Miscelánea Matemática **69** (2019) 11-29 SMM

Sobre los hombros de Kepler

Arturo Olvera Chávez
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México
aoc@mym.iimas.unam.mx

A la memoria de mi hermano Carlos

1. Introducción

Hace más de 400 años Johannes Kepler publicó sus tres leyes sobre el movimiento de los cuerpos celestes, las cuales dicen lo siguiente:

1. *Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.*
2. *El radio vector que une a un planeta y al Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.*
3. *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.*

En este trabajo nos vamos a concentrar en la tercera de estas leyes, la cual fué publicada en 1619 [5]. En esta ley se relaciona el período de los planetas (T) con su distancia al Sol (R), esta ley se puede representar de forma sencilla en la forma T^2/R^3 igual a una constante. Lo simple de

Palabras clave: Tercera ley de Kepler, Ley de Titius-Bode.

esta relación no excluye su trascendencia en el desarrollo de la ciencia moderna, muchos autores la han considerado como un parte-aguas en la historia de la ciencia. Podemos considerar que esta tercera ley es un hito histórico que sucedió hace cuatro centurias y que se ha quedado olvidada en las página de los libros de Física donde los estudiantes de bachillerato deben aprenderla, sin embargo hay mucho más cosas que podemos descubrir en esta ley. Como iremos viendo en este trabajo, este enunciado de Kepler sigue siendo muy actual y nos ha permitido abrir nuevas visiones en el campo de la Astronomía moderna como es el caso de la búsqueda de los exoplanetas. Este trabajo pretende dar una visión de como estas ideas desarrolladas por Kepler han impactado en distintas áreas de la Mecánica Celeste y de la Física actual. En particular es interesante mostrar como al relacionar el mundo de las frecuencias con el espacio geométrico la tercera ley permite entender la Ley de Titius Bode como un primer ejemplo de un fenómeno cuántico en la naturaleza respecto a la colocación de los planetas en el sistema solar. Esta misma cuantización nos lleva a la conexión de la geometría más clásica donde los poliedros platónicos encajan en la colocación de los planetas, formando así lo que Kepler llamó la Armonía del Mundo y que abrió una ventana para escuchar *la música de Dios*.

A lo largo de este trabajo vamos a ver como han ido evolucionando estas ideas iniciadas por Kepler y como continúan siendo parte de los nuevos descubrimientos de la Astronomía actual y que día a día somos participes de ella.

2. La herencia de Copérnico y el nuevo mundo astronómico

Los siglos XVI y XVII fueron extraordinarios en la evolución del pensamiento científico, personajes como Galileo, Copérnico y Kepler transformaron el pensamiento clásico que los griegos y árabes habían desarrollado en los siglos anteriores en el cálculo de efemérides. La idea geocéntrica había tenido un éxito en el desarrollo de los cálculos de las efemérides astronómicas basados en los modelos de Ptolomeo donde daba una descripción del movimiento de los cuerpos celestes basada en círculos, epiciclos y deferentes. Tanto los griegos como los árabes habían creado verdaderas máquinas de cálculo como es el caso de los astrolabios o la Anticitera que es una computadora analógica formada por engranes que los griegos usaban para el cálculo de la posición de los planetas hacia el año 200 de nuestra era [1].

Figura 1. Reconstrucción moderna de 2007 del mecanismo de la Anticitera por Mogi Vicentini.

Esta visión del movimiento planetario había permitido calcular con mucha precisión efemérides que habían sido muy utilizadas en al astrología para la elaboración de los horóscopos pero también sirvieron para la creación de la cartografía moderna y la navegación en los mares que limitaban a la Europa de aquellas épocas. Sin embargo los viajes de Vasco da Gamma y Colón abrieron una nueva perspectiva sobre la necesidad de cálculos más precisos en la determinación de las latitudes y sobre todo de las longitudes en la navegación oceánica.

Kepler publica en 1596 un pequeño libro titulado *El secreto del Universo* donde tiene un acercamiento a la teoría heliocéntrica de Copernico. En este libro habla de los poliedros regulares y de las propiedades de estos objetos geométricos respecto a la colocación de los planetas: La idea que propuso Kepler fue inscribir los poliedros regulares en esferas donde a su vez el poliedro inscribe a una esfera, *La Tierra es un círculo que es la medida de todo. Circunscribe un dodecaedro. El círculo que circunscriba será Marte. Circunscribe a Marte un tetraedro, el círculo que comprenda a éste será Júpiter. Circunscribe a Júpiter un cubo, El Círculo que comprenda a este será Saturno. Ahora inscribe en la Tierra un icosaedro. El círculo inscrito en éste será Venus. Inscribe en Venus un octaedro. El círculo inscrito en el será Mercurio. Tienes la razón del número de los planetas.* Así describe Kepler este juego geométrico de los poliedros y esferas inscritas donde los radios de las esferas tienen las mismas proporciones que la distancia de los planetas al Sol [3]. Para mostrar este hallazgo, él mismo construye un artificio de semiesferas y poliedros donde se observa como los poliedros se van acomodando en las esfera tal como lo vemos en la figura 2 y también en la figura 3.

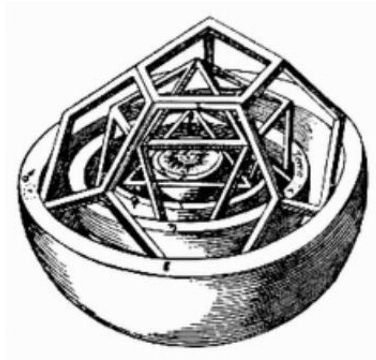

Figura 2. Cosmógrafo construido por Kepler.

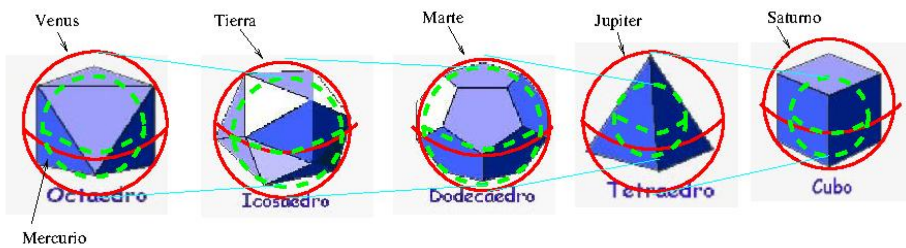

Figura 3. Orden de los poliedros platónicos y las esferas en el Cosmógrafo de Kepler.

Es claro que este juego geométrico refleja en primer lugar la teoría heliocéntrica de Copérnico en el ordenamiento de los planetas, al asignar el radio de la esfera que representa a la Tierra como 1 entonces la sucesión de radios de las esferas inscritas siguen la misma proporción de lo que más adelante se conocerá como la Ley de Titius–Bode.

Seguramente al lector se ha hecho la pregunta sobre que tan exacto es este descubrimiento de Kepler. Para darnos una idea de la precisión de estas relaciones comencemos describiendo algunas propiedades de los sólidos platónicos. Dado que todos los sólidos platónicos tienen la misma longitud en todos sus aristas, fijemos la longitud de la arista como la unidad. Designemos el radio de la esfera inscrita al poliedro como r y la esfera que circuscribe al poliedro como R, entonces tenemos las siguientes relaciones [9]:

Sólido	r	R
Cubo	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Dodecaedro	$\sqrt{250+110\sqrt{5}}/20$	$\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)/4$
Icosaedro	$\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)/12$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4$
Octaedro	$\sqrt{6}/6$	$\sqrt{2}/2$
Tetraedro	$\sqrt{6}/12$	$\sqrt{6}/4$

Ahora mostremos la razón de las órbitas de los planetas consecutivos y comparemos el radio de la esferas que forman el cosmógrafo de Kepler, es decir, tomemos la razón de los radios de las esferas inscritas r_n y de la esfera que circuscribe R_n al poliedro que esta en la posición n en el cosmógrafo, en donde el subindice n representa el orden de los poliedros tal como especificó Kepler (véase la figura 3):

Planetas	Razón de los radios de los planetas	r_n/R_n
Mercurio y Venus	0.5773	0.5277
Venus y Tierra	0.72	0.794
Tierra y Marte	0.6578	0.794
Marte y Júpiter	0.2923	0.333
Júpiter y Saturno	0.5451	0.577

Como podemos observar la concordancia de los datos es relativamente pobre para un matemático o físico del siglo XXI, pero hace cuatrocientos años esta comparación de los sólidos platónicos con la posición de los planetas resultó muy significante, en particular a Kepler le llevó a pensar que esto era la clave que conectaba el mundo exacto de la geometría con el espacio de los planetas, lo cual convergía en *la armonía de los mundos*.

3. Tycho Brahe y las tablas Rudolfinas

En 1599 Johanes Kepler es invitado por Tycho Brahe para trabajar junto con él en Praga. La razón principal de la visita de Kepler a Praga fue el tener acceso a las tablas Rudolfinas que era el mejor compendio de datos astronómicos que se había hecho hasta ese momento. Debemos aclarar que Tycho Brahe seguía las ideas geocéntricas de Ptolomeo para el cálculo de efemérides. De hecho, Brahe había incluido modificaciones muy importantes sobre la colocación de los círculos deferentes que corresponden a los planetas. En su modelo cosmológico, donde la tierra es el centro del sistema, alrededor de la Tierra orbitan la Luna y el Sol, los planetas orbitan en este modelo alrededor del Sol tal como lo vemos en la figura 4.

Es de resaltar como este modelo tiene una gran similitud al que propuso Hill a finales del siglo XIX para entender el movimiento lunar [13]. Podemos indicar que el modelo de Brahe al compararlo con el modelo de Hill, tiene coincidencia en los períodos de los planetas pero no en las distancias puesto que la tercera ley de Kepler aún no había sido enunciada. Las tablas Rudolfinas fue la mayor contribución de Brahe a la Astronomía, contiene la posición de más de mil estrellas y los elementos para el cálculo de efemérides de los planetas. Estas

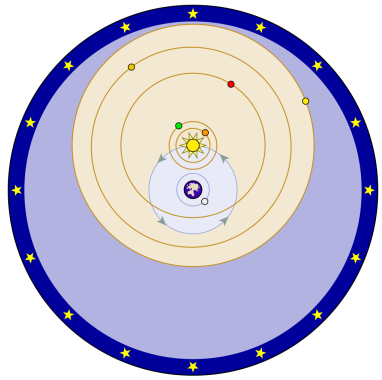

Figura 4. Modelo cosmológico de Tycho Brahe.

tablas fueron la mejor referencia para la astronomía posicional en el siglo XVIII por la precisión que se lograba tener en el cálculo de sus efemérides. Kepler trabajó junto con Brahe en la elaboración de estas tablas y a la muerte de Brahe en 1602 Kepler quedó como heredero de toda esta información [6]. Debemos aclarar que, según Koestler [7], fué el yerno de Brahe quien heredó para su publicación estas tablas y Kepler tuvo que compartir la autoría de esta publicación con él.

Uno de los trabajos que ocupó gran parte del tiempo de Kepler en su estancia en Praga fue el estudio del movimiento de Marte por sugerencia de Tycho Brahe. Aún con el modelo cosmológico de Tycho Brahe, las mediciones de la posición de Marte mantenían un error de 8 minutos de arco que no era posible explicar con dicho modelo. El movimiento de los planetas estaba referido al sol medio y aunque la excentricidad de las órbitas eran modeladas con los epiciclos, no se lograba reproducir con la exactitud necesaria las posiciones que Marte seguía en su órbita alrededor del Sol. Kepler incorporó la idea de medir la posición de Marte en función del período de este planeta alrededor del Sol. Como consecuencia de esto, pudo concluir la excentricidad del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Otro aspecto que incorporó Kepler fue el colocar al sol verdadero como fuente de la fuerza de atracción de los planetas y no al sol medio, de esta manera el Sol queda situado en uno de los focos de la elipse. Varios hechos permitieron a Kepler concluir que las órbitas de los planetas tenían que ser elipses:

- La velocidad de los planetas en su órbita no es homogénea.
- La separación de la trayectoria del planeta del círculo que inscribe la órbita mantiene una razón constante a lo largo de la órbita.
- Kepler introduce un ángulo que ahora conocemos como anomalía excéntrica que permite conectar el movimiento medio con la velocidad angular del planeta.

A partir de aplicar estas nuevas ideas él pudo analizar el área que cada planeta barre en su trayecto alrededor del Sol y así proponer su segunda ley donde los planetas barren áreas iguales en tiempo iguales. De esta manera Kepler establece los elementos necesarios que más adelante Newton utilizará para crear su teoría gravitatoria y el establecimiento de la Mecánica Moderna: Los elementos cinemáticos del movimiento de los planetas en elipses y la descripción de la dinámica al colocar el centro de fuerza en el foco de la elipse fueron fundamentales para Newton en la creación de la Mecánica Celeste que se gestaba en esos momentos [5].

4. Nace la tercera ley

En el libro titulado *La Armonía del Mundo*, Kepler ya nos da cuenta de la tercera ley la cual dice que la razón del cuadrado del período de un planeta y el cubo del semieje mayor del planeta es constante. En una segunda serie de publicaciones llamadas *Epítome astronomiae copernicanae*, las cuales aparecieron entre 1618 y 1620, Kepler discute otra vez la formulación de esta ley y además da una idea de como pudo concluir esta relación. Algo que es evidente en esta tercera ley es el conocimiento que se tenía ya en el siglo XVII sobre las distancias de los planetas al Sol, inclusive tenían una buena estimación del perihelio y el afelio de cada uno de los planetas conocidos hasta el momento. Es interesante ver como Kepler tenía un gran interés sobre las relaciones armónicas de los planetas, para ello calcula la velocidad angular diurna de cada planeta en su punto de perihelio y de afelio para así determinar la razón entre estas dos cantidades. De esta forma Kepler pudo concluir una serie de relaciones armónicas musicales lo cual le permitió asignar a cada planeta una melodía musical. Este descubrimiento debió causar en Kepler una gran emoción pues conectaba la geometría, la astronomía y la música en un solo discurso del cual lo enlazaba con una armonía divina y un lenguaje cercano a Dios: Las distancia de los planetas coincidían con los radios de las esferas que circunscriben los poliedros regulares, además la segunda ley nos indica que los planetas se mueven en órbitas elípticas y que su velocidad orbital no es constante, de ahí que Kepler haya considerado las razones de sus velocidades en los ápside de las elipses donde las razones de estas velocidades angulares dan pie a las armonías musicales de cada planeta.

En la tercera ley de Kepler descubrimos un punto de coincidencia de todos los conocimientos astronómicos relacionados con el movimiento de los planetas, pero particularmente vemos una relación virtuosa entre el espacio geométrico y el mundo de las frecuencias, esto casi doscientos años antes de que Joseph Fourier haya introducido en las matemáticas las series y transformadas que llevan su nombre.

Las tres leyes de Kepler son un compendio de toda la información obtenida durante su estancia en los observatorios de Tyco Brahe, en particular sobre el análisis cuidadoso de los datos que contenía las tablas Rudolfinas que eran el gran tesoro de Brahe y que le heredó a Kepler. Estas tres leyes pueden deducirse a partir de las leyes de la Mecánica cuando estudiamos la interacción de dos masas puntuales donde solo actúa la fuerza debida a la atracción de las masas. Newton pudo mostrar como las leyes de la Mecánica eran consistentes con los fenómenos astronómicos conocidos hasta ese momento, marcando así el nacimiento de la ciencia moderna predictiva. Sin embargo la formulación de la Mecánica no podría haberse dado sin el arduo trabajo de Kepler reflejado en sus tres leyes. Por esta razón Newton afirmaba que la creación de la Mecánica se dio gracias a que «estamos parados en hombros de Gigantes».

5. La ley de Titius Bode

Los hallazgos de Kepler pueden reconstruirse a partir de la Mecánica Analítica considerando solamente fuerzas gravitacionales, donde la atracción de los cuerpos es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias. Esto nos asegura tener órbitas cerradas y por lo tanto periódicas cuando solo consideramos interacciones binarias. Sin embargo, algunos de los descubrimientos de Kepler no son tan evidentes como para que los podamos obtener simplemente de aplicar la Mecánica. Como comentamos en las secciones anteriores, Kepler encontró que la sucesión de esferas que inscriben y a su vez circunscriben a los poliedros regulares colocados en el siguiente orden descrito en la figura 3 dan como resultado que los radios de

$$\boxed{\textit{octaedro} \rightarrow \textit{icosaedro} \rightarrow \textit{dodecaedro} \rightarrow \textit{tetraedro} \rightarrow \textit{cubo}}$$

las esferas coinciden con los radios de los planetas al asignar el radio de la Tierra como la unidad. ¿Es esto una coincidencia o refleja una relación muy profunda de la Mecánica con la Geometría? Para Kepler esta correspondencia tenia un significado muy profundo y que lo relacionaba con la armonía de los planetas, donde dichas armonías podían representarse en melodías celestiales, es decir, era una forma científica de acercarse a Dios.

En el desarrollo de la Mecánica no hubo mayor interés a este hecho geométrico, pero en 1715 David Gregory plantea en su libro *The Elements of Astronomy*, que si suponemos que la distancia de la Tierra al

Sol la dividimos en diez partes iguales entonces Mercurio estaría en la cuarta posición, Venus en la séptima, Marte en la decimosexta, Júpiter en la posición 52 y a Saturno le correspondería la posición 95. Esta secuencia de colocación de los planetas fue planteada como una sucesión por Johann Daniel Titius y Johann Elert Bode, la cual se conoce como la ley de Titius–Bode y dice lo siguiente:

La relación de los semi ejes mayores a de cada planeta a partir del Sol y considerando que el semi eje mayor de la Tierra es 10*, entonces*:

$$a_x = 4 + x \quad \text{donde } x = 0, 3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

donde, exceptuando el primer paso, cada valor es el doble del valor previo, donde la variable a_x representa la distancia de cada planeta al Sol. Dividiendo entre 10 para que las distancias queden en unidades astronómicas, tenemos entonces la siguiente ley;

$$a_n = 2^n \times 0.3 + 0.4 \quad \text{donde } n = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Esta ley predice la posición de los planetas pero en particular, para el caso $n = 3$, esta ley predeciría la posición de un planeta que no se había observado. Sin embargo en 1801 Guiseppe Piazzi descubrió un pequeño objeto que lo llamo Ceres cuya distancia al Sol es de 2.8 unidades astronómicas y que forma parte de lo que ahora conocemos como el cinturón de asteroides. La comparación de las distancias actuales de los planetas comparadas con las distancias que predice la ley de Titius–Bode son las siguientes:

Planeta	n	Distancia actual	Ley Titius-Bode
Mercurio	$-\infty$	0.387	0.4
Venus	0	0.723	0.7
Tierra	1	1.0	1.0
Marte	2	1.52	1.6
Asteroides	3	2.8	2.8
Júpiter	4	5.20	5.2
Saturno	5	9.55	10.0
Urano	6	19.2	19.6
Neptuno	7	30.1	38.8

Es claro que esta ley comienza a tener complicaciones cuando $n = 7$, es decir cuando la tratamos de aplicar a Neptuno, para el caso de Plutón el error es aún mayor. Se puede examinar con más cuidado la sucesión de las distancias de los planetas y verificar que la razón geométrica que las conecta no es constante. Si tomamos a R_n como la distancia del planeta en la posición n (siendo $n = 1$ Mercurio) entonces la sucesión,

$$r_n = \frac{R_n - R_1}{R_{n-1} - R_1}$$

nos da los siguientes valores para r_n: 1.82, 1.84, 1.86, 1.88,1.90,2.058 para $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Podemos concluir que en general, la sucesión de distancias de los planetas sigue una ley de crecimiento geométrico [12].

En 1772, Johann Elert Bode incluyó esta ley en su compendio astronómico titulado *Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels* (Manual para conocer el cielo estrellado). Tanto Titius como Bode tuvieron la esperanza de encontrar nuevos planetas siguiendo la progresión geométrica que establecía la ley que lleva su nombre, hay que recordar que en su tiempo no se conocían los planetas más allá de Saturno ni alguno de los asteroides como es el caso de Ceres. En 1781, William Herschel descubrió el planeta Urano, aunque inicialmente creyó que había observado un cometa pero fue Bode quien consideró que este objeto celeste correspondía más a un planeta y no a un cometa. Al determinar su posición se pudo verificar que la ley de Titius-Bode predecía con bastante aproximación el radio de su órbita. A pesar de la coincidencia de la posición de Urano respecto a lo que predice la ley, esta fue quedando en desuso y en cierta forma en el olvido.

6. Neptuno, el planeta predicho antes que visto

El descubrimiento de Neptuno ha sido uno de los eventos científicos más importantes del siglo XIX pues se pudo predecir su existencia antes de ser observado por un telescopio. Los dos héroes de esta hazaña científica fueron Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) y John Cauch Adams (1819-1892). La historia de su descubrimiento comienza con los primeros cálculos de las efemérides de Urano, ya en 1825 se encontró una discrepancia entre la teoría desarrollada por Laplace y los datos observacionales que eran del orden de 65 segundos hasta dos minutos de arco. Mucho se discutió sobre estas discrepancia y hubo hasta quien propuso que las leyes de la Mecánica de Newton ya no se aplicaban a esas distancias. Sir John Herschel y otros comenzaron a especular sobre la existencia de un planeta más alejado de Urano que fuera el causante de las perturbaciones de se movimiento. El primero que intentó dilucidar la existencia de este planeta fue el inglés J. C. Adams, en 1841 comenzó a trabajar en el hipotético planeta al cual le asigno una distancia inicial que correspondiera a la siguiente posición después de Urano siguiendo la ley de Titius-Bode y cuya órbita debería compartir la eclíptica de los planetas conocidos, así que le asignó una distancia de unas 38 unidades astronómicas. Analizando las perturbaciones producidas por este nuevo planeta y cambiando sucesivamente sus parámetros orbitales para obtener una mejor aproximación del comportamiento de Urano, Adams pudo determinar en 1845 la posición de Neptuno y este resultado se lo comunicó al director del Observatorio de Greenwich que era George B. Airy. Al observar que estos cálculos se habían iniciado con la ayuda de la Ley de Titius-Bode, Airy considero que no era prudente usar esta ley y le recomendó rehacer todos sus cálculos sin basarse en ella. Adams abandonó entonces este proyecto. Simultáneamente el francés J. J. Le Verrier había iniciado la búsqueda de este hipotético planeta y siguió el mismo camino que Adams. El era un astrónomo más consolidado y fue más astuto en la manera de presentar sus resultados. En noviembre de 1845, Le Verrier mostró sus resultado en la Academia de Ciencias de París donde describía la masa y los elementos orbitales del nuevo planeta. Con el apoyo del observatorio de Berlín, se pudo verificar la existencia de Neptuno en septiembre de 1845. Esté descubrimiento tuvo una repercusión en todo Europa y fue celebrado por los franceses de manera muy entusiasta pues habían superado a los británicos en la búsqueda del planeta desconocido. Airy había tratado de corregir su error y retomaron los trabajos de Adams para buscar en el observatorio de Greenwich la posición de Neptuno. Aunque Adams determinó la masa y los elementos orbitales de Neptuno antes que Le Verrier, la gloria del descubrimiento de Neptuno fue acaparada por los franceses al declarar a Le Verrier el descubridor del nuevo planeta.

No cabe duda que la ley de Titius-Bode jugó un papel fundamental en la determinación inicial de la posición de Neptuno y a su vez la tercera ley de Kepler se utilizó de manera intensiva en el estudio de las perturbaciones de Urano. Las inconsistencias en el cálculo de las efemérides de Urano estaban acompañadas de frecuencias que no se podían explicar por las perturbaciones de los planetas interiores a Urano. Al considerar que estas frecuencias tenían que ser producidas por un objeto celeste, entonces se podía inferir la posición de este objeto por el período de la órbita, el cual debía de ser responsable de estas frecuencias que se registraban al observar Urano. Es entonces importante observar como esta primera visión que tuvo Kepler al encontrar una relación que hacia corresponder períodos a posiciones, abrió los ojos de los mecánicos-celestes para considerar como una parte fundamental el estudio de las frecuencias en la nueva teoría perturbativa iniciada por Laplace, Lagrance, Euler y otros, la cual tuvo como consecuencia, en el descubrimiento de Neptuno, el mayor éxito científico a mediados del siglo XIX.

7. Las lunas también prefieren a Titius-Bode

En la medida que los astrónomos comenzaron a explorar los sistemas satelitales de los planetas mayores encontraron también un comportamiento ordenado de sus satélites, esto se puede observar tanto en Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Al igual que los planetas, los satélites de los grandes cuerpos de nuestro sistema solar siguen una ley similar a la de Titius-Bode pero con coeficientes distintos. En el artículo publicado por Neuhäuser y Feitzinger [11], nos presentan distintas fórmulas que siguen el mismo formato de la ley de Titius-Bode para los planetas mayores, así tenemos por ejemplo que la ley que ajusta a los satélites de Júpiter es

$$r_n = 0.3 + 0.28 \times 2^n,$$

para Saturno tenemos

$$r_n = 0.25 + 0.465 \times 2^n,$$

y para Urano la ley sigue esta progresión

$$r_n = 0.23 + 0.7 \times 2^n.$$

Estas formulas tienen un grado de precisión que es del 6.4 % para las lunas jovianas, 9.3 % en el sistema satelital de Saturno y un 6.4 % en el caso de Urano.

Se han intentado otros tipos de progresiones geométricas que ajusten mejor a los distintos sistemas satelitales o bien a los planetas en el sistema solar, sin embargo sigue siendo sorprendente que tanto los planetas como sus lunas sigan una colocación que cumpla una regla de progresión geométrica. ¿Porqué los cuerpos celestes de nuestro sistema solar siguen estas reglas de colocación? ¿Es posible dilucidar una explicación de este comportamiento considerando únicamente argumentos puramente mecánicos?

8. De los muchos intentos de demostración de la ley de Titius-Bode

Al cabo del tiempo se han intentado dar distintas demostraciones de esta ley, la gran mayoría invocan a la situación inicial del sistema solar donde los discos de materia, que finalmente formaron los planetas, podrían haberse ordenado bajo la ley de Titius-Bode. De este grupo de demostraciones es necesario acudir a la mecánica de fluidos, la mecánica de los cuerpos elásticos, o el uso de la termodinámica para entender lo que sucedió en un principio en la creación de los planetas en el sistema solar, por lo tanto hay mucho de especulativo de como se plantean las hipótesis de algo que sucedió hace muchos millones de años.

Con las herramientas actuales de cómputo, se han hecho experimentos de colocar inicialmente un conjunto de masas puntuales atraídas principalmente por una masa mayor, como es el caso del Sol y de esta forma dejarlas evolucionar por mucho tiempo. En este tipo de experimentos numéricos, Conway [2] muestra como eventualmente las masas distribuidas aleatoriamente terminan ordenándose bajo una distribución que sigue una progresión del tipo de Titius-Bode. Esto nos hace pensar que debe haber una razón puramente mecánica que explique esta ley y que no tenemos que recurrir a argumentos complejos sobre la formación inicial del sistema solar. Nuestra pregunta es entonces: ¿La Mecánica Celeste puede explicarnos un comportamiento de crecimiento geométrico en el sistema solar y de los satélites de los planetas? O dicho en otra forma, ¿Existen los fenómenos de cuantización en la Mecánica Clásica?

Una demostración con argumentos puramente gravitacionales fue dada por J. Llibre y C. Piñol en 1987 [8], en este trabajo se muestra un sistema puramente gravitacional representado por cuatro cuerpos que son: el centro de la galaxia, el Sol, un planeta primario y un pequeño planeta de masa insignificante. La idea es presentar un dinámica de cuatro cuerpos reducida, donde el planeta de masa insignificante no altera el movimiento de los otros tres cuerpos pero su movimiento si es modificado por la acción de los otros tres cuerpos mayores. Euler introdujo el concepto de problema reducido de tres cuerpos, donde dos de los cuerpos siguen órbitas keplerianas y el tercer cuerpo de masa insignificante es atraído por las masas primarias [10]. En este artículo se sigue una idea similar pero trabajando con tres masas primarias y una reducida (o de masa insignificante).

En [8] los autores consideran que el Sol y los planetas están colocados en un solo plano que es la eclíptica del sistema solar, el centro de la galaxia se mueve en un plano que hace una inclinación de 60° con respecto a la eclíptica del sistema solar. Se asume que el planeta primario se mueve en una órbita circular alrededor del Sol y que también el centro de la galaxia se desplaza en una órbita circular alrededor del baricentro del sistema formado por el Sol y los dos planetas, tal como se ve en la figura 5.

La idea básica de [8] es mostrar que el cuerpo reducido puede moverse en una órbita periódica. Esta órbita viene de continuar de forma analítica una órbita kepleriana circular obtenida por la interacción del Sol y el planeta reducido cuando eliminamos la interacción de la galaxia y del planeta primario. La continuación corresponde a introducir la acción de la galaxia y del planeta primario de manera analítica al tomar

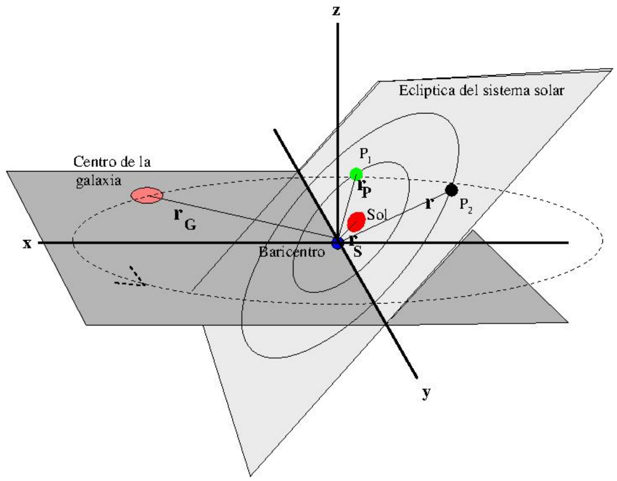

Figura 5. Descripción del sistema reducido de cuatro cuerpos.

como parámetros pequeños la interacción de la galaxia y del planeta primario. Aquí se hace la suposición de que las órbitas de la galaxia y del planeta primario son circulares. Lo que se pretende mostrar es que la órbita periódica estable más cercana que puede tener el planeta reducido, respecto al planeta primario, tiene un razón de 1/3 respecto a sus períodos y por lo tanto sus radios, por la tercera ley de Kepler, están relacionados por un factor de 2 aproximadamente, que es lo que predice la ley de Titius-Bode.

Al considerar al baricentro como el origen de nuestro sistema coordenado, los radio vectores a los cuatro cuerpos son r_i siendo $i = g, s, p$ el del centro de la galaxia, el del Sol y el del planeta primario respectivamente, r representa la posición del planeta reducido. En este trabajo la masa del Sol es $m_s = 1 - \mu$, del planeta primario es $m_p = \mu$ y de la galaxia es m_g. Haciendo la constante de gravitación igual a 1 se tiene la siguiente ecuación de movimiento del planeta reducido:

$$\ddot{r} = -(1-\mu)\frac{r - r_s}{|r - r_s|^3} - \mu\frac{r - r_p}{|r - r_p|^3} + m_g\left(\frac{r_g - r}{|r_g - r|^3} - \frac{r_g}{|r_g|^3}\right)$$

donde la dinámica de los objetos primarios (sol, planeta y galaxia) están preestablecidos como órbitas circulares.

Tal como lo indican los autores de [8], este modelo es muy cercano al modelo de Hill que propuso para describir el movimiento de la Luna al final del siglo XIX [14]. Siguiendo ideas similares al problema restringido de tres cuerpos, se cambia el sistema coordenado (sidéreo) a uno que gira con la misma velocidad que los primarios (Sol y Planeta) cuando siguen un movimiento circular y al cual lo llamaremos el sistema sinódico. De esta forma queda el Sol y el planeta primario como puntos fijos en este sistema giratorio. Las ecuaciones de movimiento toman la forma habitual del sistema coordenado sinódico, quedando así las ecuaciones de movimiento de la forma

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} = {} & x - (1-\mu)\tfrac{x-\mu}{\rho_s^3} - \mu\tfrac{x+1-\mu}{\rho_p^3} \\
& -n_g^2\left(x - 3(x\cos(W) - y\,\mathrm{sen}(W))\cos(W)\right), \\
\ddot{y} + 2\dot{x} = {} & y\left(1 - \tfrac{1-\mu}{\rho_s^3} - \tfrac{\mu}{\rho_p^3}\right) \\
& -n_g^2\left(y - 3(x\cos(W) - x\,\mathrm{sen}(W))\,\mathrm{sen}(W)\right), \\
\ddot{z} = {} & -z\left(\tfrac{1-\mu}{\rho_s^3} + \tfrac{\mu}{\rho_p^3}\right) - n_g^2 z
\end{aligned} \tag{1}$$

donde n_g y μ son parámetros pequeños (giro medio de la galaxia y la masa reducida del planeta), el ángulo $W = (1-n_g)t$ es el movimiento medio de la galaxia alrededor del baricentro. Al hacer $n_g = \mu = 0$ tenemos un problema de dos cuerpos (Sol y el planeta reducido) al cual podemos asignar una órbita circular en la eclíptica, la cual produce una familia de soluciones circulares de radio a y movimiento medio n donde por tercera ley de Kepler, $n^2a^3 = 1$. Cuando los parámetros pequeños n_g y μ dejan de ser nulos, los autores de [8] proponen que estas órbitas se pueden extender por continuación analítica (tal como Poincaré lo hizo para el problema restringido de tres cuerpos hace más de cien años [14]). En el sistema de ecuaciones (1), cuando $z = 0$, el plano correspondiente es invariante. Podemos observar que este sistema es perturbado por funciones periódicas que dependen de W cuyo período es $\frac{\pi}{1-n_g}$, entonces las órbitas periódicas de este sistema deben tener período $\frac{p\pi}{1-n_g}$ siendo p un entero. Entonces proponen que las órbitas periódicas que se pueden continuar de $n_g = \mu = 0$ tendrán período $\frac{p\pi}{q}$ con p y q enteros (la órbita debe de dar q vueltas para completar el período $p\pi$). Estas órbitas periódicas en el sistema sinódico tendrán un movimiento medio dado por $|n-1| = \frac{p\pi}{q}$, de aquí los autores proponen la siguiente proposición.

Proposición 8.1. *Para las órbitas circulares de período* $\frac{2\pi}{|n-1|} = \frac{p\pi}{q}$ *para* $n_g = \mu = 0$ *que den* q *vueltas, serán candidatas a ser continuadas como órbitas periódicas de período* $\frac{p\pi}{1-n_g}$ *en el sistema (1) para el caso* $n_g \neq 0$ *y* $\mu \neq 0$ *si satisfacen que* $0 < \frac{p-2q}{p} < 1$ *con* p *y* q *enteros positivos.*

Para estimar la estabilidad de esta familia de órbitas periódicas, en el caso no perturbado ($n_g = \mu = 0$), se calcula la matriz de monodromía y de ahí se obtienen sus valores propios, los cuales son 1, 1, e^{int}, e^{-int}, así estas órbitas periódicas serán linealmente estables si los valores propios no triviales están en el círculo unitario. En el caso no perturbado, los valores propios no triviales serán 1 y -1 si p es impar y serán 1 y 1 si p es par.

A continuación los autores pasan el sistema de ecuaciones (1), calculado sobre el plano invariante $z = 0$, a coordenadas de Poincaré $(\lambda, \eta, \Lambda, \rho)$ [14], del cual obtienen el siguiente sistema de ecuaciones (hasta una aproximación del orden μ y n_g^2),

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \Lambda^{-3} - 1 + \mathcal{O}(\mu, n_g^2), \\ \dot{\eta} &= \zeta + \mathcal{O}(\mu, n_g^2), \\ \dot{\Lambda} &= \mathcal{O}(\mu, n_g^2), \\ \dot{\rho} &= -\eta + \mathcal{O}(\mu, n_g^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Este sistema tiene soluciones periódicas para $n_g = \mu = 0$, las cuales son,

$$\begin{aligned} &\zeta(t) = \zeta_0 \cos(t) - \eta_0 \operatorname{sen}(t), \\ &\eta(t) = \zeta_0 \cos(t) + \eta_0 \operatorname{sen}(t), \\ &\lambda(t) = (\Lambda_0^3 - 1)t + \lambda_0, \\ &\Lambda(t) = \Lambda_0. \end{aligned}$$

El siguiente paso es aplicar el método de continuación, aquí se busca encontrar condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones (2) tal que la solución, al avanzar un tiempo $T = \frac{p\pi}{1-n_g}$ sea periódica, es decir, que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \zeta_T - \zeta_0 &= 0, \\ \eta_T - \eta_0 &= 0, \\ \lambda_T - \lambda_0 &= 2\pi q, \\ \Lambda_T - \Lambda_0 &= 0. \end{aligned}$$

Para aplicar el método de continuación se debe asegurar que el teorema de la función implícita en todo momento se puede aplicar, es decir, que el jacobiano de la transformación no sea singular. Como consecuencia de lo anterior se prueba el siguiente teorema:

Teorema 8.1. *Sean p y q dos enteros tal que $0 < \frac{p-2q}{p} < 1$, $q > 0$, $p > 0$, y p impar. Para valores muy pequeños de μ y n_g, si la solución de la ecuación (1) con condiciones iniciales ζ_0, η_0, λ_0 y Λ_0 para $t = 0$ satisface $\Lambda_T - \Lambda_0 = 0$ con $T = \frac{p\pi}{1-n_g}$, entonces esta solución depende analíticamente de μ y n_g, la cual es periódica con período T y se reduce a una solución circular de dos cuerpos cuando $\mu = n_g = 0$ cuyo período es $T_0 = \frac{p\pi}{q}$ donde gira q veces en el sistema rotante y su movimiento medio es $n_0 = \frac{p-2q}{p}$.*

La continuación de la órbita se realiza de forma numérica considerando valores pequeños de los parámetros del orden la continuación de $\mu = 10^{-4}$ y $|n_g| = 10^{-4}$. Para los valores de $p = 3$ y $q = 1$ se encuentran soluciones periódicas estables con período $\frac{p\pi}{1-n_g}$ y estos valores de p y q son los más pequeños posibles. Esto quiere decir que la órbita periódica del planeta reducido tiene un movimiento medio cercano a $1/3$ respecto al movimiento medio del planeta primario, el cual es 1. Aplicando la tercera ley de Kepler, la distancia del planeta reducido al Sol debe de ser cercano a $3^{2/3} \simeq 2.08$, donde debemos recordar que la distancia del planeta primario al Sol es 1. De aquí se concluye que las distancias al Sol van creciendo en una proporción de 2 tal como lo indica la ley de Titius-Bode.

Como podemos ver en este trabajo, todos los argumentos son del tipo gravitacionales, no se asume ningún otro tipo de fuerza que pueda estar actuando en el sistema. En su momento, se criticó el hecho de incluir en el modelo un punto muy masivo como es el centro de la galaxia. En los últimos años los astrónomos han apuntado que en todas las galaxias debe de existir un agujero negro, lo cual daría pie a que ese punto muy masivo en el centro de la galaxia sea precisamente el agujero negro.

9. Más allá del sistema solar

En las últimas dos décadas los astrónomos han fijado su atención en el estudio de los exoplanetas, los instrumentos astronómicos han permitido estudiar con mucho mas detalle las estrellas cercanas. La luz que emiten las estrellas tienen variaciones periódicas, las cuales son analizadas para determinar con la mayor precisión posible los períodos de estas. El hecho que las estrellas tengan estas variaciones periódicas en su emisión tiene que ver con el paso de los planetas que giran alrededor de estas estrellas, al pasar estos planetas frente a la estrella reduce muy tenuemente la intensidad de la luz emitida por la estrella. Las series de tiempo de las observaciones de dichas estrellas son procesados con algoritmos potentes que determinan con mucha exactitud la frecuencia de estas reducciones de la luz que recibimos de la estrella. La tercera ley de Kepler juega entonces un papel muy importante pues permite calcular la distancia de estos planetas a la estrella que los atrae. De esta forma se han descubierto una gran cantidad de sistemas planetarios extra-solares.

Con toda la información que se ha ido recolectando sobre los planetas, varios investigadores han retomado la ley de Titius-Bode para verificar si más allá del sistema solar es aplicable esta ley. El telescopio espacial Kepler, lanzado en 2009, ha ayudado a descubrir alrededor de un millar de exoplanetas al estudiar 440 sistemas estelares. Con la información obtenida de las observaciones del telescopio Kepler, C. Huang y G.

Bakos [4] pusieron a prueba la ley de Titius-Bode en los sistemas extrasolares descubiertos. Ellos usaron una extensión de la ley de Titius-Bode (BL13) que relaciona los períodos de los planetas de una estrella de la siguiente forma,

$$\log(P_n) = \log(P_0) + n\log(\alpha) \tag{3}$$

donde α es un parámetro que se ajusta y $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Con esta versión BL13 se pudieron hacer 141 predicciones de nuevos exoplanetas pero sólo se pudieron verificar la existencia de 5 de ellos. Como lo indican los autores de este trabajo, hay muchas razones por las cuales no se podrían encontrar estos nuevos planetas, ya sea porque su tamaño es muy pequeño o porque la inclinación de su órbita no nos permite observar el tránsito de estos planetas sobre el disco de su estrella, cabe recordar que el tránsito de Venus sobre el disco solar sucede aproximadamente una vez cada siglo, siendo que la Tierra y Venus están en conjunción cada 585 días.

A pesar que estos intentos por mostrar si los exoplanetas siguen una progresión geométrica en su colocación en la estrella que orbitan es aún muy incipiente, es muy posible que en la medida que los telescopios aumenten su capacidad de observación y los métodos de análisis de series de tiempo sean aún más precisos, podamos entonces verificar qué leyes del tipo Titius-Bode darían una predicción adecuada sobre la colocación de estos objetos celestes al gravitar alrededor de la estrella que los atrae.

10. Kepler a 400 años y más

En este artículo he intentado mostrar como el trabajo de Kepler sigue siendo útil en el estudio de la dinámica de los cuerpos celestes, la tercera ley es ampliamente utilizada en el descubrimiento de nuevos planetas en estrellas lejanas y la colocación de estos objetos en progresión geométrica seguramente va a ser confirmada en la medida que podamos realizar observaciones más detalladas de nuestra bóveda celeste.

La brillantez de los resultados de Kepler fueron esenciales para que grandes pensadores pudieran estructurar las nuevas teorías matemáticas que dieron forma a la Mecánica Celeste a través de los siglos. Actualmente sería impensable entender el mundo actual sin toda la ciencia y tecnología que nos permite realizar nuestras actividades día con día, la telefonía moderna, los sistemas de posicionamiento global que permiten la navegación por cielo, mar y tierra de la transportación de individuos y mercancías, los sistemas satelitales que permiten hacer predicciones cada vez más exactas del clima y de los riesgo geológicos, etc, Todo esto nos lleva a concluir que sin los trabajos de Kepler nada de esto hubiera sido posible, pero que mucho de los nuevos descubrimientos en la observación de los objetos celestes los vamos a poder interpretar correctamente gracias a que contamos con los conocimientos que Kepler nos aportó hace más de cuatro siglos, así, como decía Newton, seguiremos avanzando en la ciencias gracias a que seguiremos parados en los hombros de gigantes, en los hombros de Johannes Kepler.

Bibliografía

[1] F. Charette, «High tech from ancient greece», 2006, Mecanismo de Anticitera, Wikipedia https://es.wikipedia.org/wiki/Mecanismo_de_Anticitera, 7119.

[2] B. Conway y R. E. Zelenka, «Dynamical Evolution of Planetary Systems and the Significance of Bode's Law», en *Long Term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems*, ed. A. Roy, Kluwer Academic Publishers, 1988.

[3] J. L. García H., *La rebelión de los astrónomos: Copérnico y Kepler*, Nivola, Libros Ediciones, 2000, Cientificos para la Historia.

[4] C. Huang y G. Bakos, «Testing the Titius-Bode law predictions for Kepler multiplanet systems», *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 442, núm. 1, 2014, 674–681.

[5] J. Kepler, *The harmony of the world*, American Philosophical Society, 1997.

[6] A. Koestler, *The watershed, A Bibliography of Johannes Kepler*, Science Study Serie, Anchor Books; Doubleday & Company, Inc. Garden City, N.Y., 1960.

[7] ———, *Los Sonambulos*, Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Dirección General de Publicaciones, 2007.

[8] J. Llibre y C. Piñol, «A gravitational approach to the Titius-Bode law», *The Astronomical Journal*, vol. 93, núm. 5, 1987, 1271–1279.

[9] W. MathWorld, «Platonic solid», https://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html.

[10] G. K. Mikhailov y S. Y. Stepanov, «Leonhard Euler and his contribution to the development of Mechanics (On the 300th anniversary of his birth)», *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 71, 2007, 157–167.

[11] R. Neuhäuser y J. V. Feitzinger, «A generlized distance formula for planetary and satellite systems», *Astron. Astrophys.*, vol. 170, 1986, 174–178.

[12] R. Parés, *Distancias Planetarias y Ley de Titius-Bode, Ensayo histórico*, Barcelona, 2016, http://media.wix.com/ugd/61b5e4_d5cf415763b44680806a8431ba375db2.pdf.

[13] D. S. Schmidt, «The lunar theory of Hill and Brown», *Celestial Mechanics*, vol. 21, Feb. 1980, 163–169, Conference on *Mathematical Methods in Celestial Mechanics*, 6th, Oberwolfach, West Germany, Aug., 14-19, 1978.

[14] V. Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic, New York, 1967.