MISCELÁNEA MATEMÁTICA 28 (1999) 17-39 SMM

Historia del Análisis Funcional

Berta Gamboa de Buen
CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
Apdo. Postal
Callejón Jalisco s/n
Velanciana
36000 Guanajuato, Gto.
México
cimat@fractal.cimat.mx

Resumen

Este es el texto de una conferencia invitada impartida en las Jornadas de Historia y Filosofía de las Matemáticas organizadas por la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del CINVESTAV y el CIMAT y celebradas en el CIMAT, Guanajuato, Gto., del 20 al 22 de mayo de 1999.

1 Introducción.

El análisis funcional surge y se desarrolla como entidad propia en este siglo, generado por la evolución del análisis clásico, de la física matemática y de las nuevas ideas del álgebra y de la geometría, y muy ligado al progreso de la topología.

Las ecuaciones cuyas incógnitas son funciones son el objeto esencial de estudio de los analistas del siglo XIX. A las ecuaciones diferenciales ordinarias y con derivadas parciales, cuyo estudio había empezado en el siglo XVIII, se añadieron a partir del siglo XIX las ecuaciones integrales, las ecuaciones integro diferenciales y otros tipos de ecuaciones funcionales.

Poco a poco, y paralelamente con la evolución en el Algebra Lineal que da a la noción de matriz y luego a la de aplicación lineal el papel preponderante, la noción de ecuación cede lugar al concepto de operador o de funcional.

Asimismo, la comunidad se acostumbra paulatinamente a la idea de que se debe manipular a las funciones como objetos matemáticos *primitivos*, es decir, como elementos del espacio desprovistos de la idea de desarrollo progresivo ligado a una variación, y a partir de la expansión del lenguaje conjuntista se empieza a considerar sistemáticamente a los conjuntos cuyos elementos son funciones.

Por otra parte el carácter dinámico del análisis, que diera nacimiento al cálculo infinitesimal, se acentúa y se diversifica, sobre todo bajo la influencia de Riemann y Poincaré. Ahora lo que varía, no son únicamente los números, sino también las funciones consideradas como puntos de un espacio, y hacía finales del siglo XIX se impone la distinción entre diferentes nociones de convergencia de una sucesión de funciones hacia una función límite, lo que conducirá a la idea general de topología sobre un conjunto de funciones y por extensión dará origen a la topología general.

Así, a estos conjuntos de funciones se les va dotando de ciertas estructuras algebraicas y topológicas que permiten realizar en ellos muchas de las operaciones del análisis clásico, y se les llama espacios funcionales, origen del nombre análisis funcional: estudio de los espacios funcionales.

Una vez teniendo como objeto de estudio espacios cuyos puntos son funciones, es posible dar otro salto cualitativo y estudiar espacios abstractos con definiciones abstractas; que es ahora como se trata esta rama de las matemáticas.

El análisis funcional forma parte de lo que Dieudonné llama análisis lineal global y que es una de las grandes creaciones matemáticas de los siglos XIX y XX. Se trata de una construcción compleja sobre problemas relativos a las ecuaciones lineales y tuvo su origen en el estudio, que empezó con los albores del siglo XIX, de tres tipos fundamentales de ecuaciones de la física matemática, a saber:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(Ecuación de Laplace)}$$

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(Ecuación de onda)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(Ecuación del calor)}$$

escritas para tres variables de espacio x, y, z y una de tiempo t, pero que se pueden generalizar a más variables.

Dicho estudio dará sucesivamente origen a la teoría de series e integrales de Fourier (que más tarde se convirtió en el Análisis Armónico Conmutativo), a la teoría del potencial newtoniano y de las funciones armónicas, a la teoría de Sturm-Liouville para las ecuaciones diferenciales ordinarias, a la teoría de las ecuaciones integrales lineales. Más tarde, a partir de los trabajos de Fredholm, aparecerán el espacio de Hilbert y la teoría espectral de operadores en tales espacios. Finalmente, después de 1950, la teoría de distribuciones vendrá a generalizar y simplificar todo aquello que toca las ecuaciones lineales, culminando en la teoría de los operadores pseudodiferenciales y su extensión al análisis sobre las variedades diferenciales.

2 Antecedentes del Análisis Funcional.

Los conceptos fundamentales del análisis funcional se formaron y cristalizaron bajo varios aspectos y por varias razones. Muchos de ellos surgieron de manera natural en el proceso de desarrollo de las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones y el problema de Dirichlet, el paso de lo finito a lo infinito y las ecuaciones integrales.

2.1 Estudio de los conjuntos de soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Los matemáticos del siglo XVIII admitían sin discusión la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales sin buscar, en general, a precisar los dominios en los cuales estaban definidas dichas soluciones. A lo más justificaban su confianza determinando los coeficientes de series enteras que verificaban formalmente las ecuaciones propuestas.

A partir de 1820 Cauchy aborda el problema de manera rigurosa en sus cursos. Su idea consiste en retomar el método introducido por Euler para el cálculo aproximado de la solución y, dada una ecuación de primer orden

$$y' = f(x, y),$$

trata de probar que para valores x_0, y_0 existe una única solución $y = u(x)$ definida en un intervalo suficientemente pequeño con centro en x_0 y tal que $u(x_0) = y_0$. Es la primera vez que aparece un estudio de carácter local, donde sólo se afirma la existencia y la unicidad de la solución en una vecindad de x_0, sin decir nada de prolongaciones posibles, es decir del estudio global de las soluciones.

En 1868, aparentemente sin conocer los trabajos de Cauchy, Lipchitz redescubre dicho método, pero añade la observación de que la continuidad de las derivadas de f no es necesaria. Él dice que es suficiente que f satisfaga, en una vecindad de (x_0, y_0), la ahora llamada condición de Lipchitz; es decir que exista $k > 0$ tal que en esa vecindad

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|\,.$$

Otro método para la demostración de la existencia local de soluciones de ecuaciones diferenciales, aparentemente usado por Liouville por primera vez en 1837 y por Cauchy en sus cursos más o menos en la misma época, es el método de iteración o de aproximaciones sucesivas. Este método fue olvidado por los analistas hasta que, después de 1870, Carl Neumann y H. A. Schwarz lo utilizaron en sus estudios sobre el problema de Dirichlet y a partir de 1890, E. Picard mostró su fecundidad al aplicarlo a numerosos problemas sobre la existencia de soluciones para ecuaciones funcionales de diversa naturaleza.

En el siglo XIX había todavía mucha confusión entre las funciones de variables reales y las de variables complejas y ello no permitía distinguir claramente entre los tres tipos de ecuaciones lineales: ecuación de Laplace, ecuación de onda y ecuación del calor. Laplace creía que podría pasar del tipo elíptico de la ecuación de Laplace al tipo hiperbólico de la ecuación de onda, a través del cambio de variables $x = u + iv$, $y = u - iv$. Cuando Poisson, Fourier y Cauchy abordan problemas nuevos de la física matemática donde intervienen ecuaciones con derivadas parciales de segundo orden, empiezan a darse cuenta que se debe distinguir cuidadosamente entre los tres tipos, a los que les corresponden problemas al límite muy diferentes.

El primer problema que condujo a una ecuación con derivadas parciales de segundo orden con condiciones en la frontera fue el de las cuerdas vibrantes homogéneas. Bernoulli tuvo la idea de obtener la solución por superposición de las soluciones estacionarias, lo que exigía representar ciertas funciones arbitrarias como sumas de series trigonométricas. La mayoría de los contemporáneos de Bernoulli dudaban que eso fuera posible.

Fourier se encuentra con el mismo problema desde que empieza a estudiar la teoría del calor (1807), pero al cabo de algunos años se convence a sí mismo y a sus contemporáneos de la validez del punto de vista de Bernoulli. Sin embargo sus intentos, al igual que los de Cauchy, para probar la convergencia de la serie de Fourier de una función continua fueron insuficientes. Es hasta 1829 cuando Dirichlet establece la convergencia para una función continua monótona a trozos. A partir de ese momento, la idea de asociar a toda función que describe un fenómeno periódico su serie de Fourier es muy utilizada. Además hay muchos esfuerzos sucesivos para mejorar y profundizar el criterio de convergencia de Dirichlet, sobre todo una vez que du Bois Raymond construye en 1873 el primer ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier diverge en al menos un punto.

Por otro lado el estudio de las vibraciones de una cuerda no homogénea conduce, a través del método de separación de variables, a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden cuyas soluciones son de la forma $\operatorname{sen} \lambda_n x$ para una sucesión infinita de valores λ_n. En su teoría del calor Fourier encuentra soluciones. Por ejemplo, en el problema de enfriamiento de una esfera de radio r que está dado por la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

con condiciones a la frontera $\frac{\partial u}{\partial t} + hu = 0$ para $x = r$, donde h y k son constantes.

Fourier obtiene soluciones estacionarias

$$u(x,t) = \frac{1}{x}\exp\left(-k\lambda^2 t\right)\left(A\cos\lambda t + B \operatorname{sen}\lambda x\right),$$

donde el parámetro λ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\lambda r}{tg\,\lambda r} = 1 - hr.$$

Prueba fácilmente que esa ecuación tiene una infinidad de raíces λ_n reales que tienden a infinito y establece las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^r \operatorname{sen}\lambda_n x \operatorname{sen}\lambda_m x dx = 0 \quad \text{para } m \neq n,$$

análogas a las relaciones clásicas para las funciones $\operatorname{sen} nx$. Escribe entonces (formalmente) los desarrollos $\sum_n c_n \operatorname{sen}\lambda_n x$ para una función continua $\phi(x)$, obteniendo los coeficientes c_n a partir de las integrales $\int_0^r \phi(x)$ sen $\lambda_n x dx$ y utilizando las relaciones de ortogonalidad dadas.

Sturm y Liouville desarrollan los métodos de Fourier para atacar el problema siguiente: dada una ecuación lineal de segundo orden de la forma

$$y'' - q(x)\, y + \lambda y = 0,$$

donde $q(x)$ es una función real y continua, ¿para qué valores de λ existen soluciones con ciertas condiciones a la frontera? Este estudio pone las bases de lo que se volvería la teoría espectral.

Hemos visto entonces que desde el siglo XVIII se empezó el estudio de conjuntos de funciones, al considerar conjuntos de soluciones de algunas ecuaciones diferenciales generados a partir de soluciones particulares o de soluciones de ecuaciones más simples. En este sentido se puede entender el *principio de superposición*, enunciado por Daniel Bernoulli hacia 1750 y que en terminología actual dice que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es un espacio vectorial cerrado para alguna topología y está generado por una familia numerable de funciones.

2.2 Cálculo de variaciones y el problema de Dirichlet.

Una de las primeras motivaciones del cálculo diferencial es la búsqueda de máximos y mínimos de una función. A fines del siglo XVII uno de los éxitos del nuevo cálculo es la solución de problemas de extremos donde la cantidad que se quiere maximizar o minimizar depende de una curva variable y no solamente de uno o varios parámetros. El cálculo de variaciones es la rama del análisis que se dedica a estudiar este tipo de problemas.

Desde sus primeros trabajos en este campo Euler llega a un método que generaliza y sistematiza los resultados de sus predecesores. Escribe la función que se quiere optimizar de la siguiente manera

$$J(y) = \int_a^b F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(m)}\right) dx, \tag{1}$$

donde y es una función de x desconocida. Su método consiste en dividir el intervalo de integración en intervalos pequeños por los puntos $x_1, x_2, ..., x_k$ y reemplazar la curva $y = y(x)$ por el polígono inscrito en esa curva cuyos vértices son los puntos (x_i, y_i), donde $y_i = y(x_i)$; además reemplaza $y'(x_i)$ por $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, $y''(x_i)$ por $\frac{\Delta^2 y_i}{(\Delta x_i)^2}$ y así sucesivamente, de manera que en vez de (1) obtiene una función de k variables $y_1, ..., y_k$. Igualando las derivadas de dicha función con respecto a las y_i a cero y haciendo tender a infinito el número de puntos en se que divide al intervalo $[a, b]$, llega a la célebre ecuación de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \cdots = 0 \tag{2}$$

para la función incógnita y.

El método de Euler es simplificado por Lagrange que evita aproximar la curva por un polígono haciéndola variar directamente; es decir, reemplazando $y(x)$ por una función $y(x, t)$ que contiene un parámetro t variable, y tal que $y(x, 0) = y(x)$. Sustituye entonces $y(x)$ por $y(x, t)$ en la integral (1) y obtiene una función de t que iguala a la derivada en $t = 0$, integra por partes y recupera la ecuación de Euler así como ciertas condiciones a la frontera que Euler en general no tomaba en cuenta. Además el método de Lagrange se aplica casi directamente a las integrales múltiples.

Habitualmente, debido a la naturaleza del caso concreto estudiado, se conoce la existencia de una solución admisible del problema del cálculo de variaciones, es decir la función debe pertenecer a un conjunto adecuado de curvas suaves parametrizadas en el intervalo $[a, b]$, la que se busca entre las soluciones de la ecuación de Euler.

En el caso general, para estudiar en abstracto los problemas de extremos de funcionales de la forma (1) se solía razonar por analogía con el caso de funciones reales y se solía admitir que si F era acotada, J alcanzaba su extremo en alguna función admisible. Sin embargo, el programa de rigorización del análisis iniciado por Weierstrass, puso de manifiesto la debilidad de esos argumentos y se dieron ejemplos en los que no existe ninguna función admisible en la que J alcance su mínimo.

A raíz de los trabajos de Gauss y de Green sobre la teoría electromagnética aparece el problema de Dirichlet que consiste en buscar una función armónica u, es decir tal que satisfaga la ecuación de Laplace, en un abierto Ω en $\mathbb{R}^3$ que se prolongue continuamente en su cerradura $\overline{\Omega}$ y que coincida en la frontera $\partial\Omega$ con una función dada f.

Este problema está enlazado con multitud de problemas físicos y matemáticos y a lo largo del siglo XIX se hicieron muchos intentos para encontrar su solución. Por ejemplo, la fórmula de Poisson resuelve el problema cuando Ω es el disco unitario y los valores en la frontera son suficientemente regulares. Otro método, relacionado con el cálculo de variaciones, es el llamado Principio de Dirichlet, según el cual la solución del problema es la función u tal que su restricción a $\partial\Omega$ es el valor prefijado, digamos f, y hace mínima la llamada integral de Dirichlet

$$D(v) = \int\int\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right) dxdydz \qquad (3)$$

en el conjunto de las funciones v continuas en $\overline{\Omega}$, con parciales continuas en Ω, que coinciden con f en $\partial\Omega$ y con $D(v) < \infty$. En efecto, si existe u que minimiza D y es de clase C^2 en Ω, entonces la ecuación de Euler implica que $\Delta u = 0$ en Ω.

El principio fue utilizado por Gauss en relación con problemas de determinación de funciones analíticas hacia 1839 y por Lord Kelvin, en 1847, en conexión con la teoría del potencial. El nombre de principio de Dirichlet se lo puso Riemann quien lo usó en sus trabajos sobre funciones abelianas y holomorfas. Como el integrando en (3) es ≥ 0 para Riemann era evidente que D siempre alcanzaba su mínimo. Weierstrass en su crítica de los trabajos de Riemann insiste en el hecho de que la existencia debe ser demostrada y más tarde Hadamard da ejemplos de funciones armónicas en Ω que se prolongan continuamente en $\overline{\Omega}$, pero tales que la integral de Dirichlet (3) es infinita. En 1887 Poincaré prueba que para poder resolver el problema se puede suponer que la función f definida en la frontera de Ω es de clase 2 y está definida en una vecindad de $\partial\Omega$. Con ejemplos, Zaremba en 1911 y Lebesgue en 1912 demuestran la necesidad de imponer alguna restricción a la frontera de Ω. Así pues, bajo condiciones *razonables*, la mayor dificultad en la demostración del principio de Dirichlet está en probar que el mínimo de D en (3) se alcanza en alguna función admisible. De hecho Weierstrass y su escuela (du Bois Raymond, Zaremba, etc...) fundamentan rigurosamente la mayor parte de los resultados y argumentos clásicos del cálculo de variaciones y del principio de Dirichlet, pero no pueden probar el principio general de la existencia del extremo, pues para ello es necesaria cierta noción de compacidad.

Hilbert da, hacia 1900, la primera demostración rigurosa del principio de Dirichlet, que está basada en la posibilidad de extraer subsucesiones uniformemente convergentes de sucesiones de funciones continuas.

La rigorización del análisis llevó a estudiar bajo qué condiciones el límite puntual de sucesiones de funciones conserva las propiedades de las funciones de la sucesión (continuidad, diferenciabilidad,...) y luego a la aparición de las nociones de convergencia uniforme (Weierstrass 1841, Stokes 1847, Von Seidel 1848, Cauchy 1853) y de equicontinuidad de un conjunto de funciones (Ascoli 1883). El teorema de Ascoli-Arzela (toda sucesión equicontinua de funciones acotadas sobre un cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ posee una subsucesión uniformemente convergente) es tal vez uno de los primeros teoremas del análisis funcional y Hilbert lo redescubrió para su demostración del principio de Dirichlet.

2.3 El paso de lo finito a lo infinito.

Alrededor de 1880 empieza a sentirse la necesidad de un nuevo análisis, donde se trataría funciones con una infinidad de variables en vez de las funciones usuales. La idea general de una aplicación de un conjunto en otro, que generalizaba la definición de *función* dada por Dirichlet, comienza a extenderse con la concepción *conjuntista* de las matemáticas. Cuando los conjuntos de los que se trata están formados de funciones (en el sentido usual), o de curvas, o de superficies,... se llama a dichas aplicaciones operadores, y funcionales cuando el conjunto de sus valores es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Los ejemplos típicos de funcionales están dados por la integral $f \to \int_a^b p(x) f(x)\, dx$ o análogamente para integrales múltiples; ejemplos de operadores son las derivadas $f \to D^\nu f$ o el operador traslación $f \to L_a f$, donde $L_a f(x) = f(x-a)$.

En 1887 Volterra, inspirado por el cálculo de variaciones, concibe la idea de un nuevo *cálculo infinitesimal* en donde las funciones del análisis clásico serían reemplazadas por funcionales. Sin embargo, debido a que casi no existía ninguna de las nociones algebraicas y topológicas que fundamentan ahora el análisis funcional, los trabajos hechos en esa dirección por Hadamard y Lévy no tuvieron gran trascendencia.

El esfuerzo por crear el *álgebra del infinito* que corresponde al álgebra lineal clásica es lo que va a permitir el desarrollo del análisis funcional. De hecho, el *álgebra del infinito* sigue el penoso camino que siguió el álgebra lineal elemental, empezando con las ecuaciones lineales para pasar sucesivamente a los determinantes, las formas lineales y bilineales y a las matrices, antes de llegar al lenguaje geométrico y a la noción de aplicación lineal.

La idea de resolver sistemas infinitos de ecuaciones lineales con una infinidad de incógnitas es bastante antigua, pues reiteradamente los analistas habían considerado las ecuaciones funcionales como casos límite de ecuaciones algebraicas, cuya solución es más sencilla. Bernoulli, Lagrange y sistemáticamente Fourier en su teoría del calor, ya mencionada, siguieron este procedimiento. Fourier obtiene un sistema infinito de ecuaciones lineales con un número infinito de incógnitas y lo trunca para resolverlo. Considerando únicamente las n primeras ecuaciones con las n primeras incógnitas, obtiene soluciones que dependen de n y, haciendo tender n a infinito, consigue la solución del sistema original como límite de las soluciones truncadas. A continuación Fourier destaca que es esencial identificar los límites dentro de los cuales el desarrollo obtenido es válido (primera vez que aparece explícitamente el concepto de convergencia de una serie), y advierte que como dichos límites no son los mismos para todos los casos, pueden obtenerse resultados erróneos al combinar distintas series en los cálculos si no se procede cuidadosamente. Esto es muy novedoso, ya que durante el siglo XVIII los matemáticos habían utilizado las series sin ninguna restricción, operando con ellas como si fueran polinomios. Como Fourier no dispone de criterios para asegurar la convergencia, con gran habilidad, y haciendo uso de su conocimiento de resultados previos en la suma de series numéricas, calcula directamente la suma de los m primeros términos de cada serie en cada caso.

Las palabras de Fourier: *Como estos resultados parecen desviarse de las consecuencias ordinarias del cálculo, es necesario examinarlos con cuidado e interpretarlos en su verdadero sentido* nos hacen ver que tenía dudas sobre la validez del proceso.

Posteriormente Cauchy desarrolla varios criterios generales para asegurar la convergencia de series basados en, el ahora llamado, *criterio de Cauchy* que fuera enunciado poco antes por Bolzano (1817).

Como el método de truncamiento no siempre conduce a una solución, durante el siglo XIX se hicieron intentos de obtener una teoría que permitiera resolver sistemas infinitos de ecuaciones lineales con un número infinito de incógnitas, y aunque no tuvieron éxito hasta que en 1913, Riesz publicó un trabajo llamado *Les systèmes d'equations à une infinité d'inconnues*, estos esfuerzos ayudaron a la evolución del análisis funcional.

2.4 Las ecuaciones integrales.

Durante el siglo XIX surgen varias ecuaciones integrales especiales y en 1888 du Bois Raymond sugiere el nombre de ecuaciones integrales y propone desarrollar una teoría general. Si bien al principio parece difícil, a fines del siglo XIX, le Roux y Volterra obtienen los primeros resultados generales al probar teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones integrales de primer tipo

$$\int_a^x k(x,t)\, f(t)\, dt = g(x)$$

para la incógnita f, donde k y g están dadas en un intervalo $[a,b]$ con $g(a) = 0$ y la integral se toma sobre un intervalo variable $[a,y]$.

Al final de uno de sus trabajos Volterra hace notar la semejanza de la ecuación integral considerada, con un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes triangular sustituyendo la integral por sus sumas de Riemann.

Usando las ecuaciones integrales, en 1890 Fredholm demuestra que el problema de Dirichlet tiene solución única para todo dominio acotado del plano con frontera suficientemente regular. También establece una analogía entre las ecuaciones integrales de segundo tipo

$$f(x) + \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt = g(x), \tag{4}$$

donde esta vez el intervalo de integración está fijo, y la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales, pues influido por la nota de Volterra y sustituyendo la integral por sus sumas de Riemann, le asocia a (4) las ecuaciones

$$f(y_j) - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{\infty} k(y_j, y_i)\, f(y_i) = g(y_i) \text{ para } 1 \leq j \leq n, \tag{5}$$

donde $\{y_i\}$ es una partición regular de $[a,b]$. Estos resultados son el punto de partida de la teoría espectral e influyeron grandemente en el desarrollo posterior del análisis funcional.

Finalmente, siguiendo la idea de Poincaré, Fredholm reemplaza el núcleo k por λk, donde λ es un parámetro complejo, para obtener la ecuación

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, f(t)\, dt = g(t) \tag{6}$$

y prueba las conjeturas de Poincaré, llevándolas a un marco más general.

3 Surgimiento y consolidación.

3.1 Las aportaciones de Hilbert, Fréchet y Riesz.

Los resultados de Fredholm, Poincaré y de Schwarz, llevan a Hilbert a examinar la ecuación (6) cuando el núcleo k es continuo y simétrico, es decir $k(x,y) = k(y,x)$. Como Poincaré, ve la analogía con las matrices simétricas del álgebra lineal, o, lo que es lo mismo, con las formas cuadráticas clásicas y muestra que la teoría de Fredholm se simplifica en ese contexto. Publica estos resultados en un artículo en 1904.

A continuación publica otros dos artículos en los que aplica los resultados obtenidos en el primero a problemas de contorno en ecuaciones diferenciales y a la teoría de Sturm-Liouville.

En 1906, en su cuarto artículo, Hilbert abandona el marco de las ecuaciones integrales para crear una teoría general de formas bilineales y cuadráticas *continuas*, que se aplicará en particular a las ecuaciones integrales. A toda pareja de funciones f, g continuas en $[a,b]$ le asocia el escalar

$$(f,g) = \int_a^b f(s)\, g(s)\, ds,$$

e introduce la noción de sistema ortogonal completo de funciones como una sucesión $\{\psi_n\}$ de funciones continuas en un intervalo real $[a,b]$ tal que

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$$

y que cumple con la relación de *completitud*

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f,\psi_n)(g,\psi_n)$$

para todo par de funciones f, g continuas en $[a,b]$.

Prueba entonces que si $\{\psi_n\}_n$ es uno de tales sistema (p.e. el sistema trigonométrico), f es una solución de (6) con $\lambda = 1$ y si consideramos los *coeficientes de Fourier*

$$\begin{aligned} k_{pq} &= \int_a^b \int_a^b k(x,y)\, \psi_p(x)\, \psi_q(y)\, dx dy \\ b_p &= (g, \psi_p) \\ x_p &= (f, \psi_p), \end{aligned}$$

los $\{x_p\}$ satisfacen el sistema infinito

$$x_p = \sum_{n=1}^{\infty} k_{pn} x_n = b_p, \quad p = 1, 2, ... \tag{7}$$

y de la desigualdad de Bessel obtiene que

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}^2 < \infty, \quad \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2 < \infty \text{ y } \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 < \infty.$$

Recíprocamente, si $\{x_p\}$ satisface $\sum\limits_{p=1}^{\infty} x_p^2 < \infty$ y es solución de (7), entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \int_a^b k(x,y)\, \psi_n(y)\, dy$$

converge absoluta y uniformemente y por ende define una función continua $u(x)$. Entonces $f = g - u$ satisface $(f, \psi_n) = x_n$ y f es solución de (6).

Esto lleva a Hilbert a considerar la forma cuadrática general

$$Q(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q \quad \text{con} \quad k_{pq} = k_{qp},$$

donde $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$.

En todo su desarrollo está implícito el espacio l^2 real; además por analogía con $\mathbb{R}^n$, Hilbert introduce en él la distancia

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y extiende para funciones de l^2 en $\mathbb{R}$ las nociones de continuidad, límite, etc. Al darse cuenta que la *bola unitaria de* l^2 no satisface el teorema de Bolzano-Weierstrass, introduce el equivalente a la noción actual de *topología débil* en l^2, lo que le permite extraer subsucesiones *débilmente* convergentes de sucesiones acotadas. Ese método es llamado *principio de selección de Hilbert.*

Por otra parte Hilbert introduce, en términos de la forma cuadrática asociada, algunas clases de operadores como los de Hilbert-Schmidt y los nucleares. Si bien la formulación como operadores lineales se debe a Riesz.

A partir de entonces el lenguaje geométrico se impone a los analistas y el *álgebra del infinito* se vuelve, con la escuela de Hilbert, una *geometría del infinito*, pues a partir de 1906, Schmidt y Fréchet, independientemente, transfieren a la situación considerada por Hilbert toda la terminología de la geometría euclideana. Las sucesiones $x = (x_n)$ tales que $\sum\limits_n x_n^2 < \infty$ son los puntos, o vectores, del *espacio de Hilbert* l^2. Para dos puntos x, y el número $\langle x, y\rangle = \sum\limits_n x_n y_n$, donde la serie es automáticamente absolutamente convergente, es su *producto escalar* y $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum\limits_n x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ es la *norma* que verifica la desigualdad del triángulo $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, así como la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.

Este lenguaje les permite abordar el sistema de ecuaciones lineales más general posible en l^2, a saber

$$(a_p, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} x_n = c_p, \quad p = 1, 2, ...$$

donde los c_p son los escalares dados, los $a_p = (a_{pn}) \in l^2$ son los vectores dados y $x = (x_n)$ es un vector desconocido en l^2.

La manera como Schmidt resuelve este problema en 1908, está inspirada por la geometría y recuerda el método empleado por Fourier para resolver problemas concretos análogos. Primero trunca el sistema y, utilizando la proyección ortogonal, obtiene una solución x_m de norma mínima del sistema truncado

$$(a_p, x) = c_p, \quad p = 1, 2, ..., m.$$

Si esas soluciones tienen normas uniformemente acotadas el *principio de selección* de Hilbert (i.e. la compacidad débil de la bola unitaria de l^2), le permite extraer una subsucesión que converge a una solución del problema. Esta resulta ser una condición necesaria y suficiente y puede reformularse, lo que hace Schmidt, en términos de los datos del problema, permitiendo su solución de manera completa y elegante.

El argumento anterior se repite en diferentes contextos y la búsqueda de resultados análogos al principio de selección de Hilbert en otros espacios normados va conformando la idea general de la topología débil y las técnicas de dualidad.

Sin embargo, Schmidt no usa matrices infinitas, las cuales son introducidas en 1906 por Hellinger y Toeplitz para dar otra interpretación de las formas bilineales acotadas utilizadas por Hilbert y que generalizan las formas completamente continuas, que había considerado al principio. Las matrices infinitas $A = (a_{mn})_{m\geq 1, n\geq 1}$ de Hellinger-Toeplitz son tales que, para todo vector $x = (x_n)$ de l^2, las series $y_m = \sum_n a_{nm}x_n$ son absolutamente convergentes y $(y_m) = A \cdot x$ es un vector de l^2 tal que $\|A \cdot x\|$ es acotado para todos los vectores x con $\|x\| \leq 1$. Entonces $\langle A \cdot x, x\rangle$ es una forma cuadrática acotada en el sentido de Hilbert, y recíprocamente, toda forma cuadrática acotada se puede escribir de esa manera, además con la matriz simétrica, es decir tal que $a_{mn} = a_{nm}$ para toda pareja de índices.

Por otra parte, en 1906 apareció la tesis doctoral de M. Fréchet *Sur quelques points du calcul fonctionnel* que tuvo una gran influencia en el desarrollo del análisis funcional y de la topología. Ahí introduce la noción abstracta de distancia en un conjunto y las nociones de compacidad, completitud y separabilidad; mismas que estudió en diferentes espacios funcionales como $\mathcal{C}[a,b]$, $H(D)$ y $\mathcal{B}[a,b]$.

En el proceso de rigorización del análisis, cada vez que se hablaba de un límite, aparecía la noción de cercanía o *vecindad* entre los objetos que se consideraban. Fréchet tuvo la valiosa idea de no especificar la naturaleza de dichos objetos y de considerar un conjunto cualquiera E sobre el que se supone está definida una función distancia $d(x,y)$ entre dos elementos cualesquiera de E, con valores ≥ 0 y que verifica tres de las propiedades clásicas de la distancia euclideana:

(i) la relación $d(x,y) = 0$ es equivalente a $x = y$;

(ii) siempre se tiene $d(x,y) = d(y,x)$;

(iii) se tiene la desigualdad del triángulo $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para cualesquiera x, y, z en E.

Es muy impresionante que la mayor parte de las ideas y razonamientos relativos a las nociones de vecindad, límite y continuidad en los espacios $\mathbb{R}^n$, en especial los resultados sobre dos conceptos fundamentales que habían sido aislados en esos espacios, a saber la compacidad y la conexidad, se pueden transferir a esa situación tan general.

Fréchet insiste sobre todo en el primero de ellos, observa que subyace en los *métodos directos* de Hilbert, es decir en su *principio de selección*, para atacar el cálculo de variaciones y justificar la aplicación que hizo Riemann del principio de Dirichlet.

Fréchet también pone en evidencia el hecho de que en un espacio métrico E, el criterio de convergencia de Cauchy no siempre es válido, ya que puede existir una sucesión (x_n) en E tal que para toda $\varepsilon > 0$ se tenga que $d(x_n x_m) < \varepsilon$ si m y n son mayores o iguales a algún entero $N(\varepsilon)$ y que no converge en E. Él da ejemplos para la distancia definida en $C([a,b])$ por

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Un espacio métrico en el que es válido el criterio de Cauchy es llamado completo. En 1908 Schmidt y Fréchet prueban que l^2 es completo y posteriormente Hausdorff prueba que cualquier espacio métrico siempre puede ser considerado como un subespacio denso de un espacio métrico completo.

Un ejemplo muy importante de esta *completación* es dado en 1907 por Fischer y Riesz que, estableciendo una inesperada relación con la teoría de integración de Lebesgue, definen independientemente el espacio $L^2[a,b]$ y demuestran que es completo para la distancia dada por (8) si se identifican dos funciones cuando sólo difieren en un conjunto de medida nula. Además prueban que es isomorfo a l^2, vía la aplicación $f \to ((f,\psi_n))_{n=1}^{\infty}$ para cualquier sistema ortonormal completo de funciones $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Usando dicho isomorfismo ven que los resultados de Hilbert se pueden aplicar a las ecuaciones integrales con núcleo k en $L^2([a,b] \times [a,b])$, objetivo perseguido infructuosamente por distintos matemáticos de la época, entre los que se cuentan Hilbert y Hadamard. Esto mostró la importancia del nuevo análisis y abrió el camino hacia la introducción de los espacios L^p y l^p.

En el mismo año, también independientemente, Fréchet y Riesz obtienen que cualquier funcional lineal continua T en $L^2[a,b]$ se puede representar de la forma

$$T(f) = (f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

para alguna $g \in L^2[a,b]$.

En 1909 Riesz resuelve un problema abordado sin éxito por Hadamard y Fréchet, al probar que toda funcional lineal continua T en

$\mathcal{C}[a,b]$ se puede escribir como una integral de Stieljes

$$T(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

donde α es una función en $[a,b]$ de variación acotada, probando también que la correspondencia $T \to \alpha$ es biyectiva si, por ejemplo, α es continua por la derecha y $\alpha(a) = 0$. Este resultado es conocido ahora como teorema de representación de Riesz y fue punto de partida de sucesivas generalizaciones por Radon y otros. Por otra parte significó un paso importante en las ideas de dualidad al ser el primer ejemplo de un espacio que no se puede identificar con su dual topológico.

En 1910 Riesz, como una generalización de L^2 y l^2, introduce los espacios L^p y l^p en el caso $1 < p < \infty$ con la norma ahora conocida. Se limita al caso $p > 1$ para poder aplicar las desigualdades de Hölder y Minkowski. Estudia la resolución de un sistema infinito de ecuaciones

$$\int_a^b f_i(x)\, g(x)\, dx = c_i \quad i \in I$$

con $f_i \in L^p[a,b]$ y c_i escalares y prueba que la solución g debe pertenecer a $L^q[a,b]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En el proceso de la demostración necesita un *principio de selección* como el de Hilbert, lo que lo lleva a definir la convergencia *débil* como $f_n \to f$ débilmente en $[a,b]$ si y sólo si

$$\int_a^x f_n(t)\, dt \to \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{para toda } x \in [a,b].$$

Posteriormente prueba que esa definición es equivalente a

$$\int_a^b f_n(t)\, g(t)\, dt \to \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

para toda $g \in L^q[a,b]$.

En lenguaje actual demostró que el dual topológico de L^p es L^q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y que toda sucesión acotada en la norma en L^p posee una subsucesión débilmente convergente a alguna función de L^p. Más tarde obtiene los mismos resultados para l^p y l^q. Con ello Riesz obtiene el primer ejemplo de espacios reflexivos no isomorfos a su dual. A partir de esas ideas Riesz da la solución de los sistemas de infinitas ecuaciones lineales y publica el libro *Les systèmes d'equations linéaires à un infinité d'inconnues* que ya mencionamos.

Finalmente, en 1918, Riesz crea su teoría de operadores compactos, que es la versión lineal de gran parte de las nociones introducidas por

Hilbert en su 4o. artículo sobre las ecuaciones integrales, y, si bien la desarrolla en el espacio $\mathcal{C}[a,b]$, él mismo señala que los resultados son ciertos en otros espacios funcionales pues todo está en términos de la *norma* cuyos axiomas introduce en el contexto de $\mathcal{C}[a,b]$. Riesz sienta así las bases de la que ahora se conoce como teoría espectral de operadores.

En 1922 se publica el libro de P. Lévy (1922) *Leçons d'analyse fonctionnelle*, donde aparece por vez primera el nombre de análisis funcional.

3.2 Espacios normados.

La noción de espacio métrico también proporcionó el marco en el cual se desarrolló el álgebra del infinito con que habían soñado los analistas de principios de siglo; a saber, la teoría de espacios normados que permitió comprender mejor gran parte de los problemas del análisis funcional lineal y atacarlos con más generalidad y eficacia. Forjada por los esfuerzos conjuntos de varios analistas entre 1910 y 1935, principalmente Riesz, Helly, Hahn y Banach, esta teoría combina las ideas del álgebra lineal y la noción de distancia, siguiendo el modelo proporcionado por la descripción *geométrica* del espacio de Hilbert, debida a Schmidt y Fréchet.

En 1921, Helly da otro salto cualitativo al considerar subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ con cierta norma y parece que es el primero en notar la relación entre la noción de norma y la de convexidad, que había sido introducida por Minkowski en su *Geometría de los números*, demostrando la equivalencia entre el concepto de norma en espacios vectoriales reales de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ y la noción de *cuerpo convexo simétrico* (es decir conjunto convexo, cerrado, acotado, simétrico y con el 0 en su interior).

Minkowski había probado la existencia de hiperplanos soporte para los puntos frontera de los cuerpos convexos simétricos en $\mathbb{R}^n$ y, al tratar de generalizar ese resultado al caso de subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, Helly da el primer ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo, a saber el espacio $\mathcal{E}$ de las sucesiones (x_n) en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge con respecto a la norma $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right|$, y prueba un caso particular del ahora conocido como teorema de Hahn-Banach.

A partir de los trabajos de Riesz y Helly es natural definir la noción de norma para espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ arbitrarios, esto es hecho independientemente por H. Hahn en 1922 y S. Banach en 1923, aunque restringido a espacios completos.

En su tesis Banach da las definiciones abstractas de espacio vectorial y de norma y emprende el estudio de los operadores lineales continuos entre espacios normados completos y de los límites de sucesiones de tales operadores.

Hahn trabaja únicamente sobre las funcionales lineales desde el mismo punto de vista y prueba el siguiente teorema: Si F es un espacio normado completo, y (f_n) es una sucesión de funcionales lineales continuas en F tales que para toda $x \in F$ existe λ_x (que sólo depende de x) con $|f_n(x)| < \lambda_x$, entonces la sucesión $(\|f_n\|)$ está acotada.

También en su tesis Banach prueba independientemente un teorema más general que el de Hahn, donde las f_n son operadores entre espacios normados completos (ambas demostraciones usaban el método llamado del *gliding hump*).

Finalmente en 1927, Banach y Steinhaus, siguiendo una idea de Saks, dan una demostración del resultado anterior usando el teorema de Baire. Esta es la demostración que ahora se conoce del teorema de Banach-Steinhaus.

En 1927 Hahn ataca el problema de Helly y demuestra un teorema de extensión de funcionales en espacios normados completos, usando por primera vez en el análisis funcional la inducción transfinita. Introduce formalmente el dual de un espacio y define los espacios reflexivos, a los que llama regulares.

Dos años más tarde, Banach publica el mismo teorema con la misma prueba (más tarde reconoció la prioridad de Hahn), pero él se da cuenta de que el argumento también es válido para seminormas, lo que resultaría muy útil para el desarrollo de la teoría de espacios localmente convexos.

En 1932 Banach publica su libro *Théorie des opérations linéaires*, en donde recopila todos los resultados sobre espacios normados conocidos en esa época. Una buena parte la dedica al concepto de convergencia débil y sus generalizaciones que hasta entonces sólo se habían tratado en espacios particulares. Sus tres principales teoremas al respecto, en versión moderna, son:

(1) Si X es un espacio de Banach separable, la bola unitaria de su dual, X^*, es débilmente compacta.

(2) Si F es un subespacio vectorial del dual X^* de un espacio de

Banach separable, F es débilmente cerrado si y sólo si $F \cap B$ es débilmente compacto para toda bola cerrada B en X^*.

(3) Si X es un espacio de Banach separable, X es reflexivo si y sólo si su bola unitaria es débilmente compacta.

Los tres teoremas fueron probados en esa forma para cualquier espacio de Banach no necesariamente separable por Bourbaki en 1938 y poco después, en 1940, por Alaoglu.

Finalmente, Banach prueba en su libro el teorema:

(4) Si X y Y son espacios normados completos y $T : X \to Y$ es lineal y continua, entonces $T(X)$ es de la primera categoría de Baire o $T(X) = Y$.

Este teorema tiene como consecuencia el teorema de la gráfica cerrada.

A partir de 1935 la teoría de los espacios normados se vuelve parte de la teoría más general de los espacios localmente convexos.

3.3 Espacios localmente convexos y teoría de distribuciones.

Aunque la teoría de los espacios normados estuvo en primera línea en el desarrollo de análisis funcional después de 1906, pronto fue claro que no era suficientemente general para varias aplicaciones, sobre todo en la teoría de ecuaciones diferenciales, y que no agotaba todas las posibilidades de los conceptos topológicos usados en esa disciplina. Varias de las nociones que pertenecen a lo que ahora llamamos teoría de espacios vectoriales topológicos, hicieron su aparición de manera azarosa y no fueron objeto de un tratamiento sistemático hasta 1950.

Los primeros de tales espacios se encuentran en la tesis de Fréchet (1906), haciendo hincapié, no en sus propiedades algebraicas, sino en la posibilidad de definir su topología a través de una distancia y en el hecho que los espacios métricos obtenidos son completos. Por ejemplo el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones de reales $x = (x_n)$, donde la noción de convergencia es la de la convergencia simple, es decir, una sucesión $\{x^{(m)}\}_{m\geq 1}$ converge a x si para toda n la sucesión $\left\{x_n^{(m)}\right\}_{m\geq 1}$ converge a x_n.

El hecho de que en sus ejemplos el producto por escalares y la adición son continuos sólo es enfatizado por Fréchet hasta 1926.

Poco más tarde, el método que usó Fréchet para definir la distancia en sus ejemplos de 1906, es sistematizado por Mazur y Orlicz en lo que llamaron *espacios de tipo* B_0, ahora conocidos como espacios de Fréchet, con la topología definida por una sucesión de seminormas $\{\rho_n\}$ tales que si $x \neq 0$ existe n con $\rho_n(x) \neq 0$ (una sucesión de seminormas que separa puntos). En el ejemplo anterior de Fréchet la topología está dada por las seminormas $p_n(x) = |x_n|$, $n = 1, 2, ...$ Otro ejemplo dado por Fréchet es el espacio $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ de las funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}$ con la topología generada por las seminormas $p_n(f) = \sup_{|x|\leq n, k\leq n} \left|D^k f(x)\right|$. En los ejemplos de Fréchet la topología no puede ser definida por una sola norma.

Von Neumann, en 1929, ve que los espacios de Hilbert con la topología débil ni siquiera son metrizables.

Después de 1932 aparece la noción de acotado, Banach había notado que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en el mismo espacio vectorial con la propiedad de que sus razones $\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$ y $\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$ estén acotadas para toda $x \neq 0$, definen la misma topología. Entonces, si se define un conjunto acotado en un espacio normado como aquel contenido en alguna bola, es una noción independiente de la norma elegida. Sin embargo en espacios métricos dos distancias pueden dar origen a la misma topología, pero dar conjuntos acotados diferentes si se usa la definición anterior. Afortunadamente es posible dar una definición de conjuntos acotados en espacio vectoriales topológicos generales que sólo depende de la topología y que coincide con la previa para el caso de espacios normados; a saber: A es acotado si para toda vecindad del 0 existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda A \subset V$.

El primer resultado usando esa noción es la caracterización de aquellos espacios vectoriales topológicos Hausdorff cuya topología es normable, dada por Kolmogorov en 1935, como los que tienen una vecindad acotada.

Todos los espacios vectoriales topológicos mencionados hasta ahora son localmente convexos, sin embargo la definición de ellos es dada hasta 1935 por Von Neumann bajo el nombre de espacios convexos.

En 1933, Mazur da la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach, generalizando la teoría de Minkowski, al mostrar que si K es un conjunto convexo abierto en un espacio normado, existe un hiperplano soporte en cada punto de la frontera de K.

Krein y Milman en 1940 introducen el concepto de punto extremo para un convexo y prueban que los compactos convexos en esos espacios siempre tienen *suficientes* puntos extremos.

En 1946 Mackey determina todas las topologías para las que F es el dual de E, suponiendo que y E y F son espacios vectoriales en dualidad, tomando las intersecciones finitas de las *polares* de ciertas familias de subconjuntos de F y muestra que todas esas topologías producen los mismos conjuntos acotados en E.

Por otra parte, el teorema de Riesz sobre el dual del espacio $\mathcal{C}[a,b]$ de las funciones continuas, mencionado en la sección 3.1, marca un hito en la teoría de integración y de la medida, pues puede servir como definición de la noción de medida y de hecho el grupo Bourbaki lo hizo en los años 40. Ese punto de vista es reforzado por el estudio de las formas lineales continuas sobre el espacio de Fréchet $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, sus análogos $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ y más tarde otros espacios de funciones infinitamente diferenciables, comenzado por Sobolev hacia 1937. Las formas lineales así obtenidas se conocen ahora como distribuciones y generalizan la noción de medida.

Uno de los principales contribuyentes a la teoría de las distribuciones fue L. Schwartz que prueba en 1945 que el concepto de distribución introducido por Sobolev, y descubierto independientemente por él, da una generalización satisfactoria de la transformada de Fourier que engloba a todas las que se habían dado hasta entonces. Además Schwartz, en su ya clásico tratado *Théorie des distributions*, unifica todas las ideas precedentes en una teoría completa que enriquece con definiciones y resultados nuevos, tales como los concernientes al producto tensorial y a la convolución de distribuciones.

Las distribuciones se han mostrado extremadamente útiles a partir de 1950, sobre todo en la teoría de ecuaciones con derivadas parciales lineales.

Referencias

[1] F. Bombal, *Los principios del Análisis Funcional.* Preprint

[2] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, Mathematicas Studies 49, North Holland, 1981.

[3] J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900 I y II.* Hermann, 1978.

[4] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov and M. A. Lavrent'ev, *Mathematics. Its Content, Methods, and Meaning II y III.* The M.I.T. Press, segunda edición, 1969.