Miscelánea Matemática **38** (2003) 43–63 SMM

El libro I de los Elementos de Euclides en las novelas de loros

Rodrigo Cambray-Núñez
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
04510 México, D. F.
rcnroc@hotmail.com

Tout à coup, lún des auditeurs se mit à piailler, agitant les ailes, faisant un boucan dénfer. Toutes les têtes se tournèrent dún air désapprobateur. Il continua. Nofutur, troublé, sárrêta. –Denis Guedj, Le théorème du perroquet[1]

Para hacer menos arduo el estudio de las matemáticas o al menos para el mero deleite de los lectores, en ocasiones se exponen temas de esta disciplina en forma de novelas o de diálogos. Un ejemplo es *El hombre que calculaba*, novela en la que de manera agradable el autor relata las ingeniosas soluciones ofrecidas por Beremiz Samir –el personaje central de esta novela poética– a diversos problemas matemáticos (Tahan, 2002). Otro ejemplo más reciente es *La caprichosa forma de Globión*, obra de divulgación sobre la geometría elástica, en la que se presentan diálogos sostenidos por habitantes de un extraño planeta; aunque en la contraportada de esta obra se lee que prácticamente no se necesitan conocimientos matemáticos para comprender su contenido, el autor ha advertido a los lectores que su libro "no se puede leer con la rápidez con la que se lee una novela" (Illanes, 1999, p. 8).

En 1937 Rodolfo Usigli escribió la obra de teatro *El gesticulador*, pieza en tres actos dirigida a demagogos, en la que se habla de políticos

[1]De pronto, uno de los oyentes se puso a piar, agitando las alas, montando un follón infernal. Todas las cabezas se volvieron con aire de disconformidad. Él siguió. Sinfuturo, confuso, se paró. (Denis Guedj, El teorema del loro).

surgidos de la revolución mexicana de principios del siglo XX. Aunque esta obra no trata de temas matemáticos, entre otras de sus características sobresalientes está la de que es ilustrativa –si nos atenemos a sus enseñanzas– no sólo de cómo el mito remplaza a la historia sino también de las consecuencias trágicas que en ocasiones tal preferencia puede desencadenar. Se pone en escena al personaje Oliver Bolton –profesor estadounidense especializado en historia latinoamericana– quien había llegado a México para investigar el caso de César Rubio. Se describe a Rubio como un caudillo que no fue político, poseedor de un concepto total de la revolución y quien, según la trama, había desaparecido inexplicablemente en 1914. Bolton se encuentra fortuitamente con un profesor universitario mexicano, también de historia, que le relata cómo había desaparecido Rubio. Sin embargo, el investigador estadounidense no acepta ese relato porque no correspondía a lo que él creía eran el carácter y el destino de tan insigne revolucionario. Argumenta: "La historia no es una novela. Mis estudiantes quieren los hechos y la filosofía de los hechos, pagan por ello, no por un sueño, un... mito". A lo cual el historiador mexicano contesta: "Sin embargo, la historia no es más que un sueño. Los que la hicieron soñaron cosas que no se realizaron; los que la estudian sueñan con cosas pasadas; los que la enseñan (*con una sonrisa*) sueñan que poseen la verdad y que la entregan" (Usigli, 1985, p. 52); y relata (vende) entonces a Bolton "la verdad lógica" que éste desea escuchar (comprar) para sus investigaciones. Como se verá, lo anterior lleva en sí una moraleja para los relatos de las novelas que giran en torno de personajes o asuntos vinculados con la ciencia y las matemáticas.

Le théorème du perroquet es una novela, escrita por el profesor Denis Guedj, en cuya trama se intercalan narraciones de la historia de las matemáticas desde la época de Tales de Mileto (*ca.* 625-547 a. n. e.) hasta los avances más recientes. Uno de los personajes centrales en dicha trama novelesca es el señor Ruche, quien había estudiado filosofía en la Sorbona; es dueño de la librería "Las Mil y una Hojas" en Montmartre, la cual le ayuda a atender Perrette. Grosrouvre, un amigo de Ruche que había sido compañero suyo en la Sorbona (donde aquél había estudiado matemáticas), le envía como regalo desde Manaos, Brasil, todos los libros de matemáticas de su colección privada; ya en manos de Ruche, esta colección de libros es denominada "la Biblioteca de la Selva". *Le théorème du perroquet*, novela sobre la que un reseñador escribió que "se trataba, seguro, de intentar atraer a los curiosos e interesados en las nobles ciencias matemáticas" (Martínez, 2000, p. 812), ha sido ya traducida al menos a veinte idiomas, y en castellano se han hecho cinco reimpresiones –que no es lo mismo que seis ediciones, aunque la casa editorial así lo anuncie– de ella bajo el título *El teorema del loro*; así, a juzgar por estos resultados, su autor merece ser felicitado.

Algunos reseñadores de *El teorema del loro* la han comparado únicamente con *El mundo de Sofía*, novela dirigida a jóvenes en la que Jostein Gaarder presentó una historia de la filosofía (Gaarder, 1995). Además de las obras ya citadas inscritas en esta tradición (*e. g., El hombre que calculaba y La caprichosa forma de Globión*), debemos recordar que en la Antigüedad griega, durante la primera mitad del siglo IV a. n. e., un dramaturgo notable, Aristocles, había creado unos diálogos ficticios en los que el personaje central fue Sócrates, su maestro, a quien reivindicó y cuya imagen no permitió que muriera. Ciertamente, el diálogo fue uno de los recursos retóricos preferidos por Aristocles para la exposición de sus ideas. Su maestro Sócrates consideraba que el diálogo "era el único camino por el que podemos llegar a entendernos mutuamente" (López, 1999, p.14), y con ello se refería al intercambio de ideas de dos personas vivas, una frente a la otra; así, el diálogo escrito es sólo una pálida imagen de ello... Pero sucede a veces que es lo único o lo mejor que ha quedado.

Se ha comentado que en estos diálogos "la historicidad quedó totalmente supeditada al afán de presentar personajes y situaciones ilustrativos de esta <<conversión>> a una forma de vida presidida por el conocimiento y la virtud" (López, 1999, p. 23). Varios de estos diálogos incluyen temas de matemáticas; por ejemplo, en *El Menón* (Platón, 1986, pp. 17-23) se conversa sobre la solución del problema de la duplicación de un cuadrado, lo cual lleva a poner en escena a un esclavo que debe mostrar sobre qué segmento de línea recta debe construirse un cuadrado que tenga el doble de área de un cuadrado dado cuyo lado mide dos unidades. Y aunque el objetivo primordial de estos diálogos no haya sido la divulgación del conocimiento o la enseñanza amena de las matemáticas, constituyen una indicación de que no hay nada nuevo bajo el sol...

Con estos antecedentes como telón de fondo lo que sigue en este ensayo se enfoca sobre algunas cuestiones concernientes a la edición que se menciona en *El teorema del loro de los Elementos* de Euclides, lo cual inevitablemente condujo a incluir información adicional sobre esta magna obra de Euclides[2] (en notas a pie de página).

[2] Cuando Alejandro Magno (356-323 a. n. e.) murió, Egipto fue gobernado por su general Ptolomeo I Soter, quien reinó del 304 al 285 a. n. e. Ptolomeo I terminó el proyecto de Alejandro de fundar una ciudad que hasta el día de hoy se llama Alejandría. Este primer rey construyó el Museo con su Biblioteca adyacente. Otorgó es-

Vívidamente narra el profesor Guedj los enormes esfuerzos, dignos de admiración, que a sus más de 80 años realiza el señor Ruche para entender, y luego explicar a sus interlocutores, diversos detalles y conexiones del desarrollo histórico de las matemáticas; destacan también sus reflexiones filosóficas y las que provoca en otros de los personajes novelescos. Así, aunque para los expertos no sean novedosos los contenidos de los diálogos entre los personajes de esta novela, se presentan de manera natural, como hechos o consejos para quien escucha: "Hablamos de hipótesis –dice Perrette– y me gustaría considerarlas todas. Es lo que en matemáticas, si mal no recuerdo, se llama disyunción de casos. No desdeñemos ninguno" (Guedj, 2000, p. 130). Es posible, por ejemplo, que lo dicho por Perrette haga recordar al lector que en el *Parménides* de Platón (o Aristocles, que era su nombre) se dijo:

[...] debemos hacer esto otro: no sólo suponer que cada cosa es y examinar las consecuencias que se desprenden de esa hipótesis, sino también suponer que esa misma cosa no es, si quieres tener mayor entrenamiento. [...] En una palabra, a propósito de algo, se suponga que él es o que él no es o que está afectado por cualquier otra determinación, se debe examinar las consecuencias que se siguen tanto respecto de sí mismo como respecto de cada uno de los otros, el que se prefiera elegir, e igualmente respecto de una pluralidad y de todos en conjunto. Y las demás cosas, a su vez, tanto respecto de sí mismas como respecto de alguna otra, la que prefieras elegir, se suponga que eso es, o se

---

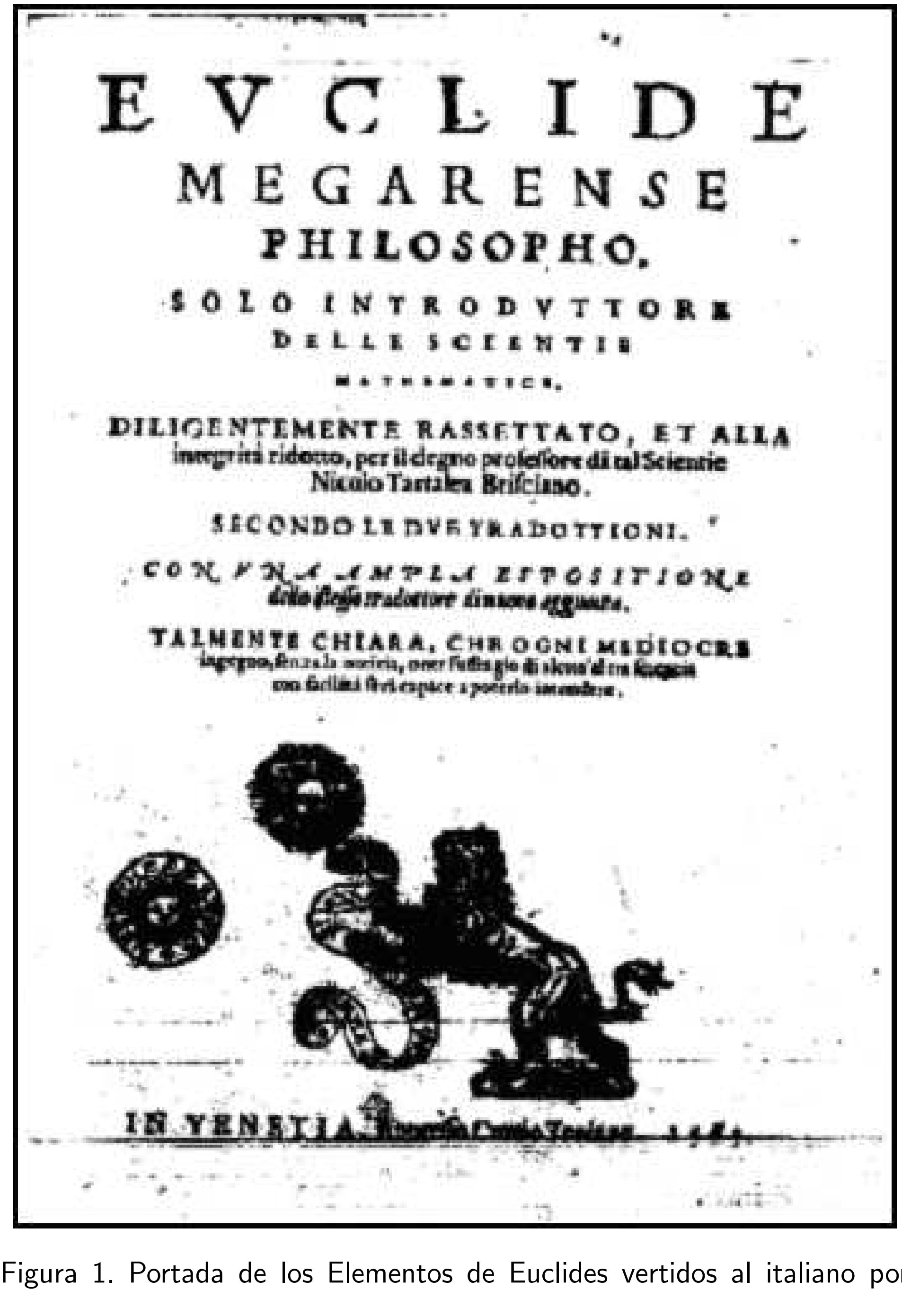
tipendios, alimentación y hospedaje a prominentes poetas, filósofos y matemáticos, entre otros intelectuales. Así, el Museo era un centro para la investigación científica apoyado por el Estado. Se cree que el famoso Euclides enseñó ahí matemáticas.

Pappus (*ca.* 300 d. n. e.) escribió que Apolonio (*ca.* 262-190 a. n. e.) había estudiado bajo la guía de los discípulos de Euclides en Alejandría (citado en Heath, 1956, p. 2); ésta es la fuente que afirma que Euclides enseñó en esa ciudad durante la época de Ptolomeo I. La mayor parte de lo que sabemos acerca de Euclides proviene de anécdotas escritas por Proclo, quien vivió aproximadamente durante los años 410-485 (véase: n. 4 más adelante). Proclo, en el prólogo a su comentario sobre el primer libro de los *Elementos* (Proclus, 1992, pp. 54-56), mencionó a doce hombres, incluyendo a Platón, que vivían juntos en la Academia, una institución para aprender, fundada por Platón después del 388 a. n. e., la cual fue cerrada para siempre en el año 529 (Clagett, 1994, pp. 32-33); enseguida mencionó a Hermotamo de Colofón y a Filipo de Mende, dos discípulos de Platón, y reportó: "No mucho tiempo después de estos hombres vino Euclides [...]. Él vivió en la época de Ptolomeo I [...]." Lo anterior implica que Euclides fue posterior a algunos pupilos de Platón y precedió a Arquímedes.

Así, prácticamente casi nada se sabe acerca de Euclides como individuo. Se propuso incluso que un grupo de eruditos habría dado autoría a sus trabajos bajo el nombre colectivo "Euclides" [véase: Jean Itard, (1962), *Les livres arithméthiques dÉuclid*, París. (Citado en Bulmer-Thomas, 1970-80, pp. 432 y 436)].

suponga que eso no es, si pretendes ejercitarte cumplidamente para discernir bien la verdad. (Platón, 2000a, pp. 53-54; P*135e-136c*).

Éste es el método de la gimnasia dialéctica, brevemente: llegar a la verdad considerando las consecuencias que se obtengan de una hipótesis así como las que provengan de la negación de dicha hipótesis. En otro diálogo platónico, *La República*, se dice:



EVCLIDE
MEGARENSE
PHILOSOPHO.
SOLO INTRODVTTORE
DELLE SCIENTIE
MATHEMATICE,
DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA
integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie
Nicolo Tartalea Brisciano.
SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
TALMENTE CHIARA, CHE OGNI MEDIOCRE
IN VENETIA

Figura 1. Portada de los Elementos de Euclides vertidos al italiano por

Nicolaus Tartalea Brixensis.

Y las restantes [artes], de las que decíamos que aprehendían algo de lo que existe, es decir, la geometría y las que le siguen, ya vemos que no hacen más que soñar con lo que existe, pero que serán incapaces de contemplarlo en vigilia mientras, valiéndose de hipótesis, dejen éstas intactas por no poder dar cuenta de ellas. En efecto, cuando el principio es lo que uno sabe y la conclusión y parte intermedia están entretejidas con lo que uno no conoce, ¿qué posibilidad existe de que una semejante concatenación llegue jamás a ser conocimiento? [...] el método dialéctico es el único que, echando abajo las hipótesis, se encamina hacia el principio mismo para pisar allí terreno firme [...]. (Platón, 2000b, pp. 441-442; *533b-d*).

Por supuesto que presentar así las cosas no convertiría a una obra literaria en un éxito de las librerías. El señor Ruche trabajó con un ejemplar de los *Elementos* de Euclides que forma parte de la colección de la Biblioteca de la Selva (véase figura 1): "La edición que tenemos en la BS [Biblioteca de la Selva] es una de las más antiguas. Es una traducción de Niccoló Tartaglia, publicada en Venecia en 1543" (Guedj, 2000, p. 157). Y páginas más adelante se hace notar precisamente que: "Recordó Ruche que el ejemplar de los *Elementos* con el que había trabajado era una traducción de Tartaglia" (Guedj, 2000, p. 290). Ruche habría explicado a sus interlocutores que el más conocido de los postulados de Euclides es el quinto y que se conoce como postulado de las paralelas, y agregaría que a la letra este postulado dice:

En un plano, por un punto exterior a una recta dada, pasa una sola paralela a esta recta. (Guedj, 2000, p. 173).

En la versión más reciente de los *Elementos* de Euclides que se tiene en castellano, aparece el siguiente enunciado del quinto postulado:

Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos. (Euclides, 1991, pp. 197-198)

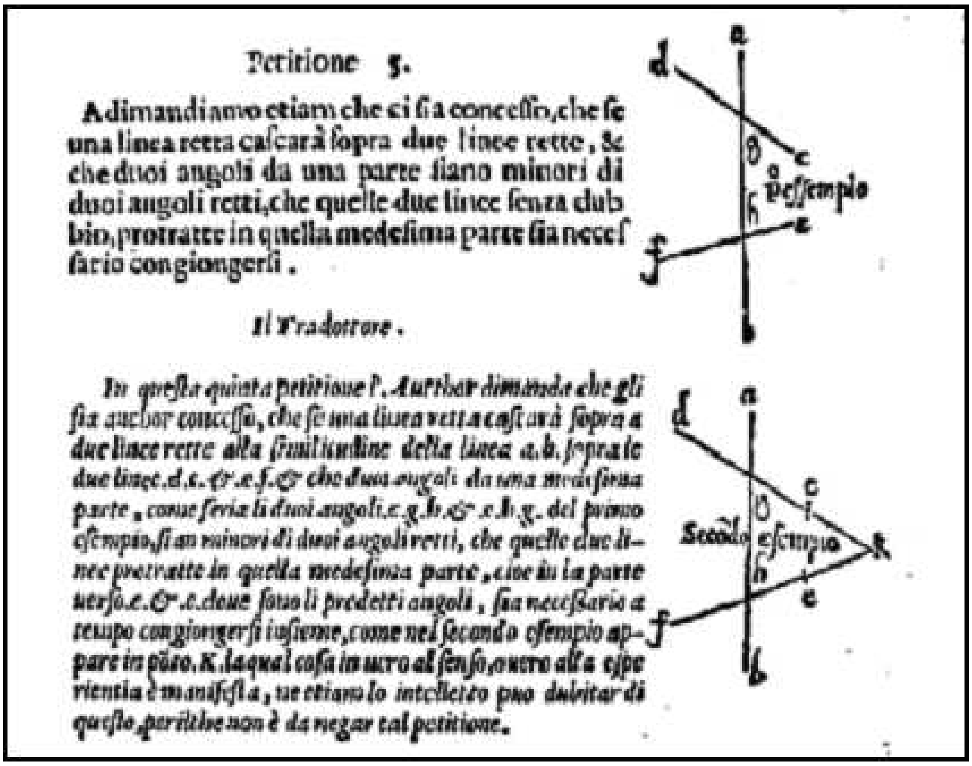
En la primera versión de los *Elementos* de Euclides impresa en italiano[3], la hecha por Tartaglia, el enunciado del quinto postulado lite-

[3]No se conoce versión de los *Elementos* de Euclides que date de la época en que originalmente fue escrita esta obra (ca. 300 a. n. e.). La mayoría de los manuscritos existentes de los *Elementos* de Euclides proceden de una edición hecha por Teón de Alejandría hacia el año 370 d. n. e. y la copia más antigua que se tiene de ella data del año 888; existe otro manuscrito del siglo X, conocido como el Vaticano Gr. 190, el cual procede de una versión anterior a la de Teón y que fue traída del Vaticano a París por Napoleón, como parte de su botín de guerra en la primera década del siglo

ralmente aparece así:

Petición 5.

Pedimos que nos sea concedido requerir, que si una línea recta incide sobre dos líneas rectas, y que dos ángulos de una parte hacen menos que dos ángulos rectos, estas dos líneas al abrirse paso indeterminadamente, prolongadas en esa misma parte necesariamente se juntan. (Euclides, 1565, f. 17 *verso*; véase figura 2).



Petitione 5.

Adimandiamo etiam che ci sia concesso, che se una linea retta cascarà sopra due linee rette, & che duoi angoli da una parte siano minori di duoi angoli retti, che quelle due linee senza dubbio, protratte in quella medesima parte sia necessario congiongersi.

Il Tradottore.

In questa quinta petitione l'Authore dimanda che gli sia anchor concesso, che se una linea retta cascarà sopra a due linee rette alla similitudine della linea a.b. sopra le due linee.d.c. & e.f. & che duoi angoli da una medesima parte, come seria li duoi angoli.c.g.h. & e.h.g. del primo essempio, siano minori di duoi angoli retti, che quelle due linee protratte in quella medesima parte, cioe in la parte verso.c. & e. doue sono li predetti angoli, sia necessario a tempo congiongersi insieme, come nel secondo essempio appare in ponto K. laqual cosa in vero al senso, ouero alla esperientia è manifesta, ne etiamo lo intelletto puo dubitar di questo, perilche non è da negar tal petitione.

Figura 2. El quinto postulado de Euclides en la versión de Tartaglia al italiano.

Respecto a la versión del quinto postulado de Euclides presentada por el señor Ruche, páginas más adelante se anotó en *El teorema del loro* que el señor Grosrouvre había escrito en la ficha correspondiente a una

XIX. Fue esta versión la que Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) cotejó con otros manuscritos para establecer su versión crítica más aproximada a la original. Esta versión griega fijada por Heiberg, la cual es considerada la definitiva, fue publicada en los 1880. (*Cf.*, Aaboe, 1964, pp. 35-37; Katz, 1993, pp. 55-56, y Vega, 1991, pp. 125-129.) Es la versión de Heiberg en la que está basada primordialmente la edición más reciente en castellano (Euclides, 1991, 1994 y 1996).

de las obras del poeta, filósofo, algebrista y astrónomo (Moreno, 2002) Omar al- Jayyam (1048?-1131?), el siguiente comentario: “su enunciado parece más el de un teorema que el de un postulado y es, además, el recíproco de un teorema” (Guedj, 2000, p. 261).

Entonces, basándonos en la versión del quinto postulado de Euclides, que de acuerdo con Ruche fue dada por Tartaglia, la cual asevera que “en un plano, por un punto exterior a una recta dada, pasa una sola paralela a esta recta”, ¿cómo se enunciaría el recíproco de esta proposición? ¿Sería algo del estilo: <<En un plano, si por un punto pasa una sola paralela a una recta dada entonces el punto es exterior a esta recta>>? Es necesario preguntar si por razones didácticas presentó Ruche esa versión como el quinto postulado de Euclides, pues aduciendo tales razones didácticas, ha sido común que en los textos modernos de geometría se presente como “el quinto postulado de Euclides” la siguiente versión, la cual es conocida como el axioma de “Playfair”, en honor a John Playfair (1748-1819):

Por un punto dado sólo se puede trazar una paralela a una línea recta dada. (Heath, 1956, p. 220)

Ahora bien, en la proposición 31 del libro I de los *Elementos* de Euclides se plantea el siguiente problema:

Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada. (Euclides, 1991, p. 241)

Es muy parecido este enunciado a la versión del quinto postulado presentada en *El teorema del loro* y que, según la trama, se adjudica en esta novela a Tartaglia; excepto que no se explicita que se esté trabajando en un plano, que el punto deba ser exterior, y mucho menos se afirma que la paralela que se tiene que trazar sea única.

Proclo comentó sobre la proposición 31 del libro I de los *Elementos* de Euclides: “Debemos asumir de antemano que el punto necesariamente está fuera de la línea recta. Pues como ha dicho [el autor de los *Elementos*] <<por un punto dado>>, no podemos colocar el punto sobre la línea recta misma porque una paralela trazada por él no será otra que la línea recta [dada]” (Proclus, 1992, p. 295)[4], e hizo notar el rasgo

[4] Proclo (*ca.* 410–485), a quien se le califica como “la última mente creativa en la filosofía griega” (Morrow, 1970, p. xlv), nació en Bizancio. La obra más importante que escribió, sus *Comentarios* al libro I de los Elementos de Euclides (Proclus, 1992), denominada por algunos autores *Catálogo de geómetras*, es considerada de valor incalculable a causa de que constituye una fuente inapreciable de información acerca del desarrollo de la geometría durante casi un milenio anterior a Proclo (Morrow, 1970, p. lii); para redactar estos comentarios, Proclo recurrió a diversas obras históricas y críticas que se han perdido (véase también n. 2 anterior). Otra

distintivo de que por un mismo punto no pueden trazarse dos paralelas a la misma línea recta dada: “es evidente [...] pues si se pueden trazar por el mismo punto dos paralelas a una línea recta, habrá paralelas que se intersecan una con la otra en el punto dado, lo cual es imposible” (Proclus, 1970, p. 377)[5]. He aquí un ejemplo de rechazo de hipótesis opuesta[6], por reducción al absurdo, basándose en la percepción senso-

---

fuente importante de información sobre la geometría griega, conservada incompleta, es la *Collectio* de Pappus de Alejandría (*ca.* s. III d. n. e.).

[5]La definición de paralelas en los *Elementos* de Euclides es la última en la lista de definiciones del libro I: “Definición 23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos” (Euclides, 1991, p. 196). Tartaglia modificó dicha lista juntando las definiciones 2 y 3 en una sola, lo mismo que las definiciones 6 y 7, y separando en dos la definición 10; pero si se le compara con la versión de Heiberg, no faltan ni sobran definiciones. Así, la definición de paralelas en la versión de Tartaglia aparece bajo el número 22:

Definición 22. Las líneas equidistantes o paralelas son aquellas que estando colocadas en una misma superficie, y que prolongadas en una y en la otra parte no concurren, así sean prolongadas al infinito. [Diffinitione 22. Le linee equidistante, ouero parallele son quelle che sono in una medesima superficie collocate, & che protratte nellúna & láltra parte non concorrano, etiam se siano protratte in infinito.] (Euclides, 1565, f. 15 *recto*).

Tartaglia incluyó el término “equidistantes” y tradujo *εις απειρον* [eis ápeiron] como apuntando hacia un lugar o como si designara una región, “al infinito”, en lugar del sentido adverbial “indefinidamente” (véase: Euclides, 1991, p. 196, n. 13).

[6]Resumiendo las conclusiones de Szabó acerca de los términos *hipótesis, definición, axioma y postulado*, se sabe que en la dialéctica y las matemáticas de la antigua Grecia una aserción que dos participantes en un debate admitían como punto de partida, *i.e.*, que asentían mutuamente, era una *hipótesis*. Es éste el significado original de la palabra *υποθεσις*, que se deriva de la preposición *υπο* y del verbo *τιθεσθαι*; esto es, colocado debajo, un fundamento para algo. Era un punto de partida imposible de demostrar; y no era necesario demostrarlo, pues lo habría propuesto uno de los participantes en el debate y el otro habría asentido (Szabó, 1967, p. 3). “La primera clase de hipótesis son las *definiciones*, que para los griegos eran circunscripciones dadas sin demostración, de los conceptos (nociones) usados en matemáticas” (Szabó, 1967, p. 4). Un *axioma* era una aserción que un participante en el diálogo requería que el otro aceptara como el punto de comienzo del debate: “*κοιναι εννοιαι* (nociones comunes) y *αξιωματα* (axiomas) son dos nombres diferentes para el mismo grupo de principios” (Szabó, 1967, p. 23). Así, la palabra griega *axioma* originalmente significaba una aserción fuerte hecha por uno de los participantes en un debate cuando no podía basar su discusión subsecuente en una *hipótesis*. Un axioma era una petición (Szabó, 1967, p. 8).

Szabó (1967, pp. 268-279) argumentó que el grupo de hipótesis bajo el encabezado de *postulados* (*αιτηματα*; en latín, *postulata*) surgió de la dialéctica, que los postulados tienen los mismos orígenes que los fundamentos generales de las matemáticas –las *υποθεσειζ ο αρχαι*– y que las definiciones matemáticas –*υποθεσειζο υ οροι* –; que *aitemata* significa “suposiciones que no eran aceptadas sin reservas (por uno de los participantes en un diálogo)” (Szabó, 1978, p. 279).

rial.

La resolución del problema de construcción planteado en la proposición 31 es breve, y se incluye a continuación; esencialmente se basa en la proposición 23 y en la 27[7]. Así que Euclides pudo haber enunciado la proposición 31 inmediatamente después de la 27 (*i. e.*, aquélla pudo haber llevado el número 28 en lugar del 31).

Sean A y BC el punto la recta dados (véase figura 3).

Tómese cualquier punto D en BC y trácese el segmento AD.

En la recta DA y en el punto A constrúyase el ángulo DAE igual al ángulo ADC (esto se puede hacer con base en la proposición 23; véase n. 7).

Sea AF la prolongación de EA en línea recta.

Así, por la proposición 27 (véase n. 7), como la recta AD al incidir sobre las dos rectas BC y EF forma los ángulos alternos EAD y ADC iguales, EF es paralela a BC.

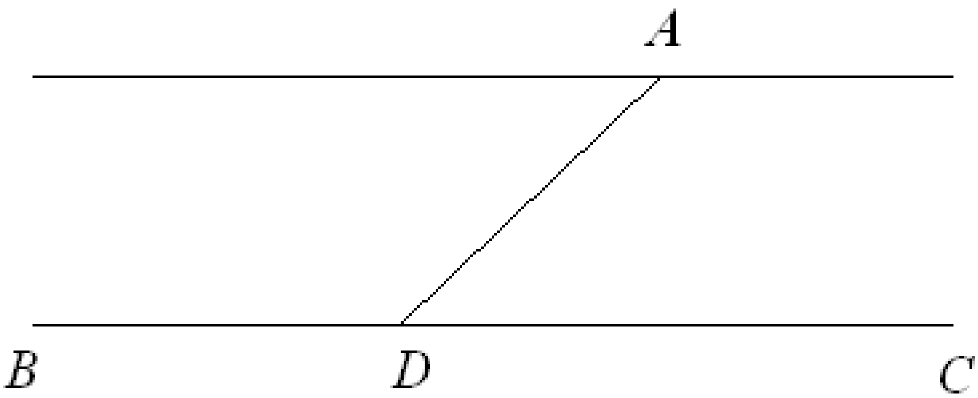


Figura 3. Diagrama de la construcción de una línea recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ésta, presentada por Euclides.

Con esta construcción Euclides mostró que al menos existe una recta paralela a una recta dada, por un punto exterior a ésta. Wussing (1998, p. 54) comentó que la existencia de a lo más una paralela queda asegurada en el quinto postulado –en su enunciado aceptado según la versión de Heiberg (Euclides, 1991, pp. 197-198), el cual se utiliza por primera vez cuando se demuestra una de las proposiciones que se en-

[7]Proposición 23: Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos. (Euclides, 1991, p. 229)

Proposición 27: Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí. (Euclides, 1991, p. 235) cuentran entre la 27 y la 31: la proposición 29–[8]. Por su parte, Heath (1956, p. 316) comentó que es posible que Euclides haya considerado que antes de presentar la construcción de una línea recta paralela, como se plantea en la proposición 31, era necesario establecer precisamente que dicha recta es única.

Por lo anterior, es relevante poner énfasis en que si al estudiar la estructura del libro I de los *Elementos de Euclides* y la ordenación de las proposiciones que lo componen, partimos de la versión del quinto postulado presentada por el personaje Ruche en *El teorema del loro*, llegaríamos al absurdo de que Euclides habría construido un sistema axiomático de la geometría bastante pobre –que no es el caso– en el que se estaría demostrando parte de lo que se ha supuesto; esto es, si el quinto postulado fuese que “En un plano, por un punto exterior a una recta dada, pasa una sola paralela a esta recta” (Guedj, 2000, p. 173) entonces la proposición 31, “Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada” (Euclides, 1991, p. 241), sería la demostración de una parte de dicho postulado.

Tomando en cuenta la cita del *Parménide* de Platón dada antes y considerando el quinto postulado, según la versión dada por Heiberg, otra posible “hipótesis” (véase n. 6 anterior), de acuerdo con el método dialéctico de investigación (o siguiendo la sugerencia de Perrette), podría ser:

Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado opuesto al que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Y habría que considerar las hipótesis de que las dos rectas prolongadas indefinidamente, con la condición de que al incidir sobre ellas una recta se formen ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos,

- se intersequen en ambos lados, o

- no se intersequen en ninguno de los dos lados.

En cuanto a la versión de Playfair, otras dos hipótesis alternativas serían:

- *Por un punto dado pasan al menos dos paralelas a una línea recta dada.*

[8]Proposición 29: La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos. (Euclides, 1991, p. 238)

- *Por un punto dado no pasa ni una sola paralela a una línea recta dada.*

Pero éstas son sólo las hipótesis alternativas que se deben considerar, siguiendo lo indicado por Platón, si pretendemos ejercitarnos "cumplidamente para discernir bien la verdad" (Platón, 2000a, p. 54; *136c*), "echando abajo las hipótesis" y encaminarnos "hacia el principio mismo para pisar allí terreno firme [...]" (Platón, 2000b, p. 442; *533d*), según cuáles consecuencias fluyeran de cada una de las hipótesis que se consideren[9]. Por otra parte, es muy verosímil imaginarse que al señor Ruche, a quien se describe en *El teorema del loro* como un filósofo fuera de lo común, le hubiese encantado reflexionar sobre estas cuestiones dialécticas, al igual que a sus interlocutores, a quienes él inicia seriamente en el estudio de los *Elementos de Euclides*.

Ahora, en cuanto a la cuestión de proposiciones recíprocas, aludida por el señor Grosrouvre (Guedj, 2000, p. 261), la proposición 17 del libro I estipula que

En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos. (Euclides, 1991, p. 222)

Se enuncia a continuación el recíproco del quinto postulado de Euclides, para compararlo con la proposición 17:

Si dos rectas sobre las que incide una recta transversal al prolongarse indefinidamente de un lado de la transversal se encuentran [por lo tanto, ¡se forma un triángulo!], *entonces los ángulos internos en dicho lado de la transversal son menores que dos (ángulos) rectos.*

Nótese entonces que la proposición 17 sí es el recíproco de la *Petitione 5* realmente presentada por Tartaglia. Será difícil que algún estudioso de los *Elementos* de Euclides (si no imposible) localice el enunciado recíproco de: "En un plano, por un punto exterior a una recta dada, pasa una sola paralela a esta recta" (*cf.*, Guedj, 2000, p. 173).

Algunos autores clasifican a las proposiciones 27 a 32 del libro I de los *Elementos* de Euclides como la parte en que se establece la teoría de las paralelas (e. g., Artman, 1999, p.17); para otros, tal teoría principia en la proposición 23 y abarca hasta la última del segundo libro, la II.14. Ahora bien, de acuerdo con la discusión que se acaba de presentar, es

[9]De acuerdo con Davis y Hersh (1995, p. 363),

Para Platón, la misión de la filosofía era descubrir conocimiento verdadero detrás del velo de la opinión y de la apariencia, del cambio y de la ilusión del mundo temporal. En esta tarea, las matemáticas tenían un lugar central, pues el conocimiento matemático constituía el ejemplo excepcional de conocimiento independiente de la experiencia sensorial: conocimiento de verdades eternas y necesarias.

menester hacer notar las siguientes relaciones entre las proposiciones 17, 28, 29 y el quinto postulado.

Sean las proposiciones

p: "Dos rectas sobre las que incide una recta transversal al prolongarse indefinidamente de un lado de la transversal forman con ésta un triángulo" y

q: "Dos rectas sobre las que incide una recta transversal forman ángulos internos de un mismo lado de la transversal menores que dos rectos".

Sus negaciones son, respectivamente,

no p: "Dos rectas sobre las que incide una recta transversal al prolongarse indefinidamente en cualquiera de los dos lados de la transversal no forman con ésta un triángulo" y

no q: "Dos rectas sobre las que incide una recta transversal forman ángulos internos de un mismo lado de la transversal iguales a dos rectos".

Así, se puede enunciar las siguientes cuatro implicaciones:

Si p entonces q: "Si dos rectas sobre las que incide una recta transversal al prolongarse indefinidamente de un lado de la transversal forman con ésta un triángulo entonces los ángulos internos en dicho lado de la transversal son menores que dos rectos" (*cf.*, Proposición 17, dada antes).

Si no q entonces no p: "Si dos rectas sobre las que incide una recta transversal forman ángulos internos de un mismo lado de la transversal iguales a dos rectos entonces al prolongarse indefinidamente en cualquiera de los dos lados de la transversal no forman con ésta un triángulo"[10].

Si q entonces p: "Si dos rectas sobre las que incide una recta transversal forman ángulos internos de un mismo lado de la transversal menores que dos rectos entonces al prolongarse indefinidamente en dicho lado de la transversal forman con ésta un triángulo" (*cf.*, quinto postulado, dado antes).

Si no p entonces no q: "Si dos rectas sobre las que incide una recta transversal al prolongarse indefinidamente en cualquiera de los dos lados de la transversal no forman con ésta un triángulo entonces for-

[10]Compárese con la Proposición 28:
Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí. (Euclides, 1991, p. 236)

man ángulos internos en un mismo lado de la transversal iguales a dos rectos" (*cf.*, proposición 29, dada en nota 8 anterior).

Lo anterior muestra que si la proposición 17, traducida a la versión de que se forma un triángulo se lee como "si p entonces q", su contrapositiva "si *no* q entonces *no* p" aparece en la 28; al leer el quinto postulado como "si q entonces p", su contrapositiva "si *no* p entonces *no* q" aparece en la proposición 29. Entonces la proposición 17 no es independiente del quinto postulado, aunque no se requiera éste para demostrar aquélla. A causa de las relaciones descritas antes, a la colección de proposiciones 17, 28, 29 y el quinto postulado se le denomina *cuadro de las paralelas* (*cf.*, Euclides, 1991, p. 239, n.50). Nótese que en la versión del quinto postulado de Euclides dada por Tartaglia, así como en la versión incluida en la traducción más reciente de los *Elementos* de Euclides al castellano, no se menciona la palabra "paralela"; en la estructura del libro I de los *Elementos* este postulado se utiliza por primera vez al demostrar la proposición 29. Sin embargo es lugar común denominar al quinto postulado "el postulado de las paralelas", en virtud de las relaciones en el cuadro de las paralelas y también porque en varias proposiciones "equivalentes" al quinto postulado, tales como el denominado axioma de "Playfair", interviene explícitamente el concepto de paralelismo.

Por otra parte, Ruche preguntó a sus interlocutores, sobre "el teorema de Pitágoras que no es de Pitágoras" (Guedj, 2000, p. 123): "¿Qué dice el teorema?" Y él mismo se respondió:

si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercero [...] *entonces ese triángulo es rectángulo* (Guedj, 2000, pp. 124-125).

En una sesión posterior, Ruche preguntó nuevamente: "¿Qué afirma el teorema de Pitágoras?" A lo cual quienes lo escuchaban contestaron:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (Guedj, 2000, pp. 138-139).

Interpretando la respuesta de Ruche de la forma "si b entonces a", la respuesta de sus interlocutores es de la forma "si a entonces b". Más adelante, Ruche informó: "El volumen I [de los *Elementos* de Euclides] no podía acabar más que con un <<imprescindible>>: está, humildemente presentado bajo el discreto epígrafe de proposición 47, ¡EL TEOREMA DE PITÁGORAS!" (Guedj, 2000, p. 160).

Leamos la proposición 47 del libro I de los *Elementos* de Euclides: *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto* [hipotenusa] *es igual a los cuadrados de los lados que compren-*

den el ángulo recto [catetos]. (Euclides, 1991, p. 260)

Figura 4. Página del registro de los Elementos de Euclides vertidos al italiano por Nicolaus Tartalea Brixensis.

Es evidente que la alusión hecha por Ruche al teorema de Pitágoras no coincide con su respuesta dada de la forma “si b entonces a”, sino con la de sus interlocutores, que es de la forma “si a entonces b”. Además, el libro I no termina con la proposición 47: la última proposición es la 48, que enuncia lo siguiente, y sí tiene la forma “si b entonces a”:

Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto. (Euclides, 1991, p. 263)

Resulta entonces que el enunciado recíproco de la proposición 47, denominada ésta comúnmente <<teorema de Pitágoras>>, también es verdadero y corresponde a la proposición 48 del libro I de los *Elementos* de Euclides, que sería denominada <<el recíproco del teorema de Pitágoras>>[11].

Un detalle más sobre los *Elementos* de Euclides: Se da por sentado que las construcciones geométricas necesarias para demostrar los teoremas y resolver los problemas planteados en los *Elementos* deben llevarse a cabo mediante un número finito de pasos en los que intervengan solamente rectas y circunferencias –también suele decirse con regla y compás, aunque en los *Elementos* no se menciona ningún instrumento de construcción–. Sin embargo, en la novela *El teorema del loro* se afirma, atendiendo a las figuras cuyas propiedades se estudien, que los dos primeros libros de los *Elementos* se ocupan de la geometría de la regla y el tercero de la geometría del compás (Guedj, 2000, p. 160). Esta descripción resulta engañosa por dos razones: primera, en la proposición 1 del libro I se plantea el problema de construir un triángulo equilátero dado un segmento de línea recta como su lado, y para ello es necesario describir dos círculos, esto es, se requiere usar el compás en la construcción de dicho triángulo equilátero; segunda, en el desarrollo histórico de los conocimientos geométricos (véase: Courant y Robbins, pp. 180-185), Mascheroni (1750-1800) descubrió que todas las construcciones posibles

[11]Heath (1956, pp. 337 y 338) informó que Heiberg había probado, a partir del descubrimiento del fragmento de un papiro, que la Proposición 40 del libro I de los *Elementos* de Euclides [Los triángulos iguales que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas] fue una interpolación hecha para que dicha proposición se relacionara con la 39 [Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas], del mismo modo que la 38 [Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí] se relaciona con la 37 [Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí] y la 36 [Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí] con la 35 [Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí]. Por su parte, Puertas (véase: Euclides, 1991, pp. 251-252, n. 57) comentó que la proposición 40 "aparece en los principales mss. [manuscritos] y en la edición de Stamatis" [E. S. Stamatis, *Euclidis Elementa*, vols. I-IV, Leipzig, 1969-1973; citado en Euclides, 1991, p. 187]. Debe agregarse que esta proposición 40 sí aparece en la versión de Tartaglia (Euclides, 1565, f. 35 *recto y verso*), la cual contiene 48 proposiciones en el libro I (la "Propositione 48", <<el recíproco del teorema de Pitágoras>>, aparece en el folio 39 *recto*).

con regla y compás se pueden hacer usando sólo el compás (*geometría del compás*)[12]; después, Jacob Steiner (1796-1863) demostró que todas las construcciones posibles con regla y compás se pueden hacer usando sólo la regla, con la condición de que inicialmente estén dados un único círculo fijo y su centro (*geometría de la regla*).

Uno de los aspectos favorables de *Le théorème du perroquet* es que nos ilustra respecto a cómo al transponer un conocimiento científico, el quinto postulado de Euclides, en otra versión, el axioma de "Playfair" –que durante décadas se ha presentado en los libros de texto de geometría como más sencilla desde el punto de vista didáctico–, se puede originar un obstáculo epistemológico: una forma de entender basada en un esquema de pensamiento y creencia incuestionable, adquirido culturalmente *de manera inconsciente*.

Se ha hecho evidente, a partir de las pocas interrelaciones sobre la estructura del libro I de los *Elementos* de Euclides presentadas en este ensayo, que si se usa el axioma de "Playfair" en lugar del verdadero quinto postulado de Euclides y a la vez se pretende presentar resultados geométricos tal y como fueron formulados originalmente por Euclides, el aprendizaje de la geometría se puede convertir en una aberración para el pensamiento. Ninguna razón de índole pedagógica podría sustentar una tergiversación tal de un sistema axiomático. Se ha mostrado que si se toma la versión original del quinto postulado de Euclides, sí es cierta la afirmación de que éste es el recíproco de un teorema dado en los mismos *Elementos*: la proposición 17 del libro I. Si se toma la versión de Playfair (que no es de Tartaglia), contrario a lo que se afirma en *El teorema del loro* (Guedj, 2000, p. 261), no existe su proposición recíproca en los *Elementos*.

Antes de terminar este ensayo, deseo expresar que es mi más sincera esperanza que el profesor Denis Guedj, al escribir la novela *El teorema del loro*, no haya tenido como uno de sus propósitos llevar a cabo con los matemáticos un experimento, aunque a pequeña escala, en cierta forma semejante al que el físico Alan Sokal realizó en 1996 con los "sociólogos" (Sokal, 1996a y 1996b).

El teorema del loro es una novela excelente que cumple con uno de los nobles objetivos de tal género literario, en el que no es tan importante o criticable falsear la realidad histórica –pero además, en este caso tampoco importó falsear la estructura de un sistema axiomático de la geometría–: la intriga. La versión en castellano de *Le théorème*

[12]En 1928 se determinó que un tal G. Mohr había hecho el mismo descubrimiento en los 1670 aproximadamente (véase: Courant y Robbins, p. 184).

du perroquet lleva el subtítulo: *Novela para aprender matemáticas*. Esta novela sí logra transmitir al lector atento el sabor de la sapiencia matemática y una idea del placer que sienten quienes llegan a entender las matemáticas. Sin embargo, aquellos que la lean motivados inicialmente por su deseo de verdaderamente aprender matemáticas, no lograrán esto sin tener que adentrarse en obras sobre la materia que no sean novelas.

Monsieur tout à vous,
Nunno Cambresis-Rodrigues

Agradecimientos

El autor de este ensayo agradece a José Luis Acosta, Rafael Martínez y Gonzalo Zubieta Badillo, así como a los árbitros asignados por el Comité Editorial de *Miscelánea Matemática*, sus comentarios a una versión previa; a Radmila Bulajich, el haber facilitado un ejemplar de la versión original en francés de *Le théorème du perroquet*, y a César Guevara, la información para localizar la versión de Tartaglia de los *Elementos* de Euclides.

Referencias

Aaboe, A. (1964), *Episodes from the early history of mathematics*, Random House, Nueva York. [Citado en J. Fauvel y J. Gray, *The history of mathematics*: A reader, MacMillan y The Open University Press, Londres, 1987.]

Artmann, B. (1999), *Euclid–The creation of mathematics*, Springer-Verlag, Nueva York.

Bulmer-Thomas, I. (1970-80), Euclid, life and works, en C. C. Gillispie (dir.), *Dictionary of scientific biography*, Charles Scribner, Nueva York, vol. 4, pp. 414-437.

Clagett, M. (1994), *Greek science in Antiquity*, Barnes&Noble, Nueva York.

Courant, R. y H. Robbins (por aparecer), *¿Qué son las matemáticas?*, Fondo de Cultura Económica, México. [Versión en castellano de la 2a ed. en inglés revisada por Ian Stewart (1996).]

Davis, P. J., R. Hersh y E. A. Marchisotto (1995), *The mathematical experience, Study edition*, Birkhäuser, Boston.

Euclides (1565), *Euclide*, [...] *solo introduttore delle scientie mathematice, diligentemente rassettato, et alla integrita ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea Brisciano* [...]. Venetia: Appresso Curtio Troiano. [2a ed. de la primera traducción impresa en una lengua vernácula (1543, 1a ed.). Trad. al italiano y notas de Niccolo Tartaglia. Gallica, bibliothèque numérique de la Bibliothèque nationale de France; 316 folios, impresos *recto-verso*. Obtenido el 20 de junio de 2002 de la Internet: http://gallica.bnf.fr]

Euclides (1991), *Elementos* (vol. 1: libros I-IV), Gredos, Madrid. [Trad. al castellano y notas de María Luisa Puertas Castaños, int. de Luis Vega.]

Euclides (1994), *Elementos* (vol. 2: libros V-IX), Gredos, Madrid. [Trad. al castellano y notas de María Luisa Puertas Castaños.]

Euclides (1996), *Elementos* (vol. 3: libros X-XIII), Gredos, Madrid. [Trad. al castellano y notas de María Luisa Puertas Castaños.]

Gaarder, J. (1995), *El mundo de Sofía. Novela sobre la historia de la filosofía*, Patria / Siruela, México.

Guedj, D. (1998), *Le théorème du perroquet*, Éditions du Seuil, París.

Guedj, D. (2000), *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*, Anagrama, Barcelona. [Quinta reimpresión: 2001. Versión en castellano de Consuelo Serra.]

Heath, T. L. (1956), Introducción y comentarios a *The thirteen books of Euclid's Elements* (vol. 1, libros I y II), Nueva York, Dover.

Illanes Mejía, A. (1999), *La caprichosa forma de Globión*, Fondo de Cultura Económica, México. [Colección "La ciencia para todos", no. 168.]

Katz, V. J. (1993), *A history of mathematics. An introduction*, Harper Collins College Publishers, Nueva York.

López Castellón, E. (1999), Introducción a Platón, *Menón*, Istmo, Madrid, pp. 7–50.

Martínez Liarte, J. H. (2000), Reseña de D. Guedj, *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*, Anagrama, Barcelona, 2000, Llull, 23 (48), pp. 812–815.

Moreno Castillo, R. (2002), *Omar Jayyam: Poeta y matemático*, Nivola, Madrid.

Morrow, G. R. (1970), Introducción a Proclus, *A commentary on the first book of Euclid's Elements*, Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey, pp. xxxix-lxvii.

Platón (1986), *Menón*, UNAM, México. [Intr., versión en castellano y notas de U. Schmidt Osmanczic.]

Platón (2000a), *Parménides*, en Platón, Diálogos (vol. 5), Gredos, Madrid, pp. 25–132. [Biblioteca Básica Gredos, no. 28.]

Platón (2000b), *La República*, Alianza Editorial, Madrid. [Versión en castellano de J. M. Pabón y M. Fernández-Galiano; int. de M. Fernández-Galiano; Colección "*El libro de bolsillo*", BT 8217.]

Proclus (1992), *A commentary on the first book of Euclid's Elements*, Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey. [1a ed., 1970; versión en inglés, prólogo, int. y notas de Glenn R. Morrow; prefacio a la ed. de 1992 de Ian Mueller.]

Sokal, A. (1996a), Transgressing the boundaries: Toward a transformative hermeneutics of quantum gravity, *Social Text 46/47*, pp. 217–252.

Sokal, A. (1996b), Transgressing the boundaries: An afterword, *Dissent 43 (4)*, pp. 93–99.

Sokal, A. y J. Bricmont (1998), *Fashionable nonsense: Postmodern intellectualsábuse of science*, Picador, Nueva York.

Szabó, Á. (1967), Greek dialectic and Euclid's axiomatics, en I. Lakatos (comp.), *Problems in the philosophy of mathematics*, North Holland Pub. Co., Holanda, pp. 1–27.

Szabó, Á. (1978), *The beginnings of Greek mathematics*, Reidel, Dordrecht / Boston.

Tahan, M. (2002), *El hombre que calculaba*, Limusa, México. [1a ed., julio de 1972, Verón/editor, Barcelona.]

Usigli, R. (1985), *El gesticulador (pieza para demagogos en tres actos)*, en R. Usigli, *El gesticulador / La mujer no hace milagros*, Editores Mexicanos Unidos, México, pp. 21-137. [Escrita en 1937; publicada en la revista *El hijo pródigo*, 1943; estrenada en el Teatro Bellas Artes de la ciudad de México, director Alfredo Gómez de la Vega, 17 de mayo de 1947.]

Vega, L. (1991), Introducción a Euclides, *Elementos* (vol. 1: libros I-IV), Gredos, Madrid, pp. 7–184.

Wussing, H. (1998), *Lecciones de historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España Editores, Madrid.