Miscelánea Matemática **44** (2007) 69–80 SMM

Pintar el octaedro

Christopher M. Kribs Zaleta
Departamento de Matemáticas
University of Texas at Arlington
P.O. Box 19408, Arlington
TX 76019 USA
kribs@uta.edu

1. Introducción

Existen dos configuraciones uniformes de poliedros regulares que teselan el espacio tridimensional. El primero consiste simplemente en un enrejado de cubos, con ocho cubos alrededor de cada vértice (cuatro arriba y cuatro abajo). El otro, un poco más complicado, tiene seis octaedros y ocho tetraedros alrededor de cada vértice (ver la figura 1). También se puede describir esta segunda configuración al observar que cada octaedro tiene un tetraedro pegado a cada una de sus caras, y vice versa, o que dos tetraedros y dos octaedros alternan alrededor de cada arista.

También se pueden generar poliedros regulares grandes usando poliedros unitarios (i.e., con aristas de longitud 1), por medio de estos dos enrejados. Se forma un cubo con aristas de longitud n usando n^3 cubos unitarios, agrupados en n camas de n por n cuadrados. El octaedro es el dual del cubo, y un octaedro con aristas de longitud n también se puede construir de la configuración de tetraedros y octaedros unitarios. Sin embargo, la cuestión de cuántos poliedros se necesitan es más complicada, y éste será el enfoque de la presente investigación. (También se puede formar un tetraedro con aristas de longitud n; ver [3].)

Una variación del problema de contar cubos unitarios, llamada "Pintar el Cubo" [1, 4, 5], se usa en algunos cursos de secundaria y preparatoria para destacar ya sea las conexiones entre las aristas, caras e interiores de un cubo, o bien las expresiones para perímetro, área y volumen.

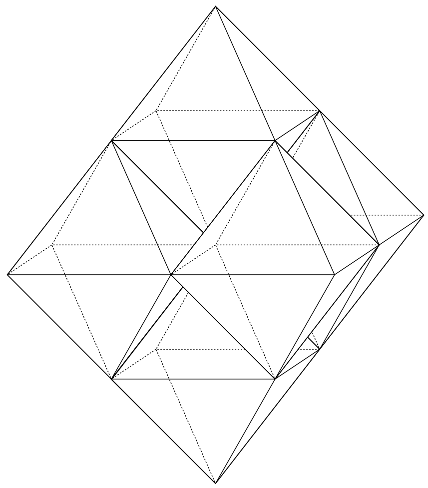


Figura 1: Un octaedro con aristas de longitud 2, compuesto de seis octaedros unitarios y ocho tetraedros unitarios alrededor de un solo vértice.

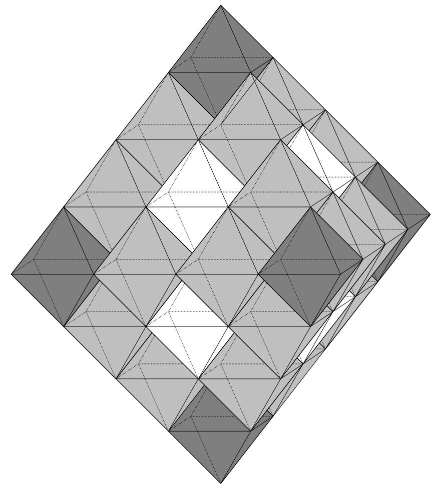
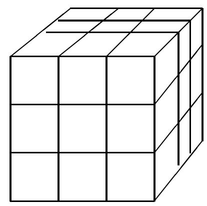


Figura 2: Un octaedro con aristas de longitud 4 compuesto de octaedros unitarios de tonalidad oscura si se ubican en los vértices, clara si se ubican en el interior de las aristas, y blanca en los centros de las caras del octaedro grande.

En esta variación, se supone que las caras del cubo compuesto se pintan, y después se clasifican y se cuentan los cubos unitarios por el número de caras pintadas: 3 caras en los cubos que comparten un vértice del cubo compuesto, 2 caras para cubos que comparten una arista, 1 cara pintada en los cubos en los interiores de las caras del cubo grande, y 0 caras pintada para cubos del interior del cubo grande. Las cantidades de cada clase de cubos unitarios reflejan las dimensiones de los elementos del cubo grande en el exponente de la longitud n de las aristas del cubo compuesto (por ejemplo, la expresión que da el número de cubos unitarios con 1 cara pintada incluye n^2, porque las caras son de dimensión 2), mientras que los coeficientes dan el número de cada elemento en el cubo (por ejemplo, el cubo tiene 6 caras, así que el coeficiente en el número de cubos unitarios con 1 cara pintada es 6). Ver la figura 3.

Esta variación en el problema de contar cubos también se puede usar para destacar patrones en el octaedro compuesto (ver la figura 2), incluyendo ilustraciones de números triangulares, tetraedrales y octaedrales, además de los efectos de quitarle la capa exterior a un poliedro con caras triangulares (en los cuadrados y los cubos se reduce la longitud de las aristas por 2, pero no es así con los símplices). Entonces contaremos separadamente los números de octaedros y tetraedros unitarios en el octaedro compuesto con diferentes números de caras pintadas.



Número de cubos unitarios con pintura en...

longitud de aristas	0 caras	1 caras	2 caras	3 caras	TOTAL
elemento	interior (3-D)	cara (2-D)	arista (1-D)	vértice (0-D)	
1					1
2				8	8
3	1	6	12	8	27
4	8	24	24	8	64
n	$(n-2)^3$	$6(n-2)^2$	$12(n-2)$	8	n^3

Figura 3: Un cubo de medidas $3 \times 3 \times 3$ y datos recolectados para el problema "Pintar el cubo".

2. Contar poliedros unitarios

Es más fácil observar y explicar los patrones que surgen en el octaedro compuesto construyéndolo con modelos. El octaedro unitario mismo es el caso trivial $n = 1$, en que el único poliedro está pintado en todas sus ocho caras. El caso $n = 2$ requiere rodear completamente un solo punto de vértice (ver la figura 1), con tetraedros unitarios llenando los huecos entre octaedros unitarios. (Los casos $n = 3$ y $n = 4$ se ilustran en las figuras 4 y 2.) De esta manera podemos recolectar datos para los primeros casos (ver las tablas 1 y 2), y observar que los únicos poliedros unitarios con más que dos caras pintadas (con $n > 1$) son los seis octaedros unitarios colocados en los vértices del octaedro compuesto, cada uno de los cuales tiene cuatro caras pintadas, porque cuatro de sus caras se encuentran en cada vértice de un octaedro. Los únicos poliedros unitarios con dos caras pintadas son los octaedros unitarios colocados en las aristas del octaedro grande (hay tetraedros unitarios con un vértice en una arista, pero ninguno tiene dos caras en el exterior del octaedro). Excluyendo los octaedros en los vértices, hay $n-2$ octaedros unitarios en cada arista, y con doce aristas tenemos un total de $12(n-2)$ octaedros unitarios. Ver la figura 2 para una ilustración.

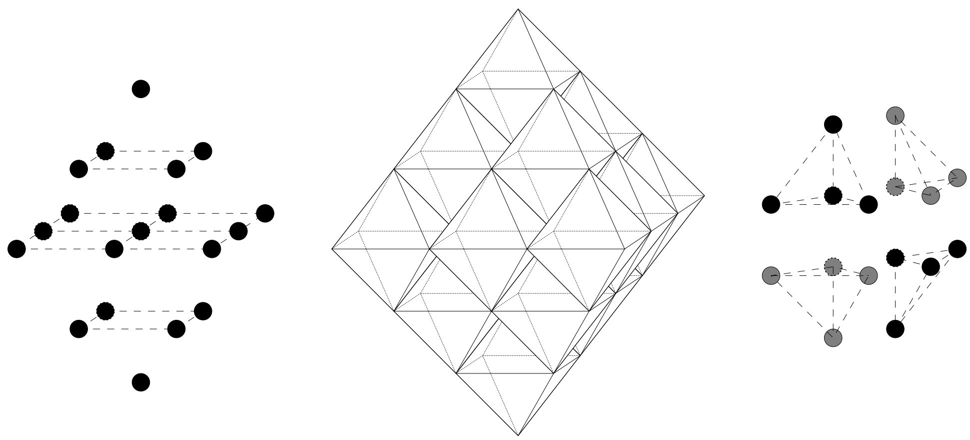


Figura 4: *Al centro:* Un octaedro con aristas de longitud 3; *a la izquierda:* la configuración de octaedros unitarios dentro de él; *a la derecha:* la configuración de tetraedros unitarios en los cuatro octantes anteriores.

Los octaedros y tetraedros unitarios con pintura en una sola cara se encuentran en el interior de las ocho caras del octaedro compuesto, sin tocar sus vértices y aristas. Los octaedros unitarios en cada cara del octaedro grande se agrupan en una configuración triangular, con n renglones (ver, por ejemplo, las figuras 2 y 4); al quitar los tres renglones exteriores (aristas), que corresponden a octaedros unitarios con dos o tres caras pintadas, tenemos una *configuración triangular* con $n-3$ renglones (ver la figura 5). Contamos el número de octaedros unitarios en esta configuración con t_k, el k-ésimo *número triangular*, lo cual se puede calcular al recordar que la suma de los primeros k números naturales es $k(k+1)/2$ (si no la conoces, vale la pena buscar la famosa historia de la demostración de esta fórmula para t_{100} hecha por Karl Friedrich Gauss cuando era niño). Así, el número de octaedros unitarios en el interior de cada cara del octaedro grande es t_{n-3}, el $(n-3)$-ésimo número triangular: $(n-3)(n-2)/2$. Como el octaedro tiene ocho caras, el número total de octaedros unitarios con una cara pintada es entonces $8t_{n-3} = 4(n-3)(n-2)$. Asimismo, los tetraedros unitarios en cada cara del octaedro grande también están agrupados en una configuración triangular, con $n-1$ renglones, así que hay $t_{n-1} = (n-1)n/2$ de ellos, para un total de $8t_{n-1} = 4(n-1)n$.

Número de octaedros unitarios con pintura en...

longitud de aristas	0 caras	1 caras	2 caras	4 caras	TOTAL
1					1
2				6	6
3	1		12	6	19
4	6	8	24	6	44
5	19	24	36	6	85
n	$\frac{(n-2)}{3}*$ $(2(n-2)^2+1)$	$4(n-3)*$ $(n-2)$	$12*$ $(n-2)$	6	$\frac{n}{3}(2n^2+1)$

Tabla 1: Números de octaedros unitarios en un octaedro grande

Los octaedros y tetraedros unitarios no pintados se encuentran en el interior del octaedro grande. Los octaedros unitarios están agrupados en una *configuración octaedral* (ver la figura 4): un enrejado tridimensional cuyas camas consisten en elementos colocados en un cuadrado—las camas superiores e inferiores constan de un solo elemento, las camas siguientes (hacia el centro) forman un cuadrado de dos por dos, las siguientes un cuadrado de tres por tres, y así sucesivamente, hasta la cama central en la n-ésima configuración octaedral que es un cuadrado de n por n. El número de elementos en la n-ésima configuración octaedral se llama el n-ésimo *número octaedral* O_n, y se puede calcular como la suma de los primeros n números cuadrados (desde la cama superior hasta la cama central) más la suma de los primeros $n-1$ números cuadrados (desde la cama inferior hasta la cama abajo de la cama central). La suma de los primeros n números cuadrados (también llamado el n-ésimo número piramidal) está dada por $n(n+1)(2n+1)/6$ (se puede derivar, por ejemplo, usando sumas telescópicas; uno se debe convencer de que esta expresión siempre da números enteros), así que el n-ésimo número octaedral es

$$O_n = n(n+1)(2n+1)/6 \,+\, (n-1)n(2n-1)/6 = n(2n^2+1)/3.$$

El número total de octaedros unitarios necesarios para el octaedro grande es O_n, mientras que para contar los no pintados excluimos los renglones exteriores de cada cama y nos quedamos entonces con $O_{n-2} = (n-2)[2(n-2)^2+1]/3$.

La manera en que encajan los octaedros y tetraedros unitarios nos permite subdividir el octaedro grande en octantes congruentes por sus aristas sin cortar ningún tetraedro unitario (sólo octaedros unitarios, ver la figura 6). Cada uno de estos octantes se puede considerar como un gran tetraedro no regular, o sea, que sólo tiene una cara equilátera (la que también es una cara del gran octaedro) y más grande que las demás, que son triángulos rectángulos isósceles. Adentro de cada tetraedro grande u octante, los tetraedros unitarios están agrupados en una *configuración tetraedral* orientada hacia el centro del gran octaedro (ver la figura 4): un enrejado tridimensional cuyas camas consisten en tetraedros colocados en un triángulo. La cama superior de la k-ésima configuración tetraedral consta de un solo elemento, la segunda cama de tres elementos (la segunda configuración triangular), la tercera cama de seis elementos (la tercera configuración triangular), y así sucesivamente. La cama inferior consta de los tetraedros unitarios que tienen cada uno una cara visible en la superficie del octaedro grande; para el octaedro con aristas de longitud n, esta cama es la $(n-1)$-ésima configuración triangular. El número de tetraedros unitarios en cada octante se da entonces por el $(n-1)$-ésimo *número tetraedral*, donde el k-ésimo número tetraedral T_k se calcula al sumar los primeros k números triangulares, $T_k = \sum_{j=1}^{k} t_j$. Esta suma se puede calcular por medio de varios métodos combinatorios [2] y es $k(k+1)(k+2)/6$. El número de tetraedros unitarios no pintados en cada octante es T_{n-2} porque excluye la $(n-1)$-ésima configuración triangular mencionada arriba. Entonces, finalmente, el número total de tetraedros unitarios necesarios para el octaedro con aristas de longitud n es $8T_{n-1} = 8(n-1)n(n+1)/6$, mientras el número total de tetraedros unitarios no pintados necesarios para el octaedro grande es $8T_{n-2} = 8(n-2)(n-1)n/6$.

	Número de tetraedros unitarios con pintura en...		
longitud de arista	0 caras	1 cara	TOTAL
1			0
2		8	8
3	8	24	32
4	32	48	80
5	80	80	160
n	$\frac{4}{3}(n-2)(n-1)n$	$4(n-1)n$	$\frac{4}{3}(n-1)n(n+1)$

Tabla 2: Números de tetraedros unitarios en un octaedro grande

3. La superficie y el volumen

También podemos verificar que las distintas fórmulas derivadas en la sección anterior son consistentes con los principios de conservación de la superficie y el volumen. Cada cara de un octaedro con aristas de longitud n contiene n^2 triángulos equiláteros unitarios, así que el área total (de superficie) debe ser $8n^2$ triángulos unitarios. Si sumamos los números de caras pintadas, digamos $f_i(n)$ octaedros unitarios con i caras pintadas y $g_i(n)$ tetraedros unitarios, encontramos que:

$$1\,f_1(n)+2\,f_2(n)+4\,f_4(n)+1\,g_1(n) = 1[4(n-3)(n-2)]+2[12(n-2)]+4[6]+ \\ +1[4(n-1)n] = 8n^2.$$

Si volvemos al caso $n = 2$ ilustrado en la figura 1, podemos relacionar fácilmente los volúmenes de tetraedros y octaedros unitarios. Como en el octaedro grande cada arista tiene el doble del tamaño que en un octaedro unitario, su volumen debe ser 2^3, u 8, veces el volumen de un octaedro unitario (lo cual podemos nombrar V_O). El volumen

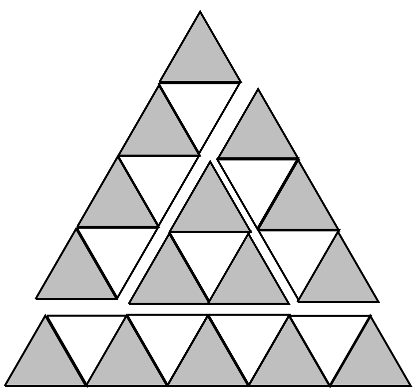


Figura 5: Cada cara del octaedro con aristas de longitud n se puede descomponer en n^2 triángulos equiláteros unitarios (los de tonalidad oscura corresponden a octaedros unitarios, y los blancos a tetraedros unitarios); al quitar los (tres) renglones exteriores, se quedan $(n-3)^2$ triángulos unitarios, de los cuales t_{n-3} corresponden a octaedros unitarios.

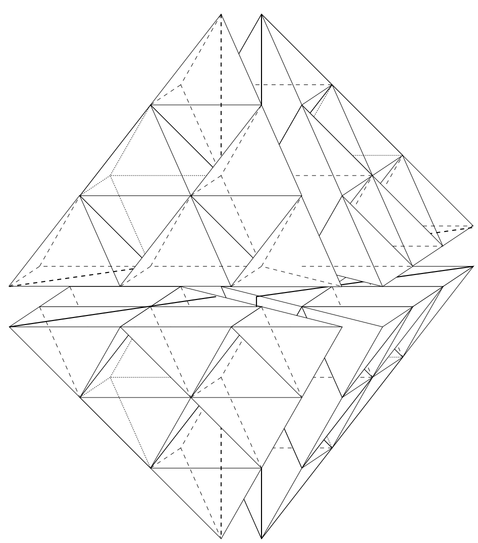


Figura 6: Un octaedro con aristas de longitud tres, partido en octantes por las aristas (cf. la figura 4)

V_T de un tetraedro unitario se puede escribir entonces al poner el volumen del octaedro más grande en términos de octaedros y tetraedros unitarios: $8V_O = 6V_O + 8V_T$, así que $V_T = \frac{1}{4}V_O$. Con este dato podemos sustituir las fórmulas dadas en las tablas 1 y 2 en la ecuación de conservación de volumen. Al sumar los volúmenes totales de octaedros y tetraedros unitarios en el octaedro con aristas de longitud n tenemos:

$$\frac{n}{3}(2n^2+1)\ V_O+\frac{4}{3}(n-1)n(n+1)\ V_T = \frac{n}{3}(2n^2+1)\ V_O+\frac{4}{3}(n-1)n(n+1)\ \frac{1}{4}V_O =$$

$$= (3n^3)\frac{V_O}{3} = n^3V_O,$$

lo cual es el volumen del octaedro grande.

Una extensión relacionada de "Pintar el Cubo" pregunta: Dado un cubo con aristas de longitud n compuesto de cubos unitarios, ¿es posible pintar las caras de los cubos unitarios con n colores distintos de tal manera que entonces existan n maneras distintas de reagruparlos, en una de las cuales sólo se ve el primer color, en otra de las cuales sólo se ve el segundo color, etc.? Antes de buscar una configuración específica de cubos, caras y colores que cumple con estas condiciones (resulta que existe una solución elegante), uno podría verificar primero que hay suficientes caras para que sea teóricamente posible (i.e., si caras individuales no fueran necesariamente asociadas con cubos unitarios específicos). Las cantidades relevantes aquí son el número de caras unitarias expuestas en cualquier configuración (o sea, el área de superficie del cubo compuesto), el número total de caras unitarias disponible (o sea, el volumen del cubo compuesto multiplicado por el número de caras en cada cubo unitario), y el número deseado de configuraciones (n). En este caso las cuentas salen a perfección: el número total de caras unitarias disponibles es entonces 6 por n^3, el número de caras unitarias necesarias por configuración es $6n^2$, el número de configuraciones deseadas es n, y $6 \times n^3 = 6n^2 \times n$.

Más generalmente, podríamos observar que el número de conjuntos disjuntos de caras pintadas que se pueden formar está dado por la razón de caras disponibles a caras usadas por conjunto, o sea, la razón del volumen al área de superficie multiplicado por el número (promedio) de caras por poliedro unitario. Para el cubo compuesto esta razón es n. Podríamos preguntar si también es posible pintar el octaedro compuesto o el tetraedro compuesto con n colores de esta manera. (Anticipamos que la razón de volumen a área de superficie sea aproximadamente lineal en n, pero los coeficientes y el comportamiento para n pequeño pueden variar.) Todas las caras unitarias son ahora triángulos, pero una vez más la presencia de dos tipos distintos de poliedro complica las cuentas. En particular, en vez de contar los números totales de caras disponibles y usadas, tenemos que contar separadamente los números de caras disponibles y usadas para cada tipo de poliedro. (Hay, sin embargo, una reciprocidad interesante, en que el número total de caras unitarias disponibles en el tetraedro compuesto es un múltiplo de un número octaedral, $4O_n$, mientras el número de caras unitarias disponibles en el octaedro compuesto es un múltiplo de un número tetraedral, $8T_{2n-1}$.)

La razón para las caras tetraedrales en el tetraedro compuesto es
$$\frac{2}{3}\,\frac{n^2+2}{n+1}$$
La razón para las caras octaedrales en el tetraedro compuesto es
$$\frac{2}{3}(n+1)$$
La razón para las caras cúbicas en el cubo compuesto es n

La razón para las caras tetraedrales en el octaedro compuesto es
$$\frac{4}{3}(n+1)$$
La razón para las caras octaedrales en el octaedro compuesto es
$$\frac{2}{3}\,\frac{2n^2+1}{n+1}$$

Tabla 3: Razones de caras unitarias disponibles a caras unitarias expuestas en poliedros regulares compuestos

La tabla 3 muestra las razones de disponibilidad para los tres poliedros regulares compuestos discutidos arriba. (La tabla 4 da datos más detallados para el tetraedro compuesto como referencia.) Vemos que aunque esta razón es exactamente n para el cubo, para el tetraedro las dos razones componentes son asintóticas a $\frac{2}{3}n$, mientras para el octaedro las razones son asintóticas a $\frac{4}{3}n$. Entonces, es teóricamente posible "pintar el octaedro con n colores", mas ciertamente no lo es para el tetraedro (si $n > 1$). Se puede ilustrar este principio muy simplemente al considerar el caso $n = 2$. El octaedro con aristas de longitud 2 (ver la figura 1) contiene seis octaedros unitarios, cada uno de los cuales tiene cuatro caras adyacentes expuestas, y ocho tetraedros unitarios, cada uno de los cuales tiene sólo una cara expuesta. Si pintamos el octaedro montado con el color 1, podemos entonces girar todos los octaedros unitarios cada uno 180° en un eje perpendicular a su eje radial, y girar todos los tetraedros unitarios para exponer una nueva cara, y ya tenemos todas las caras expuestas no pintadas a las cuales aplicar el color 2, con las demás caras de los tetraedros no usadas. El tetraedro con aristas de longitud 2 contiene un solo octaedro unitario con cuatro caras no adyacentes pintadas, y cuatro tetraedros unitarios, cada uno con tres de sus cuatro caras pintadas. Aunque podemos girar el octaedro para exponer sólo las cuatro caras no pintadas, cada tetraedro unitario tiene sólo una cara no pintada, y entonces no puede ocultar todas sus caras pintadas.

4. Conclusiones

Número de tetraedros derechos con pintura en...

longitud de arista	0 caras	1 cara	2 caras	3 caras	TOTAL	**tetra. volcados**
1					1	
2				4	4	
3			6	4	10	1
4		4	12	4	20	4
5	1	12	18	4	35	10
6	4	24	24	4	56	20
n	T_{n-4}	$4t_{n-3}$	$6(n-2)$	4	T_n	T_{n-2}

Número de octaedros con pintura en...

0 caras	1 cara	2 caras	3 caras	TOTAL
				1
			4	4
		6	4	10
	4	12	4	20
1	12	18	4	35
T_{n-5}	$4t_{n-4}$	$6(n-3)$	4	T_{n-1}

Tabla 4: Números de tetraedros y octaedros unitarios usados en tetraedros compuestos

Los patrones observados en contar poliedros unitarios dentro de un octaedro compuesto son similares a los observados en cubos y tetraedros compuestos [3] en sus correspondencias a vértices, aristas, caras e interiores, pero muestran una estructura que combina elementos de formas cuatripartita y tripartita. Quitar la capa exterior de un cuadrado, un cubo, o un hípercubo reduce cada cardinalidad en 2 (ver la tabla en la figura 3); para el cubo compuesto, todos los totales menos el que corresponde a los vértices disminuyen en 2. Quitar la capa exterior de un triángulo, un tetraedro, u otro símplice (de k dimensiones) reduce cada cardinalidad en $k+1$ (hay t_{n-3} tetraedros unitarios con una cara pintada en el centro de cada cara ($k=2$) del tetraedro compuesto, y hay T_{n-4} tetraedros unitarios no pintados en su interior ($k=3$)). Para el tetraedro compuesto, los totales que corresponden a componentes k-dimensionales ($k=0,1,2,3$) disminuyen por $k+1$. El octaedro compuesto, entretanto, tiene una estructura exterior similar al de su dual el cubo: quitar una capa exterior reduce las cardinalidades por 2 (se nota que el total de octaedros unitarios es O_n mientras el total de octaedros unitarios no pintados es O_{n-2}). Sin embargo, sus caras triangulares se reducen en dimensión por 3 cuando se quitan sus renglones exteriores ($8t_{n-3}$ octaedros unitarios con una cara pintada), y la disposición tetraedral de tetraedros unitarios se decrementa por sólo 1 (de $8T_{n-1}$ a $8T_{n-2}$) al quitar una sola capa (los con una cara pintada). Este fenómeno justifica la no monotonicidad extraña en el orden de las apariciones en la tabla 1, en que los octaedros unitarios no pintados aparecen para $n=3$, disminuidos en sólo dos después del primer ($n=1$) ejemplo, antes que los octaedros unitarios con una cara pintada, los cuales aparecen para $n=4$, con una disminución de tres.

Una extensión abierta a este trabajo es encontrar el número máximo $c(n)$ para el cual "Pintar el Octaedro (con aristas de longitud n) en c Colores" tiene solución. Otra es considerar los poliedros compuestos generados al tomar los duales de los poliedros unitarios en los poliedros aquí presentados. Desafortunadamente no se pueden extender estas cuestiones a los dos sólidos platónicos que quedan, el dodecaedro e icosaedro, pues no se pueden generar desde panales uniformes como ocurre con los tres discutidos arriba.

Se agradecen los comentarios de la Dra. Bárbara Shipman y de dos árbitros anónimos en las revisiones de este artículo.

Referencias

[1] Lesa Beverly, Tommy Bryan, Kimberly Childs, James Epperson, Christopher Kribs-Zaleta, Debbie Pace, & Colin Starr, *Supporting and Strengthening Standards-based Mathematics Teacher Preparation.* Austin: The Charles A. Dana Center, 2004.

[2] John H. Conway & Richard K. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[3] Christopher M. Kribs-Zaleta, Painting the pyramid, *Mathematics Teacher*, 100(2006), 276–281.

[4] National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, VA, 1989. p. 99.

[5] Robert E. Reys, Activities: Discovery with cubes, *Mathematics Teacher*, 81(1988), 377–381.