4, tal distribución se encuentra en el rango `$C$1:$D$106` de la hoja de cálculo que estábamos utilizando. La figura 9 representa las líneas 4, 6 y 7 del pseudocódigo 2. Note que, en la figura 9b, redujimos la implementación del pseudocódigo 1 a una sola fórmula.

[8]Estudiar el problema en horizonte infinito es un problema que actualmente se encuentra abierto, aunque hay respuestas parciales muy valiosas en [1, cap. 2], [3, cap. 13], y [20, cap. 3.3].

Pseudocódigo 2: Técnica numérica de Monte Carlo

Datos: Riqueza inicial w; prima fija que se cobra al inicio de cada período π; horizonte de tiempo T; función de distribución de las reclamaciones $\mathbb{P}(N \leq n)$ para $n = 0, 1, \ldots$, número de simulaciones, m.

Resultado: Intervalo de confianza al 95 % para el valor de la probabilidad de la ruina de la cadena de Markov de la riqueza (7)-(8), $\psi(w, \pi)$.

▷ `La función rnd() devuelve un número real al azar entre 0 y 1. Interpretamos este número como una probabilidad.`

1 $\psi \leftarrow 0$;
2 **para** $j \leftarrow 1$ **a** m **hacer**
3     $k \leftarrow 0$;
4     $W_k \leftarrow w$;
    ▷ `El ciclo siguiente simula el valor de la cadena de Markov de la riqueza (7)-(8), y termina si se alcanza el horizonte` T`, o si la riqueza de la aseguradora cae por debajo de cero.`
5   **mientras** $W_k > 0$ *y* $k \leq T$ **hacer**
6         $N_k \leftarrow P$;
        ▷ `El valor` P `que debe recibir la variable` N_k `corresponde al resultado del pseudocódigo 1.`
7         $W_k \leftarrow W_k + \pi - N_k$;
8         $k \leftarrow k + 1$;
9   **fin**
    ▷ `Cuando el ciclo de las líneas 5-9 se termina porque la riqueza cayó por debajo de cero, la variable aleatoria` *`Bernoulli`* $I(j)$ `lo indica adquiriendo un valor de 1.`
10   **si** $W_k < 0$ **entonces**
11         $I(j) \leftarrow 1$;
12   **en otro caso**
13         $I(j) \leftarrow 0$;
14   **fin**
15 **fin**
16 $\psi \leftarrow \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} I(j)$;
17 $b_M^2 \leftarrow \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (I(j) - \psi)^2$;
18 **devolver** $\left[\psi - 1.96 \frac{b_m}{\sqrt{m}}; \psi + 1.96 \frac{b_m}{\sqrt{m}}\right]$;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	¿ruina?				w =	2
2	simulación 1	=$R$1															pi =	5

(a) Capturamos el valor de la riqueza inicial w de acuerdo a (7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	¿ruina?				w =	2
2	simulación 1	2	=B2+$R$2-BUSCARV(ALEATORIO(),Hoja1!$C$1:$D$106,2,1)														pi =	5

(b) Usamos (8), y el pseudocódigo 1 para simular el valor de la riqueza en los tiempos subsecuentes.

Figura 9. Use una nueva hoja de cálculo para capturar simular las trayectorias de la cadena de Markov de la riqueza.

Para reflejar el ciclo de las líneas 2-16 (salvo por el cálculo de ψ), seleccionamos el rango `A2:L2`, y lo *arrastramos* hacia abajo un total de $m = 10,000$ veces. Véase la figura 10.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	¿ruina?				w =	2
2	simulación 1	2	-6	-5	0	4	8	1	-13	-8	-6	-2					pi =	5
3																		

(a) Una simulación de (7)-(8) para $k = 0, 1, \ldots, 10$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	¿ruina?				w =	2
2	simulación 1	2	-6	-5	0	4	8	1	-13	-8	-6	-2					pi =	5
10000	simulación 9999	2	4	2	-1	-1	2	3	6	7	10	2						
10001	simulación 10000	2	-5	-3	0	4	1	1	-1	-2	1	-12						

(b) Varias simulaciones de (7)-(8) para $k = 0, 1, \ldots, 10$

Figura 10. Notese que la figura 8 se puede obtener graficando las primeras diez simulaciones de la cadena de Markov de la riqueza (7)-(8).

Para reflejar las líneas 10-14 del pseudocódigo 2 usamos la función que calcula el mínimo en cada una de nuestras 10,000 simulaciones. Mire la figura 11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	¿ruina?				w =	2
2	simulación 1	2	-14	-13	-16	-16	-11	-18	-22	-28	-31	-30					pi =	5
3	simulación 2	2	4	7	7	-8	-4	-6	-3	-2	-5	0	1					
4	simulación 3	2	7	8	1	5	8	13	18	22	25	17	=+SI(MIN(B4:L4)<0,1,0)					
10000	simulación 9999	2	6	-6	-3	-5	-17	-19	-21	-16	-18	-13	1					
10001	simulación 10000	2	1	1	0	-8	-13	-8	-3	-8	-11	-12	1					

Figura 11. La variable aleatoria I de las líneas 11 y 13 del algortimo 2 es una Bernoulli.

Finalizamos la implementación del pseudocódigo 2 calculando ψ. Véase la figura 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	¿ruina?				w =	2
2	simulación 1	2	4	7	9	14	18	22	18	16	19	16	0	IP(ruina)			pi =	5
3	simulación 2	2	4	4	4	4	5	6	-1	0	4	5	1	=+PROMEDIO(M2:M10001)				
10000	simulación 9999	2	6	9	14	15	13	18	20	25	28	32	0					
10001	simulación 10000	2	4	0	4	9	-4	1	0	5	9	12	1					

Figura 12. El promedio de las variables aleatorias Bernoulli de la columna `M` representa la probabilidad de la ruina $\psi(2,5)$ y ronda el valor de 0.65.

Observación 3.4. Note que, aunque en la hoja de cálculo simulamos los once pasos de cada trayectoria, cuando la cadena de Markov (7)-(8) cae en estado de ruina, la hoja de cálculo muestra que la trayectoria tiene (al menos) un número negativo.

Ahora podemos usar nuestra implemementación del pseudocódigo 2 para modificar los parámetros de la riqueza inicial w, y la prima π que la aseguradora debe cobrar para lograr que la probabilidad de la ruina $\psi(w,\pi)$ sea aceptable para la compañía, mientras que la prima es justa para el asegurado. Mostramos nuestros resultados en la tabla siguiente.

w	π	$\psi(w,\pi)$
2	5	0.65
5	5	0.54
10	5	0.38
10	6	0.25
12	6	0.21
15	6	0.16
17	8	0.04
2	15	0.04

Note que, al incrementar los parámetros w y π, la probabilidad de la ruina decrece. Los casos de los últimos dos renglones resultan en probabilidades *estadísticamente* iguales que, en general se consideran **aceptables** para las compañías de seguros; mas la última fila no representa un esquema **justo** para los clientes. Efectivamente, la alternativa *contar* con un capital inicial de 17 pesos, y *cobrar* periódicamente una prima de ocho pesos al asegurado resulta mucho más **justa** que la de invertir un capital de dos pesos, mientras que se recibe una tarifa de 15 pesos a la persona. La razón es que el principio fundamental de la existencia del seguro es disminuir la variabilidad del bienestar, y cobrar un monto demasiado alto a cambio de tal beneficio viola ese principio.

4. Conclusión

Las nociones de asegurar y apostar son equivalentes desde un punto de vista estrictamente matemático. En efecto, en ambos casos modelamos un fenómeno de riesgo que deseamos mitigar. La diferencia entre ellas es perceptible cuando se las analiza filosóficamente. En efecto, mientras que una de ellas busca minimizar la variabilidad del bienestar futuro, la otra busca lo contrario. Un apostador asume voluntariamente un riesgo menor a cambio de la posibilidad de obtener una ganancia muy grande. Por otro lado, un asegurado busca transferir (al menos una parte de) un riesgo en el que esta inmiscuido. Este trabajo representa un recorrido que comienza comentando esta diferencia; y termina con una aplicación del método de la transformación inversa, y la técnica Monte Carlo para calcular la probabilidad de la ruina de la aseguradora (o del apostador). Es importante mencionar que, si en vez de usar $m = 10,000$ simulaciones, usamos otro *gran* número, obtendremos resultados numéricos aproximados a los que obtuvimos. Los problemas que tienen esta característica se llaman *robustos*. El lector interesado puede leer sobre ello en [13] y las referencias mencionadas ahí.

A lo largo del desarrollo que presentamos, hicimos uso de algunas nociones básicas de probabilidad y cadenas de Markov para cumplir el objetivo de hallar un nivel mínimo de la probabilidad de la ruina mediante el cálculo del capital inicial con que debe contar la entidad que acepta el riesgo de pagar un peso cada vez que ocurre un evento adverso, y de la tarifa que es necesario cobrar. Finalmente, exploramos las ideas de *justicia* en el cobro de primas, y de *aceptabilidad* de la probabilidad de ruina.

En este artículo analizamos el caso particular de una distribución de pérdida que supone que todos los siniestros tienen costo unitario. Un trabajo subsecuente a este puede versar sobre el uso de una distribución de pérdida más general. Por ejemplo, un modelo *compuesto* que mida por separado la *cuantía*, y la *frecuencia* de los siniestros. Este es precisamente uno de los temas estudiados en un curso estándar de teoría del riesgo en una licenciatura en actuaría.

Apéndice A. Un cálculo difererencial para una serie *casi* geométrica

Usamos este apéndice para obtener el valor de la media para la distribución referida en (1). Con este fin, partiremos de la expresión (5). Sabemos que

$$\mu \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(N = n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\Big|_{x=\frac{5}{6}} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n\right]_{x=\frac{5}{6}}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que, si n es un número entero, entonces

$$nx^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n.$$

Usando el hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (véase [2, cap. 4.5]), podemos ver que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\mathbb{P}(N=n) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right]_{x=\frac{5}{6}}.$$

Como $|x| < 1$, entonces, por [2, teo. 10.5]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Finalmente, de la relación anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\mathbb{P}(N=n) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{1-x}\right]_{x=\frac{5}{6}} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{x=\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 5.
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] F. M. Aguirre-Farías, *Pensiones... ¿y con qué?*, México: Fineo, 2012.

[2] T. M. Apostol, *Calculus*, vol. 1, Wiley, 1991.

[3] N. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. Jones y C. Nesbitt, *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries, 1997.

[4] G. Grimmett y D. Stirzaker, *Probability and random processes*, Oxford Science Publications, 1994.

[5] C. M. Grinstead y J. L. Snell, *Introduction to probability*, American Mathematical Society, 1997.

[6] D. Higham, *An introduction to financial option valuation*, Cambridge University Press, New York, USA, 2004, https://doi.org/10.1017/CBO9780511800948.

[7] P. Hoel, S. Port y C. Stone, *Introduction to probability theory*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1971.
[8] P. Hoel, S. Port y C. Stone, *Introduction to stochastic processes*, Houghton Mifflin, 1972, https://doi.org/10.1109/TSMC.1973.4309295.
[9] R. Isaac, *The pleasures of probability*, Springer-Verlag, New York, 1995, https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0819-8.
[10] S. Iyer, *Actuarial mathematics of social security pensions*, Geneva, Switzerland: International Labour Organization, 1999.
[11] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene y M. Denuit, *Modern actuarial risk theory using r*, Springer, 2008, https://doi.org/10.1007/978-3-540-70998-5.
[12] D. Lanier y D. Trotoux, «La loi des grands nombres, le théorème de De Moivre-Laplace», en *Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques*, eds. Barbin Evelyne *et al.*, Presses universitaires de Franche-Comté, BesanÃ§on, 1996, 259–294.
[13] J. López-Barrientos, H. Jasso-Fuentes y B. Escobedo-Trujillo, «Discounted robust control for Markov diffusion processes», *TOP*, vol. 23, 2015, 53–76, https://doi.org/10.1007/s11750-014-0323-2.
[14] T. Mikosch, *Non-life insurance mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
[15] D. S. Promislow, *Fundamentals of actuarial mathematics*, Wiley, 2011, https://doi.org/10.1002/9781119971528.
[16] S. Ramasubramanian, *Lectures on insurance models*, Hindustan Book Agency, 2009, https://doi.org/10.1007/978-93-86279-44-6.
[17] L. A. Rincón-Solís, *Introducción a la teoría del riesgo*, Las Prensas de Ciencias, 2011.
[18] S. Ross, *Introduction to probability models*, Academic Press, San Diego, CA, 2003, https://doi.org/10.1016/C2017-0-01324-1.
[19] ———, *Simulation*, Academic Press, 2012, https://doi.org/10.1016/C2011-0-04574-X.
[20] H. Schmidli, *Stochastic control in insurance*, Springer-Verlag, London, 2008, https://doi.org/10.1007/978-1-84800-003-2.