

TRIPTICO GEODESICO

Ricardo Berlanga Z.

Instituto Tecnológico Autónomo de México

INTRODUCCION.

Imaginemos a dos ciudades enemigas, digamos R y B , de tal manera que esta última decide atacar paranóicamente al mundo con proyectiles de inferior calidad.

La ciudad B , que ya no es la misma que la de las Mil y Una Noches, dispara proyectiles en todas direcciones que serán interceptados oportunamente (of course) por las fuerzas del disco bien (¡Oh yeah!) bajo las siguientes suposiciones:

- 1) La tierra igualmente puede ser plana, esférica o hiperbólica.
- 2) Los misiles de ambos bandos viajan a velocidad constante a lo largo de geodésicas.
- 3) Los misiles anti-misil NO son de corto alcance.
- 4) En el instante en que sale un misil de los "meanies" inmediatamente es lanzado uno de los "goodies" a destruirlo.

El problema de caracterizar el lugar geométrico de las explosiones (o configuración de Saddam Hussein) bajo la hipótesis de trayectorias geodésicas en universos respectivamente plano, esférico e hiperbólico, nos ofrece un pretexto idóneo para revisar los rudimentos de las tres geometrías clásicas y de paso hacer un poco de computación gráfica.

Aclaración. Bajo las idealizaciones pertinentes,

$$v = \frac{d}{t} \quad (\text{velocidad} = \text{distancia}/\text{tiempo}).$$

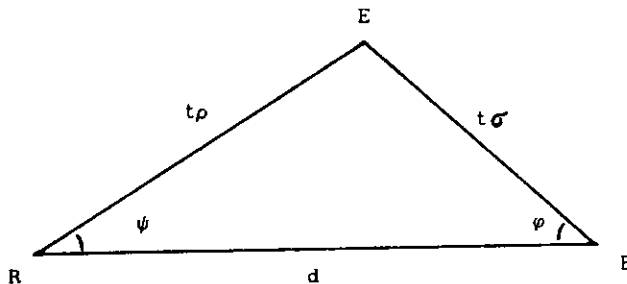
De aquí que la distancia recorrida por cualquier misil es igual a su velocidad por el tiempo de la operación de intercepción. Esta es toda la incipiente física del problema aquí considerado. El lector podría complicar las cosas e incorporar alguna(s) de las siguientes consideraciones:

- 1) Definir un retraso en la detección de los misiles.
- 2) Proponer una “atmósfera” y un mundo gravitacional.
- 3) Plantear duelos entre misiles “inteligentes” y programar un modelo de “presa-predador”.
- 4) Limitar el alcance de ambas clases de misiles.
- 5) Permitir errores y azar.
- 6) Proveer a los contendientes de misiles con diversas características.
- 7) Decretar coaliciones de ciudades enemigas y/o plataformas móviles de lanzamiento.

EL PROBLEMA EN EL PLANO.

Sean R y B , como antes, las ciudades enemigas. Sea ρ la velocidad de los misiles antimisil y σ la velocidad de los misiles agresores (por supuesto que $0 \leq \sigma < \rho$).

Supongamos que desde B es disparado un misil a un ángulo φ respecto al segmento \overline{BR} . Desde el punto de vista estratégico el problema quedará resuelto al calcular el ángulo ψ de salida del misil-antimisil. Si t es el tiempo de la operación, E el punto de explosión y d la distancia entre R y B , entonces tenemos la siguiente figura.



Desde el punto de vista trigonométrico el triángulo no quedará resuelto sino hasta encontrar t también.

En el lenguaje de la secundaria lo que tenemos que hacer es:

Resolver un triángulo dado un lado (d), un ángulo adyacente (φ) y la proporcionalidad (σ/ρ) de los lados restantes.

De la ley de los senos obtenemos ψ

$$\text{sen } \psi = \frac{\sigma}{\rho} \text{sen } \varphi$$

De la segunda ley de los cosenos tenemos que

$$(\rho^2 - \sigma^2)t^2 + (2\sigma d \cos \varphi)t - d^2 = 0$$

y de aquí que

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{\rho^2 - \sigma^2 \sin^2 \varphi} - \sigma \cos \varphi}{\rho^2 - \sigma^2} d \quad (\text{usando } t > 0) \\ &= \frac{\rho \cos \psi - \sigma \cos \varphi}{\rho^2 - \sigma^2} d \quad (\text{de la ley de los senos}) \end{aligned}$$

O bien, de la primera ley de los cosenos se desprende que

$$t = \frac{d}{\sigma \cos \varphi + \rho \cos \psi}.$$

Si bien la primera fórmula para el tiempo es la mejor pues no depende de ψ , quise sólo recalcar que hay una multiplicidad de maneras de encontrarlo.

LA GEOMETRIA.

Desde el punto de vista de la geometría, y dejando variar φ entre 0 y 2π , el siguiente teorema resuelve la situación:

TEOREMA. *El lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias a dos puntos fijos es constante es una circunferencia.*

A tales círculos se les conoce como círculos de Apolonio. Por lo tanto, podemos decir que la configuración de Saddam Hussein es Apolónica.

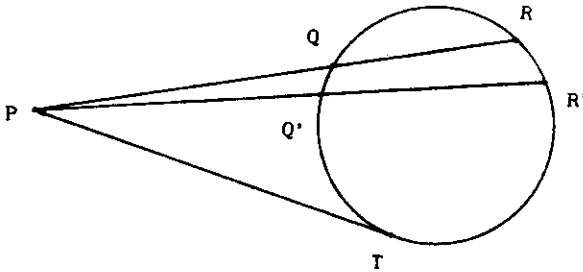
En esta imagen los cálculos son irrelevantes. La proporcionalidad de los lados implica la simetría de un círculo armónicamente situado (en un sentido técnico) respecto a los puntos dados. No hay nada que hacer mas que contemplar el resultado.

Lamentablemente no voy a incluir algunas demostraciones geométricas. Todas están contenidas en el libro de Shively [8]. Sin embargo, quiero subrayar muy enfáticamente que todos los argumentos de esta referencia son sintéticos. Es decir, “a manos libres”, “sin maquinaria”, sin geometría analítica ni coordenadas. Mucho menos análisis.

Ahora dejemos variar σ entre 0 y ρ para obtener una familia de círculos excéntricos, cada vez más grandes. Si permitiéramos los casos extremos $\sigma = 0$ y $\sigma = \rho$ obtendríamos al conjunto $\{B\}$ y al bisector perpendicular \mathcal{L} del segmento \overline{RB} respectivamente como casos límite. Todos estos círculos son ajenos dos a dos y su unión es el semiplano \mathcal{H} determinado por \mathcal{L} y punteado en B . Es decir, hemos “foliado” a $\mathcal{H} \setminus \{B\}$ en una familia de círculos de Apolonio. A esta partición le llamaremos la “foliación de las explosiones”.

Para entender mejor la situación necesitamos el concepto de potencia de un punto a un círculo y algunos resultados pertinentes.

TEOREMA. Sean P un punto en el plano y sea C una circunferencia que no pase por P . Sean r, r' rayos que emanan de P y que cortan a C en Q, R y Q', R' respectivamente. Entonces $\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \overline{PQ'} \cdot \overline{PR'} = \overline{PT}^2$ donde \overline{PT} es la tangente a C en T .

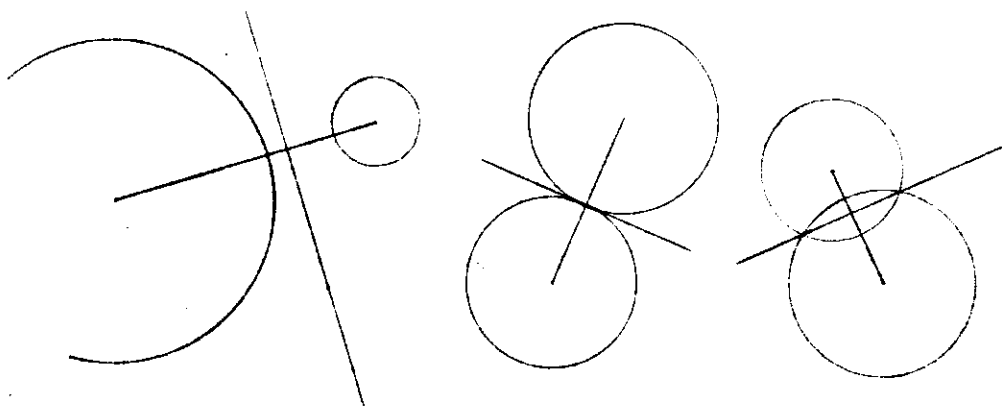


DEFINICION. A la cantidad constante $\overline{PQ} \cdot \overline{PR}$ del resultado anterior se le llama la potencia de P con respecto a C .

DEFINICION. El eje radical de dos circunferencias C y C^1 es el lugar geométrico de los puntos de igual potencia relativa a C y C^1 .

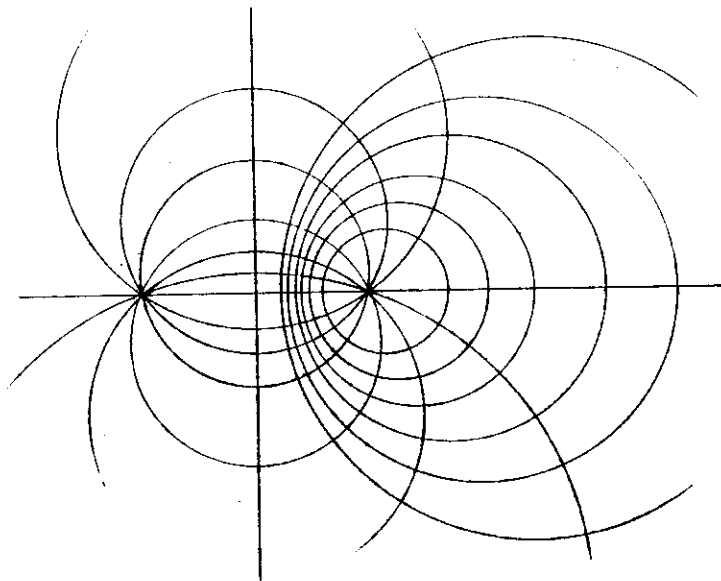
TEOREMA.

- a) *El eje radical de dos círculos que se intersectan es la línea que une sus puntos de intersección.*
- b) *El eje radical de dos círculos tangentes es la tangente común.*
- c) *El eje radical de dos circunferencias que no se intersectan es la perpendicular desde un punto de igual potencia con respecto a ambas circunferencias a la línea de sus centros.*



TEOREMA. *Sea \mathcal{K} una circunferencia que pasa por R y B , entonces \mathcal{K} interseca perpendicularmente a todas las circunferencias de la foliación de las explosiones.*

COROLARIO. *Sea \mathcal{L} el bisector perpendicular de R y B entonces \mathcal{L} es el eje radical de cualesquiera dos circunferencias distintas de la foliación de las explosiones.*



Notas. Observe que la familia de circunferencias que pasan por R y B todas tienen (por parejas) el mismo eje radical \overline{RB} . La conclusión es que hemos construido dos familias coaxiales mutuamente ortogonales.

Es cierto que la familia de circunferencias que pasan por R y B sólo juegan un papel instrumental para caracterizar a \mathcal{L} como el eje radical común de la foliación de las explosiones. Pero una vez ahí, ya no podemos dejar de verla. Tal vez el lector quiera interpretarla en términos estratégicos.

Desde el punto de vista geométrico se antoja considerar velocidades σ mayores que ρ para completar la "mitad faltante" de la foliación de las explosiones Pero esto, por supuesto, sería moralmente inadmisibile.

En adelante se acaba la geometría sintética y nos vemos obligados a emplear coordenadas. El plano euclidiano \mathbf{E} se convierte en el "plano" cartesiano \mathbf{R}^2 y ciertos aspectos algebraicos y métricos comienzan a dominar la escena.

COMPUTACION GRAFICA.

Ahora queremos hacer computación gráfica. Realmente lo único que esto quiere decir es lo siguiente:

- I) Parametriza las trayectorias de los misiles, digamos P y S , como funciones del tiempo respetando la rapidez especificada y teniendo el ángulo de salida como parámetro. Es decir $P = P_\psi(t)$ y $S = S_\varphi(t)$ para algunas fórmulas explícitas $P_\psi(t)$ y $S_\varphi(t)$.
- II) Invierte largas horas enfrente de la máquina implementando el siguiente algoritmo:
 - a) Pídele al usuario una σ como porcentaje de ρ (sólo el cociente σ/ρ es importante, por lo tanto podemos suponer que $\rho = 1$).
 - b) Variando φ entre 0 y 2π calcula el tiempo de la operación $T = T_\varphi$ y el ángulo $\psi = \psi_\varphi$.
 - c) Variando t entre 0 y T calcula $P_\psi(t)$ y $S_\varphi(t)$.
 - d) Transforma $P_\psi(t)$ y $S_\varphi(t)$ a coordenadas de pantalla y prende los pixeles correspondientes.
 - e) Adorna el programa con pequeñas florituras y frivolidades. No exageres.

- III) Documenta las ideas. Comenta brevemente las sorpresas y las trampas. No te detengas a describir todo aquello que solo llevó trabajo rutinario y esfuerzo metódico. Aunque haya sido mucho, ni modo.

Notas. Desde que comenzó la lectura, usted ha estado sumergido en mi versión de lo que debe ser el punto (III). Del punto (II) quiero resaltar el hecho de que es precisamente el inciso (d) quien le da el calificativo "gráfica" a nuestro problema de computación. (II.b) se complica de forma inesperada en las geometrías esférica e hiperbólica.

Es claro que los puntos (I) y (III) no son computación, sino literatura y geometría analítica respectivamente.

PARAMETRIZACIONES Y ALGO DE FILOSOFIA

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el vector \overline{RB} es paralelo y tiene el mismo sentido que $\hat{i} = (1, 0)$. Por lo tanto, si \bar{v} y \bar{w} se definen como

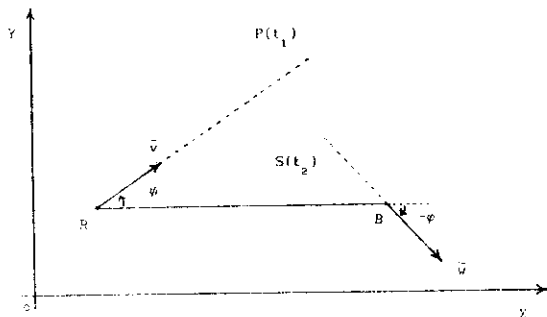
$$\bar{v} = (\cos \psi, \text{sen } \psi)$$

$$\bar{w} = (\cos \varphi, -\text{sen } \varphi) \quad \text{entonces}$$

$$P_\psi(t_1) = R + t_1 \rho \bar{v} \quad ; \quad t_1 \geq 0$$

$$S_\varphi(t_2) = B - t_2 \sigma \bar{w} \quad ; \quad t_2 \geq 0$$

son las parametrizaciones buscadas.



Si bien esto resuelve el problema, me gustaría derivar nuevamente, pero de manera vectorial, las fórmulas para el tiempo T de la operación y el ángulo ψ .

Para el tiempo T , se cumple que

$$P(T) = S(T)$$

Por lo tanto

$$T[\rho \bar{v} + \sigma \bar{w}] = B - R \quad (*)$$

De aquí,

$$T = \frac{(B - R) \cdot \bar{v}^\perp}{\sigma \bar{w} \cdot \bar{v}^\perp} = \frac{(B - R) \cdot \bar{w}^\perp}{\rho \bar{v} \cdot \bar{w}^\perp}$$

(donde $(a, b)^\perp = (-b, a) \quad \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$).

Es fácil verificar que $\bar{w} \cdot \bar{v}^\perp = -\bar{v} \cdot \bar{w}^\perp$, entonces

$$\rho(B - R) \cdot \bar{v}^\perp = -\sigma(B - R) \cdot \bar{w}^\perp$$

Como $B - R$ es paralelo a \hat{i} , efectuando las operaciones, nos queda que

$$\rho \operatorname{sen} \varphi = \sigma \operatorname{sen} \psi$$

De este modo se recupera la fórmula para ψ . Y mas aún, la ley de los senos.

Observe que las fórmulas dadas para T son a su vez instancias de la ley de los senos en un disfraz vectorial.

De (*) obtenemos también la expresión

$$\|T \rho \bar{v}\|^2 = \|(B - R) - T \sigma \bar{w}\|^2$$

que al ser desglosada nos devuelve la vieja fórmula para T en términos de la ley de los cosenos.

Aquí la pregunta es: ¿Representan estos cálculos tan sólo un círculo vicioso o realmente constituyen una manera válida de reencontrarse con las leyes básicas de la trigonometría?

Reflexionando un poco sobre los orígenes de la estructura de \mathbf{R}^2 es sencillo hacer las siguientes observaciones:

I: Aceptando la existencia del campo de los números reales \mathbf{R} , construimos \mathbf{R}^2 como el conjunto de parejas ordenadas con coordenadas en \mathbf{R} . Con esto, se define el concepto de línea recta y entonces no es difícil demostrar todos los teoremas elementales de incidencia.

También aquí se pueden introducir los conceptos de rayo, segmento, ángulo y triángulo en el plano cartesiano.

Recordemos en particular, que un rayo r está determinado por un punto P y una dirección $\bar{v} \neq 0$ de tal modo que

$$r = \{P + t\bar{v} \mid t \geq 0\}$$

Ahora un ángulo es tan sólo la unión de dos rayos que emanan de un vértice común.

- II) El producto escalar se define algebraicamente de forma sencilla como todos sabemos. Aquí el aspecto importante es notar que sólo a través de la desigualdad de Schwarz

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \|\bar{w}\| \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathbf{R}^2$$

es que podemos derivar naturalmente la desigualdad del triángulo

$$\|P - R\| \leq \|P - Q\| + \|Q - R\|$$

para la distancia entre puntos del plano.

Con esto, la estructura de incidencia se complementa con la estructura métrica.

- III) Realmente el problema difícil es definir la medida angular (o estructura conforme de \mathbf{R}^2). Es decir, dados los rayos r_1 , y r_2 con vértice en P y direcciones \bar{v} y \bar{w} respectivamente no tenemos más remedio que definir la medida (en radianes) del ángulo

$$\mathcal{A} = r_1 \cup r_2$$

como

$$\cos^{-1} \left(\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \|\bar{w}\|} \right)$$

Aquí lamentablemente necesitaremos una definición analítica del coseno (o \cos^{-1}) independientemente de la intuición geométrica. Y para esto necesitamos usar ecuaciones diferenciales, cálculo integral o series infinitas como se prefiera.

Ni modo, la moraleja es que no hay un enfoque 100% sencillo y riguroso a la geometría euclidiana: Por un lado, los axiomas de Hilbert son de una austeridad poco atractiva por la manera actual de enseñanza. Por otro lado, el enfoque aparentemente simple de la geometría analítica depende primeramente de la existencia de \mathbf{R} (problema que soslayamos constantemente) y peor aún, pronto nos arroja al problema no trivial de medir ángulos.

Lo que queda de cierto es que lógicamente si es posible deducir la trigonometría elemental con geometría analítica en el enfoque husseiniano. Sin embargo, la ley de los cosenos es casi una definición y ya no tiene mucha gracia pasar de

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \|\bar{v}\| \|\bar{w}\| \cos \alpha$$

a

$$\|\bar{v} - \bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\| \|\bar{w}\| \cos \alpha$$

donde α es la medida de \mathcal{A} .

ISOMETRIAS

DEFINICION. A una función $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ se llama una isometría (o transformación rígida) si

$$\|T\bar{v} - T\bar{w}\| = \|\bar{v} - \bar{w}\| \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathbf{R}^2$$

TEOREMA. *Toda isometría es o bien una translación, una rotación, una reflexión o una reflexión seguida de una translación.*

Toda translación es de la forma

$$T\bar{x} = \bar{x} + \bar{v} \quad \forall \bar{x} \in \mathbf{R}^2, \bar{v} \text{ fija.}$$

Toda rotación es de la forma

$$\mathcal{R}\bar{x} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\bar{x} - \bar{v}) + \bar{v} \quad \forall \bar{x} \in \mathbf{R}^2, \bar{v} \text{ fija.}$$

Toda reflexión es de la forma

$$\Omega\bar{x} = \bar{x} - 2((\bar{x} - \bar{P}) \cdot \bar{n})\bar{n} \quad \forall \bar{x} \in \mathbf{R}^2, P \in \mathbf{R}^2 \text{ fija}$$

$$\bar{n} \text{ con } \|\bar{n}\| = 1 \text{ fija.}$$

Si $\bar{n} = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$ entonces

$$\Omega\bar{x} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} (\bar{x} - \bar{P}) + \bar{P}$$

Las isometrías a su vez preservan la estructura conforme. Pero son solamente las rotaciones y las translaciones aquellas transformaciones rígidas que preservan además la *orientación* del plano.

Dados dos puntos en \mathbf{R}^2 siempre hay una translación que manda uno en el otro. Esto formaliza la idea que tenemos de que el plano es "homogéneo".

El conjunto de isometrías que preservan orientación y dejan fijo un punto en el plano es exactamente el conjunto de rotaciones con centro en el punto. Esto formaliza la idea de que el plano es "igual en todas direcciones" o "isotrópico".

DEFINICION. Dos conjuntos K_1 y K_2 en el plano son congruentes si existe una isometría T tal que $T(K_1) = K_2$.

Si T preserva orientación se puede agregar además que K_1 y K_2 son "directamente" congruentes.

Al comenzar nuestra discusión sobre parametrización de rayos fue evidente que utilizamos una isometría para colocar al vector \overline{RB} paralelo al eje de las abscisas.

Sin embargo, en lugar de explicitarlo, comenzamos con las palabras "sin pérdida de generalidad ...".

Mi conclusión es que si bien es cierto que formalmente el producto punto de \mathbf{R}^2 con las operaciones vectoriales lo determinan todo, desde otro punto de vista son la distancia entre puntos, la medida angular y el grupo de isometrías los ingredientes fundamentales de la estructura geométrica del plano. No importa la redundancia involucrada. Realmente le aconsejo al minimalista que mejor se refiera a Hilbert si su propósito es economizar pensamiento mas que el de hacer geometría.

En la práctica, uno se la pasa midiendo distancias, tomando ángulos y transformando configuraciones hasta dejarlas en posiciones manejables.

No quiero que el lector me malentienda. El trabajo de Hilbert me parece sensacional, precisamente por su belleza austera y su cercanía a los fundamentos de las matemáticas y la lógica. Por otro lado, la geometría sintética me gusta por su espíritu nostálgicamente histórico, su elegancia sencilla y su carácter mágico y sorprendente (¡Aaay! A poco ... ¡No es posible!) Es lo que ya llamé geometría a manos libres.

Introducir explícitamente al grupo de isometrías, es obra de Klein (y después de Lie), con el objeto de explotar la idea de simetría hasta sus últimas consecuencias. Y bueno, en mi opinión es el estilo que sigue vigente. Así que no necesita elogios. Se defiende solo.

Con la ayuda del grupo de transformaciones rígidas podemos resolver nuevamente el problema de parametrizar las trayectorias de misiles.

Sean R y $B \in \mathbf{R}^2$ las ciudades enemigas. Sean

$$\mathcal{R}_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi \\ \text{sen } \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

y definamos

$$\bar{u} = (B - R) / \|B - R\|$$

Entonces:

$$P_{\psi}(t_1) = R + t_1 \rho \mathcal{R}_{\psi}(\bar{u}) \quad ; \quad t_1 \geq 0$$

$$S_{\varphi}(t_2) = B + t_2 \sigma \mathcal{R}_{-\varphi}(-\bar{u}) \quad ; \quad t_2 \geq 0$$

EL PROGRAMA Y ALGUNOS RESULTADOS.

A continuación se encuentran: (a) el listado (en Pascal) de un programa asociado al problema; (b) algunos resultados de este y (c) algunos resultados de otro cuyo listado no incluyo, porque es fácil modificar el dado para que produzca una semeblanza de toda la foliación de Saddam Hussein.

Cabe notar que el problema realmente surgió de una tarea que dejé en mi curso de Matemáticas II para computación.

```

Program Misil ;
Uses Crl , Graph ;
Const Rx = 15.0 ; Ry = 240.0 ; Bx = 360.0 ; By = 240.0 ;

Procedure Marco ;
Var i : Integer ;
Begin
  For i:=0 to 479 do Begin PutPixel(0,i,WHITE) ; PutPixel(639,i,WHITE) End ;
  For i:=0 to 639 do Begin PutPixel(i,0,WHITE) ; PutPixel(i,479,WHITE) End ;
  SetColor( YELLOW ) ;
  Circle( Round( Rx ) , Round( 479 - Ry ) , 4 ) ;
  Circle( Round( Bx ) , Round( 479 - By ) , 4 ) ;
End ;

Procedure Misil_Antimisil(trayectoria:Byte ; sigma,phi:Real ; Var psi,tiempo,dist_a_B:Real);
Var
  i , t : Integer ;
  Pat_x , Pat_y , Scd_x , Scd_y , dPx , dPy , dSx , dSy , : Real ;
  cosphi , senphi , cospsi , senpsi : Real ;
Begin
  cosphi := cos( phi ) ; senphi := sin( phi ) ;
  cospsi := cos( sigma ) ; senpsi := sqrt( 1 - sqr( senpsi ) ) ;
  senpsi := senphi * sigma ; cospsi := sqrt( 1 - sqr( senpsi ) ) ;
  tiempo := (sqrt(1-sqr(sigma*senphi))+sigma*cospsi)*(Bx-Rx)/(1-sqr(sigma));
  dPx := cospsi ; dPy := senpsi ; dSx := sigma*cospsi ; dSy := sigma*senphi ;
  For i:=0 to trayectoria do
  Begin
    Pat_x := Rx + 20*dPx ; Pat_y := Ry + 20*dPy ; Scd_x := Bx + 20*dSx ; Scd_y := By + 20*dSy ;
    For t:=20 to Trunc( tiempo ) do
    Begin
      PutPixel( Round( Pat_x ) , Round( 479 - Pat_y ) , BLUE*(1-i) ) ;
      PutPixel( Round( Scd_x ) , Round( 479 - Scd_y ) , GREEN*(1-i) ) ;
      Pat_x := Pat_x + dPx ; Pat_y := Pat_y + dPy ; Scd_x := Scd_x + dSx ; Scd_y := Scd_y + dSy
    End ;
    SetColor( RED ) ;
    Circle ( Round( Pat_x ) , Round( 479 - Pat_y ) , 4 ) ;
    PutPixel( Round( Pat_x ) , Round( 479 - Pat_y ) , RED ) ;
    psi := 180 + arctan( senpsi/cospsi ) / pi ;
    tiempo := tiempo / 175 ;
    dist_a_B := tiempo * sigma
  End ;

  Var
    GraphDriver , GraphMode , i : Integer ;
    sigma : Real ;
    psi , tiempo , dist_a_B : Array[0..471] of Real ;

  Begin
    GraphDriver := Detect ;
    Repeat
      TextMode( CO80 ) ; GoToXY( 1 , 10 ) ;
      WriteLn( ' Velocidad del misil "S" como un porcentaje de la velocidad ' ) ;
      Write ( ' del misil "P" (i.e. como un número entre 0 y 100): ' ) ;
      GoToXY( 55 , 14 ) ;
      ReadLn( sigma ) ;
    until ( 0 < sigma ) and ( sigma < 100 ) ; sigma := sigma / 100 ;

    InitGraph( GraphDriver , GraphMode , 'directorío de bibliotecas' ) ;
    Marco ;

    For i:= 0 to 47 do Misil_Antimisil(1-i DIV 25,sigma,psi[i],tiempo[i],dist_a_B[i]);
    Repeat If KeyPressed then If readkey = char(27) then i := 1 Until i=1;

    TextMode( CO80 ) ;
    WriteLn( ' TABLA DE LAS PRIMERAS 26 PERSECUCIONES. ' ) ;
    WriteLn( ' Misil "S" al "P" , 100*sigma:5:2 , ' X' ) ;
    WriteLn( ' a) Angulo de salida del misil "P" en gradps. ' ) ;
    WriteLn( ' b) Tiempo de la operaci"n (tiempo de R a B por un "P" = 1.0). ' ) ;
    WriteLn( ' c) Distancia entre el punto de intercepci"n y B (dist(R,B) = 1.0). ' ) ;
    WriteLn( ' (a) (b) (c)' ) ;
    For i:=0 to 12 do WriteLn(i:3,psi[i]:8:2,tiempo[i]:10:2,dist_a_B[i]:10:2 ;
    * ,+13:3,psi[i+13]:8:2,tiempo[i+13]:10:2,dist_a_B[i+13]:10:2) ;
    WriteLn( ' Esc. ' ) ;
    Repeat If KeyPressed then If readkey = char(27) then i := 1 Until i=1
  End.

```

```

Program Misil ;
Uses Crt , Graph ;
Const Rx = 15.0 ; Ry = 240.0 ; Bx = 360.0 ; By = 240.0 ;

Procedure Marco ;
Var i : Integer ;
Begin
  For i:=0 to 479 do Begin PutPixel(0,i,WHITE) ; PutPixel(639,i,WHITE) End ;
  For i:=0 to 639 do Begin PutPixel(i,0,WHITE) ; PutPixel(i,479,WHITE) End ;
  SetColor( YELLOW ) ;
  Circle( Round( Rx ) , Round( 479 - Ry ) , 4 ) ;
  Circle( Round( Bx ) , Round( 479 - By ) , 4 ) ;
End ;

Procedure Misil_Antimisil(trayectoria:Byte ; sigma,phi:Real ; Var psi,tiempo,dist_a_B:Real) ;
Var
  i , t
  Pat_x , Pat_y , Scd_x , Scd_y , dPx , dPy , dSx , dSy : Integer ;
  cosphi , senphi , cospsi , senpsi : Real ;
Begin
  cosphi := cos( phi ) ; senphi := sin( phi ) ;
  senpsi := senphi + sigma ; cospsi := sqrt( 1 - sqr( senpsi ) ) ;
  tiempo := ( sqrt( 1 - sqr( sigma*senphi ) ) + sigma*cosphi ) * ( Bx - Rx ) / ( 1 - sqr( sigma ) ) ;
  dPx := cospsi ; dPy := senpsi ; dSx := sigma*cosphi ; dSy := sigma*senphi ;
  For i:=0 to trayectoria do
  Begin
    Pat_x := Rx + 20*dPx ; Pat_y := Ry + 20*dPy ; Scd_x := Bx + 20*dSx ; Scd_y := By + 20*dSy ;
    For t:=20 to Trunc( tiempo ) do
    Begin
      PutPixel( Round( Pat_x ) , Round( 479 - Pat_y ) , BLUE*(1-i) ) ;
      PutPixel( Round( Scd_x ) , Round( 479 - Scd_y ) , GREEN*(1-i) ) ;
      Pat_x := Pat_x + dPx ; Pat_y := Pat_y + dPy ; Scd_x := Scd_x + dSx ; Scd_y := Scd_y + dSy
    End ;
    SetColor( RED ) ;
    Circle ( Round( Pat_x ) , Round( 479 - Pat_y ) , 4 ) ;
    PutPixel( Round( Pat_x ) , Round( 479 - Pat_y ) , RED ) ;
    psi := 180 * arctan( senpsi/cospsi ) / pi ;
    tiempo := tiempo / 175 ;
    dist_a_B := tiempo * sigma
  End ;

Var
  GraphDriver , GraphMode , i : Integer ;
  sigma : Real ;
  psi , tiempo , dist_a_B : Array[0..47] of Real ;

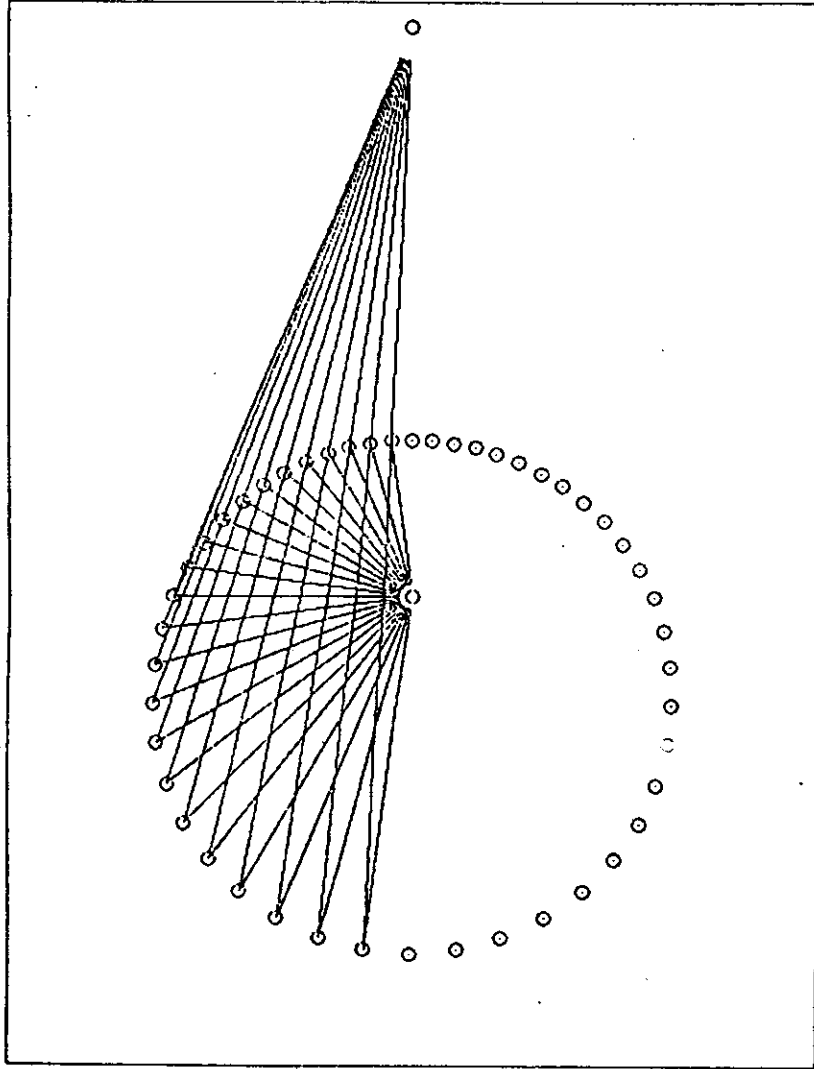
Begin
  GraphDriver := Detect ;
  Repeat
    TextMode( CDBO ) ; GoToXY( i , 10 ) ;
    Writeln( ' Velocidad del misil "S" como un porcentaje de la velocidad' ) ;
    Write ( ' del misil "P" (i.e. como un número entre 0 y 100): ' ) ;
    GoToXY( 55 , 14 ) ;
    Readln( sigma ) ;
  until ( 0 < sigma ) and ( sigma < 100 ) ; sigma := sigma / 100 ;

  InitGraph( GraphDriver , GraphMode , '<directorio de bibliotecas>' ) ;
  Marco ;

  For i:= 0 to 47 do Misil_Antimisil(1-i DIV 25, sigma, psi[i], tiempo[i], dist_a_B[i]) ;
  Repeat If KeyPressed then If readkey = char(27) then i := 1 Until i=1 ;

  TextMode( CDBO ) ;
  Writeln( TABLA DE LAS PRIMERAS 26 PERSECUCIONES ) ;
  Writeln( Misil "S" al "100*sigma:5:2, 'X' ) ;
  Writeln( ' a) Angulo de salida del misil "P" en grados. ' ) ;
  Writeln( ' b) tiempo de la operaci"n (tiempo de R a B por un "P" = 1.0) ) ;
  Writeln( ' c) Distancia entre el punto de intercepci"n y B (dist(R,B) = 1.0) ) ;
  Writeln( Writein( (a) (b) (c) (a) (b) (c) ) ;
  Writeln(
  For i:=0 to 12 do Writeln(i:3, psi[i]:8:2, tiempo[i]:10:2, dist_a_B[i]:10:2 ,
  * +13:3, psi[i+13]:8:2, tiempo[i+13]:10:2, dist_a_B[i+13]:10:2 ) ;
  Writeln( Write (
  Repeat If KeyPressed then If readkey = char(27) then i := 1 Until i=1
  End. Esc. _ ) ;

```



MISCELANEA MATEMATICA

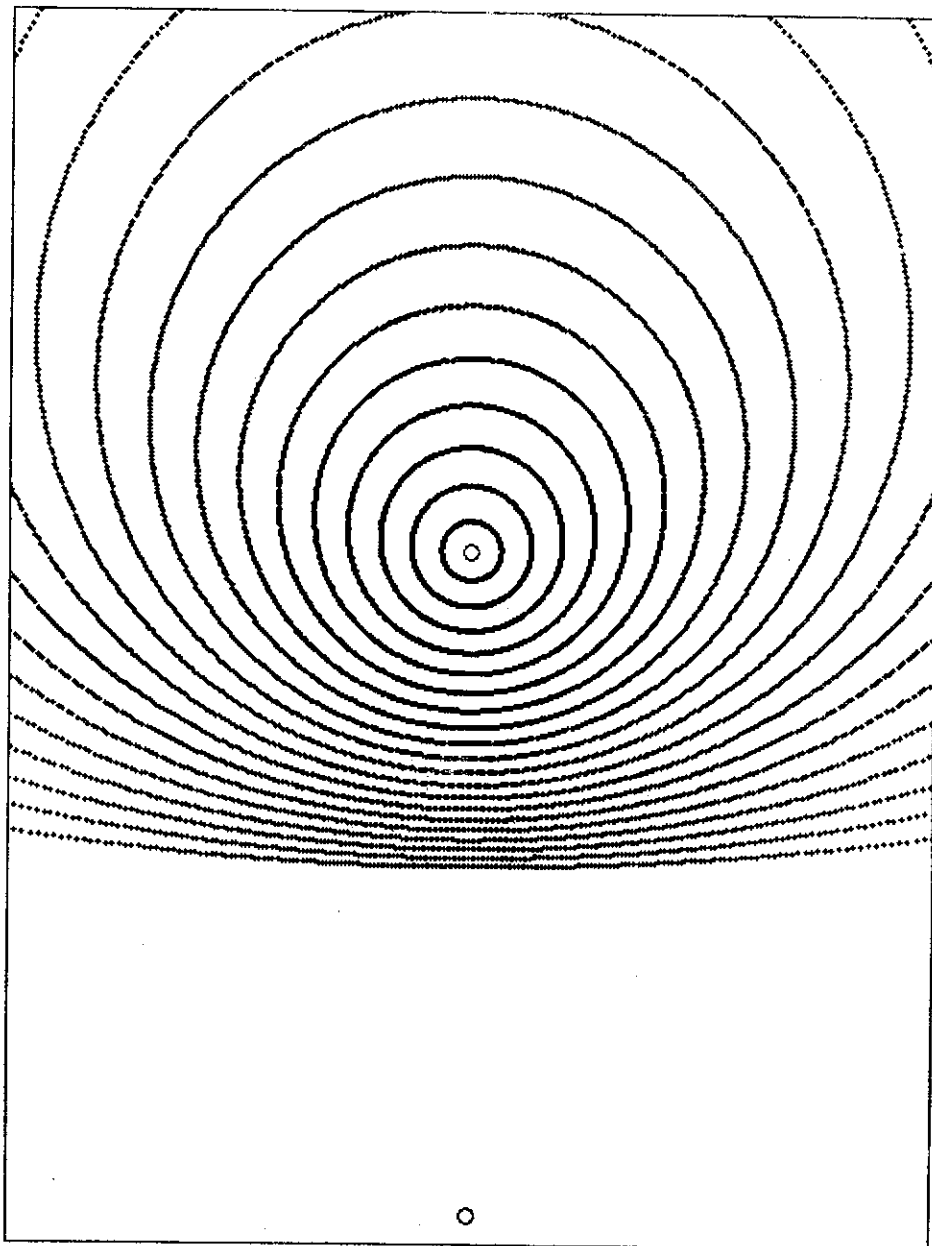
41-c

TABLA DE LAS PRIMERAS 26 PERSECUCIONES.
Mísil "S" al 38.00 %

- a) Angulo de salida del misil "p" en grados.
- b) Tiempo de la operación (tiempo de R a B por un "p" = 1.0).
- c) Distancia entre el punto de intercepción y B (dist(R,B) = 1.0).

	(a)	(b)	(c)	*	(a)	(b)	(c)
0	0.00	3.18	1.21	*	13	22.13	0.77
1	2.84	3.17	1.20	*	14	21.53	0.73
2	5.64	3.14	1.19	*	15	20.55	0.69
3	8.36	3.09	1.17	*	16	19.21	0.66
4	10.95	3.02	1.15	*	17	17.55	0.63
5	13.38	2.94	1.12	*	18	15.59	0.61
6	15.59	2.84	1.08	*	19	13.38	0.59
7	17.55	2.73	1.04	*	20	10.95	0.57
8	19.21	2.61	0.99	*	21	8.36	0.56
9	20.55	2.49	0.95	*	22	5.64	0.55
10	21.53	2.37	0.90	*	23	2.84	0.54
11	22.13	2.25	0.85	*	24	0.00	0.54
12	22.33	2.13	0.81	*	25	-2.84	0.54

Esc.---



EL PROBLEMA EN LA ESFERA

INTRODUCCION

La esfera de dimensión dos es tan sólo el conjunto

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

que si bien es *ilimitado*, por otro lado es acotado.

Es curioso. Tal vez por nuestra intuición euclidiana, tendemos a confundir la naturaleza de estas propiedades.

Al igual que el plano, la esfera admite una noción de "recta" y por tanto una estructura de incidencia. También tiene una estructura métrica, una conforme y finalmente un grupo de isometrías.

A lo largo del proceso necesitaremos definir los conceptos de geodésica, rayo, segmento, ángulo y triángulo.

Si bien en el plano estos objetos son obvios, en la esfera necesitan algo de preámbulo.

Así como la ley distributiva de la aritmética usual relaciona la multiplicación con la suma, es la trigonometría el lugar donde se estudian las relaciones básicas entre las estructuras métrica y conforme de una geometría.

RECTAS E INCIDENCIA

DEFINICION. Un círculo máximo en S^2 es la intersección de un plano arbitrario que pasa por el origen y la esfera.

El conjunto de círculos máximos constituye exactamente el conjunto de "rectas" en S^2 . (i.e. "recta" = círculo máximo).

Observe que un círculo máximo divide a la esfera en dos hemisferios al igual que una recta euclidiana divide el plano en dos hemiplanos.

En general una configuración (rectilínea) es un conjunto de rectas o elementos de rectas y un conjunto de puntos. El investigar las propiedades de colinealidad de puntos y concurrencia de elementos lineales en diversas configuraciones constituye el estudio de la "incidencia" en geometría.

En este momento sería interesante discutir la estructura de incidencia con cierto cuidado y en particular compararla con la del plano euclidiano.

Históricamente nos han dicho que el problema central es la independencia del quinto postulado de Euclides y que la esfera casi nos da un contraejemplo excepto por el hecho de que dos rectas no se intersectan en un punto sino en dos. De todos modos la geometría de S^2 se considera como un caso clásico de geometría no euclidiana en donde no existen paralelas.

Para corregir los defectos de la geometría esférica (respecto a la axiomática de Euclides) la gente construyó el plano proyectivo P^2 . Son tan cercanas las geometrías de P^2 y S^2 que no vale en este momento la pena escribir un "Tetrágono o Cuaternio Geodésico".

Por lo demás, la esfera es el modelo natural para la superficie de la tierra y es aquí donde queremos ahora proponer la contienda entre nuestras dos ciudades rivales.

DEFINICION. Dos puntos distintos en S^2 son antipodales si la línea euclidiana que determinan pasa por el origen (i.e. los puntos dados y el origen son colineales).

DEFINICION. Sean P y Q dos puntos distintos no antipodales y sea C el único círculo máximo que los contiene. Entonces P y Q dividen a C en dos arcos o *segmentos* tales que uno es mayor que otro. Al hablar del *segmento* \overline{PQ} siempre nos referimos al menor de ellos.

DEFINICION. Si \mathcal{C} es un círculo máximo y P, P^1 son puntos antipodales en \mathcal{C} , entonces P y P^1 también dividen a \mathcal{C} en dos arcos pero ahora de igual magnitud. En este caso, cualquiera de los arcos será referido como una *semirecta*.

DEFINICION. Si a una de estas semirectas le quitamos un punto extremo, digamos P^1 , entonces, por definición, tendremos un *rayo* que tiene a P como origen.

DEFINICION. Dos rayos con un mismo origen forman un *ángulo*.

Un rayo queda determinado por su origen y un punto en el rayo. Por lo tanto, un ángulo queda determinado por dos puntos, digamos Q y R , y su origen P . A tal ángulo lo denotamos como $\sphericalangle QPR$.

DEFINICION. A un número de puntos pertenecientes a un círculo máximo común, se les llama *colineales*.

Note que si tres puntos no son colineales, entonces ninguna pareja es de antipodales.

DEFINICION. Sean P, Q y R tres puntos no colineales. El *triángulo* $\triangle PQR$ es la figura que consiste de los segmentos \overline{PQ} , \overline{QR} y \overline{RP} y está determinado unívocamente por los puntos dados.

Anteriormente se dijo que un círculo máximo divide a S^2 en hemisferios. Ahora observe que dos círculos máximos dividen a S^2 en cuatro partes llamadas "lunas".

Tres puntos no colineales determinan 3 círculos máximos que dividen a S^2 en 8 "sectores".

Cada par de puntos determina un círculo máximo que a su vez determina a un único hemisferio que contiene al tercer punto. La intersección de estos tres hemisferios es el *interior* del triángulo.

DISTANCIA EN \mathbf{S}^2 .

DEFINICION. La distancia entre dos puntos P y Q en \mathbf{S}^2 está definida por

$$d(P, Q) = \cos^{-1}(P \cdot Q).$$

Es decir, la distancia entre P y Q es igual a la medida del ángulo que determinan como vectores en \mathbf{R}^3 . También, por la definición del coseno mismo, la distancia entre P y Q es la longitud del segmento (circular) que los une (o bien π si P y Q son antipodales).

En el plano la distancia entre puntos se define a través del teorema de Pitágoras y la fórmula es algebraica. En \mathbf{S}^2 la definición de distancia requiere una vez más de la función trascendente \cos^{-1} .

Sean P y Q dos puntos no antipodales en \mathbf{S}^2 . Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}^2$ una curva continua tal que $\gamma(a) = P$ y $\gamma(b) = Q$. Es posible intentar definir la longitud de γ como el límite

$$\lim \sum_{i=0}^n d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) \quad a = t_0 < \dots < t_n = b$$

cuando $\max \{t_{i+1} - t_i\} \rightarrow 0$

No siempre este límite existe (puede ser ∞), pero cuando existe siempre es mayor o igual a $d(P, Q)$. La igualdad se da exactamente en el caso de que γ sea una parametrización inyectiva del segmento circular entre P y Q . De aquí que los segmentos realicen "la distancia mas corta entre puntos".

Esta es la razón por la cual a los segmentos también se les conoce como "arcos geodésicos".

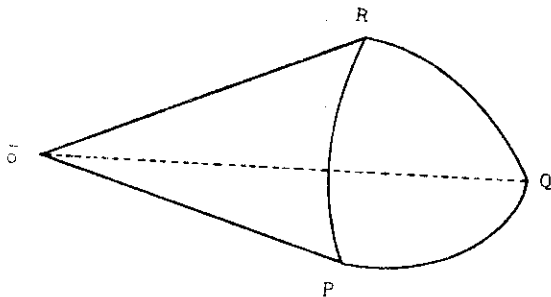
Todo esto pudiera parecer mágico, pero la verdad es que todo es consecuencia de la desigualdad del triángulo:

TEOREMA.

- a) $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$
- b) *La igualdad se cumple si y sólo si Q se encuentra en el segmento determinado por P y R (o Q se encuentra en una semirecta determinada por P y R si son antipodales).*

A veces uno no sabe porqué la desigualdad del triángulo (con la aclaración correspondiente de cuándo se da la igualdad) es tan importante. Bueno, esta es mi explicación.

Por otro lado, basta con "desdoblar" el triedro de la siguiente figura para obtener el teorema



ANGULOS EN S^2 .

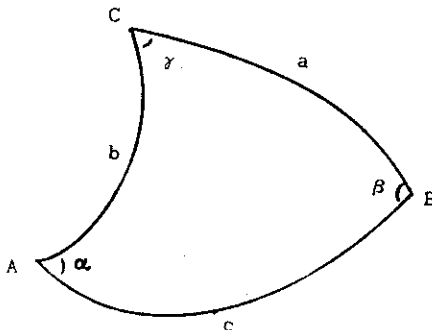
DEFINICION. Sea $P \in S^2$. Al círculo máximo ℓ determinado por la intersección de la esfera y del plano perpendicular a P que pasa por el origen se le llama la línea polar de P . A su vez, a P se le llama un polo de ℓ . El punto $-P$ antipodal a P también es polo de ℓ .

Para definir la medida de un ángulo $\sphericalangle QPR$ lo más conveniente es pensar que los segmentos \overline{PQ} y \overline{PR} determinan círculos máximos que a su vez determinan polos, y es el ángulo entre estos el que buscamos. Hay cuatro posibilidades geométricas y sólo dos desde el punto de vista numérico. No es difícil convencerse que la siguiente elección es correcta.

DEFINICION. La medida del ángulo $\sphericalangle QPR$ está dada por la fórmula

$$\cos^{-1} \left(\frac{P \times Q}{\|P \times Q\|} \cdot \frac{P \times R}{\|P \times R\|} \right)$$

Consideremos el $\triangle ABC$. Entonces, al igual que en el plano, nuestro triángulo consta de 6 elementos. A saber: los lados \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} de longitudes a, b, c respectivamente y los ángulos $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ y $\sphericalangle BCA$ de medidas α, β y γ respectivamente.



En la práctica uno tiende a confundir los elementos geométricos de sus medidas, y aquí empezaremos a ignorar la brutal diferencia entre una cosa y su tamaño, sin el menor remordimiento.

El lector podrá verificar las siguientes afirmaciones:

- a) $0 < a, b, c < \pi$
- b) $a + b + c < 2\pi$
- c) $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$
- d) $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$

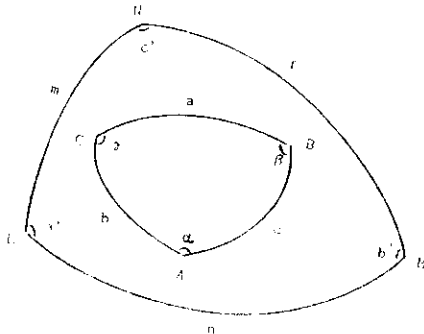
El ΔABC determina de forma sorprendente otro triángulo, el llamado triángulo polar de la siguiente manera:

El punto A determina a su línea polar ℓ . A su vez ℓ divide a \mathbb{S}^2 en dos hemisferios tales que uno, digamos H_A , es el que contiene al punto A .

De la misma manera consideramos a las líneas polares m y n de los puntos B y C respectivamente y sus hemisferios H_B y H_C asociados.

Las líneas ℓ , m y n se intersectan por pares en 6 puntos y determinan a su vez 8 triángulos de los cuales aquel cuyo interior $H_A \cap H_B \cap H_C$ está perfectamente identificado. Este es el triángulo polar asociado al ΔABC .

Si ΔABC es "chico" (i.e. $a, b, c < \pi/2$) entonces la siguiente figura resume la situación:



No es difícil verificar que

$$a' = \pi - a$$

$$b' = \pi - b$$

$$c' = \pi - c$$

Ahora, por pertenecer a $n \cap m$, L dista $\pi/2$ de C y B por lo tanto, a es la polar de L . Del mismo modo, b y c son las polares de M y N respectivamente. De esta manera, resulta que el ΔABC es el triángulo polar del ΔLMN . De aquí que

$$\alpha = \pi - \ell \quad \ell = \pi - \alpha$$

$$\beta = \pi - m \quad \text{ó} \quad m = \pi - \beta$$

$$\gamma = \pi - n \quad n = \pi - \gamma$$

En resumen, dado el ΔABC con elementos $((a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma))$ entonces su triángulo polar ΔLMN tiene elementos

$$((\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma), (\pi - a, \pi - b, \pi - c)).$$

Además la relación $\Delta ABC \rightarrow \Delta LMN$ es involutiva (i.e. el polar del polar es el original).

El concepto de polaridad en S^2 es sorprendente y constituye un capítulo clásico en la geometría proyectiva y formas cuadráticas.

En nuestra situación, la moraleja es que las estructuras métrica y conforme en S^2 están más estrechamente vinculadas que sus análogas en el plano.

Si por un lado la idea de "polaridad" implica "rigidez" en S^2 , por el otro la idea de "semejanza" implica "flexibilidad" en E^2 .

ISOMETRIAS.

Las isometrías de S^2 son el grupo de transformaciones que preservan distancia. Las isometrías se dividen en aquellas que preservan o no la orientación de la esfera.

DEFINICION. Sea ℓ un círculo máximo y sea ζ uno de sus polos. Entonces la reflexión

$$\Omega_\ell \bar{x} = \bar{x} - 2(\bar{x} - \zeta)\zeta$$

define una isometría en S^2 . Al plano determinado por ℓ se le llama el plano de la reflexión.

Geoméricamente Ω_ℓ manda a $x \in S^2$ en su imagen espejo respecto al plano de Ω_ℓ .

DEFINICION. Sea $P \in S^2$ y sea $\theta \in [0, 2\pi >$. Sean $\zeta, \eta \in S^2$ tales que $\{\zeta, \eta, P\}$ forma una base ortogonal positivamente orientada de \mathbf{R}^3 . Entonces la rotación

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(P, \theta)}(x\zeta + y\eta + zP) &= x[(\cos \theta)\zeta + (\sin \theta)\eta + \\ &\quad y[(-\sin \theta)\zeta + (\cos \theta)\eta] + zP \\ &= (x\cos \theta - y\sin \theta)\zeta + (x\sin \theta + y\cos \theta)\eta + zP \end{aligned}$$

define una isometría en S^2 . Al plano determinado por ζ y η se le llama el plano de la rotación. $\mathcal{R}_{(P, \theta)}$ no depende de ζ o η .

TEOREMA. Toda isometría en S^2 es o bien una rotación, una reflexión o bien una reflexión compuesta de una rotación con un plano común.

DEFINICION. El mapeo antipodal E es la transformación rígida definida por:

$$Ex = -x$$

COROLARIO. *Toda isometría en \mathbf{S}^2 es una rotación, o una rotación seguida de E .*

En particular, el grupo de isometrías que preservan orientación es el grupo de las rotaciones.

TEOREMA. *Toda isometría de \mathbf{S}^2 es de la forma $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$, con A una matriz de orden 3 tal que $A^t A = Id$. (i.e. los vectores columna de A forman una base ortonormal de \mathbf{R}^3).*

El grupo de isometrías en el plano está constituido esencialmente de translaciones, rotaciones y reflexiones. Observe que toda translación es el producto de dos reflexiones a lo largo de rectas paralelas.

En la esfera las translaciones desaparecen pues el producto de dos reflexiones (aquí no hay paralelismo posible) siempre es una rotación.

En ambas geometrías el grupo de isometrías que preservan orientación y dejan fijo un punto es isomorfo al círculo unitario, es decir, hay tantas de estas isometrías como parejas de la forma $(\cos \theta, \sin \theta)$.

Como también en la esfera siempre podemos rotar un punto cualquiera en otro, resulta que \mathbf{S}^2 también es un espacio isotrópico y homogéneo.

PARAMETRIZACION DE GEODESICAS.

Sean P y Q dos puntos ortogonales en S^2 . Entonces no es difícil convencerse de que

$$\gamma(t) = (\cos t)P + (\sin t)Q \quad \forall t \in [0, 2\pi >$$

parametriza al círculo máximo determinado por P y Q .

La curva γ comienza en P desplazándose hacia Q con rapidez unitaria.

Más generalmente, si P y Q no son antipodales entonces

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t)P + (\sin t) \left\{ \frac{Q - (Q \cdot P)P}{\|Q - (Q \cdot P)P\|} \right\} \\ &= (\cos t)P + (\sin t) \left\{ \frac{Q - (P \cdot Q)P}{\|P \times Q\|} \right\} \\ &= (\cos t)P + (\sin t)P_Q^\perp \end{aligned}$$

nos dá la parametrización correcta.

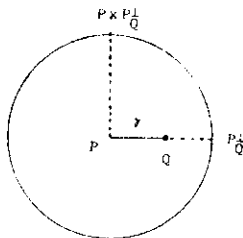
Si $\theta = \cos^{-1}(P \cdot Q)$ entonces $\gamma(\theta) = Q$ (porque $\sin \theta = \|P \times Q\|$).

Observemos que

$$P, \quad \frac{Q - (P \cdot Q)P}{\|P \times Q\|} = P_Q^\perp \quad \text{y} \quad \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|} = P \times P_Q^\perp$$

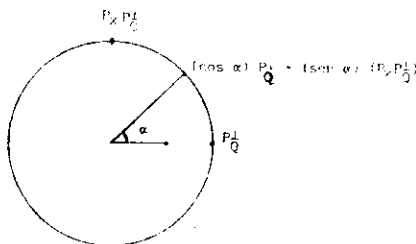
nos dan un marco ortonormal positivamente orientado de S^2 .

Si vemos a la esfera desde P y nos colocamos de tal modo que P_Q^\perp quede a nuestra derecha, entonces $P \times P_Q^\perp$ queda orientado hacia enfrente.



Ahora podemos mirar a γ bajando a la derecha rumbo a Q .

Si rotamos la situación un ángulo α , desde nuestro punto de vista, obtenemos una geodésica que emana de P formando un ángulo α con \overline{QP} .



Si de una vez ajustamos la rapidez para que esta sea constante igual a μ entonces obtenemos la parametrización.

$$\gamma(t) = (\cos t\mu)P + (\sin t\mu) \{ (\cos \alpha)P_Q^\perp + (\sin \alpha)P \times P_Q^\perp \}$$

Regresando ahora al escenario de aquellas ciudades rivales R y B , de donde se lanzarán misiles P y S ; a velocidades ρ y σ ; y con ángulos ψ y φ respectivamente obtenemos las parametrizaciones.

$$P_\psi(t) = (\cos t_1\rho)R + (\sin t_1\rho) \{ (\cos \psi)R_B^\perp + (\sin \psi)R \times R_B^\perp \}$$

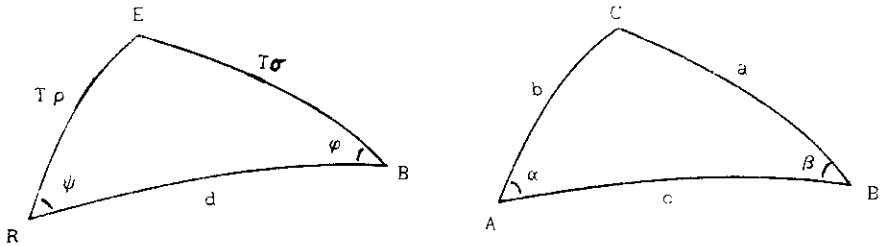
$$S_\varphi(t_2) = (\cos t_2\sigma)B + (\sin t_2\sigma) \{ (\cos -\varphi)B_R^\perp + (\sin -\varphi)B \times B_R^\perp \}$$

Observando que $B \times B_R^\perp = -R \times R_B^\perp$, también tenemos,

$$S_\varphi(t_2) = (\cos t_2\sigma)B + (\sin t_2\sigma) \{ (\cos \varphi)B_R^\perp + (\sin \varphi)R \times R_B^\perp \}$$

TRIGONOMETRIA.

De las parametrizaciones obtenidas queremos ahora derivar algunas relaciones trigonométricas en la geometría esférica. Para obtener identidades en forma estándar, consideremos la siguiente figura de "notación alternativa"



Para el tiempo T de intercepción, se cumple que

$$P_v(T) = S_\varphi(T)$$

Obteniendo por lo tanto las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & (\cos T\rho)R + (\sen T\rho)(\cos \psi)R_B^\perp \\
 & = (\cos T\sigma)B + (\sen T\sigma)(\cos \varphi)B_R^\perp.
 \end{aligned}$$

$$(**) \quad (\sen T\rho)(\sen \psi)R \times R_B^\perp = (\sen T\sigma)(\sen \varphi)R \times B_R^\perp.$$

Ahora los siguientes cálculos serán útiles:

$$\begin{aligned}
 R_B^\perp - B_R^\perp &= \frac{B - (R \cdot B)R}{\|R \times B\|} - \frac{R - (B \cdot R)B}{\|B \times R\|} \\
 &= \frac{1 + (R \cdot B)}{\|B \times R\|} (B - R) \\
 B \cdot R_B^\perp &= \frac{B - (B \cdot R)R}{\|B \times R\|} \cdot B = \frac{1 - (B \cdot R)^2}{\|B \times R\|} = \sen d \\
 B_R^\perp \cdot R_B^\perp &= \frac{(R - (B \cdot R)B) \cdot (B - (R \cdot B)R)}{\|B \times R\|^2} = -R \cdot B = -\cos d.
 \end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente ambos lados de la ecuación en (*) por R ,

$$\cos T\rho = (\cos T\sigma)B \cdot R + (\operatorname{sen} T\sigma)(\cos \varphi)B_R^1 \cdot R.$$

y puesto que $B \cdot R = \cos d$ y $B_R^1 \cdot R = \operatorname{sen} d$ se tiene que

$$\cos T\rho = (\cos T\sigma)(\cos d) + (\operatorname{sen} T\sigma)(\cos \varphi)\operatorname{sen} d.$$

Esta relación en la notación alternativa de la figura de arriba se escribe como

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos \varphi$$

que es la ley de los cosenos en la trigonometría esférica.

Multiplicando escalarmente ambos lados de la ecuación en (*) por R^1 ,

$$(\operatorname{sen} T\rho)(\cos \psi) = (\cos T\sigma)B \cdot R_B^1 + (\operatorname{sen} T\sigma)(\cos \varphi)B_R^1 \cdot R_B^1$$

y puesto que $B \cdot R_B^1 = \operatorname{sen} d$ y $B_R^1 \cdot R_B^1 = -\cos d$ se tiene que

$$(\operatorname{sen} T\sigma)(\cos \varphi) = (\cos T\sigma)(\operatorname{sen} d) - (\operatorname{sen} T\sigma)(\cos d)\cos \varphi.$$

Esta relación en la notación alternativa se escribe

$$\operatorname{sen} b \cos \alpha = \cos a \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a \cos c \cos \varphi$$

que es la ley de los senos y cosenos en la trigonometría a discusión.

De la ecuación en (***) obtenemos

$$\operatorname{sen} T\rho \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} T\sigma \operatorname{sen} \varphi$$

ó

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \beta}$$

que es la ley de los senos.

NOTAS SOBRE LA GRAFICACION.

Los problemas interesantes fueron:

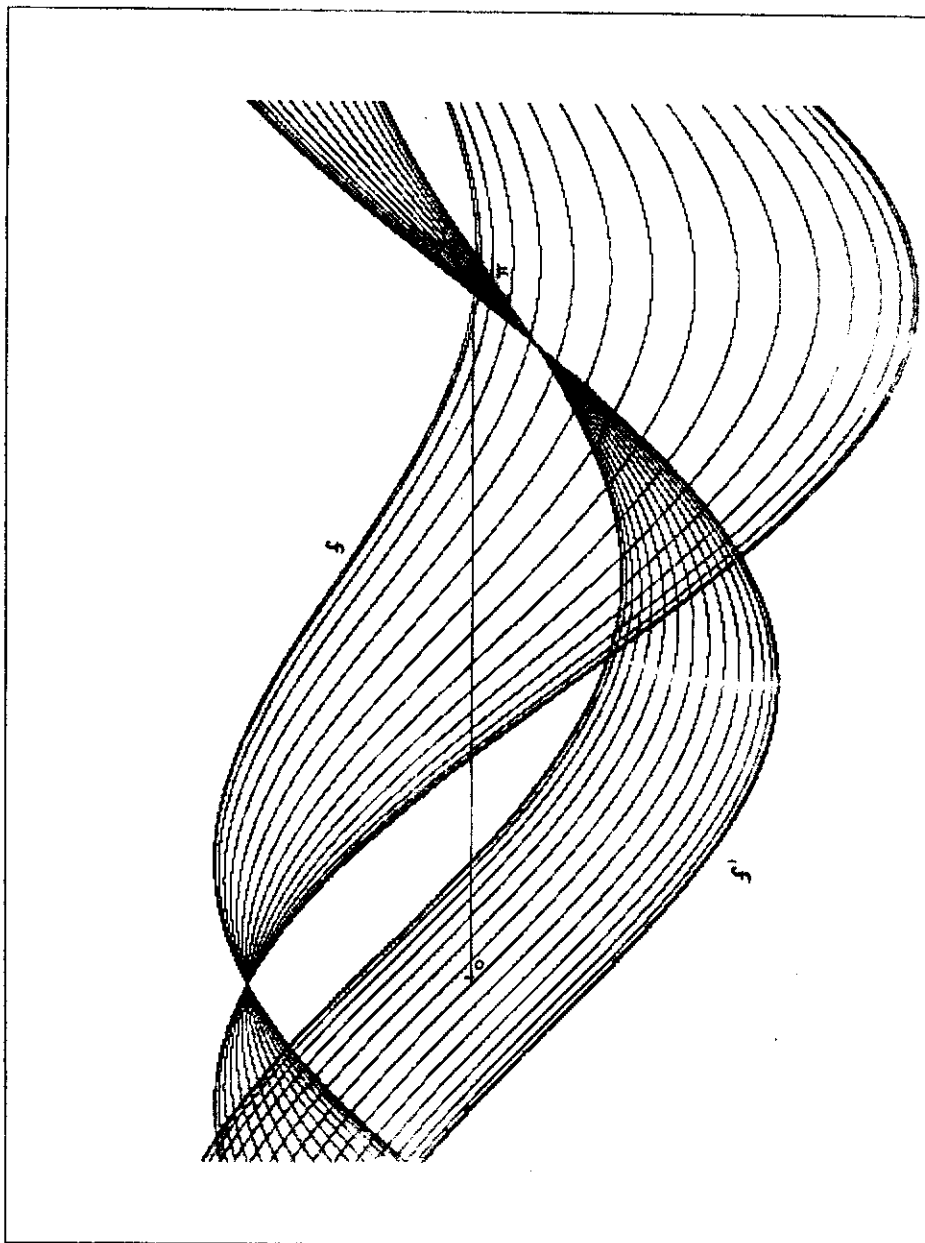
- 1) Que la ecuación trigonométrica para encontrar el tiempo de intercepción queda en forma implícita y por tanto requeri del método de Newton para resolverla.
- 2) Que hubo que proyectar a la esfera ortográfica, estereográfica y exponencialmente en el plano para poder "mirar" las persecuciones.

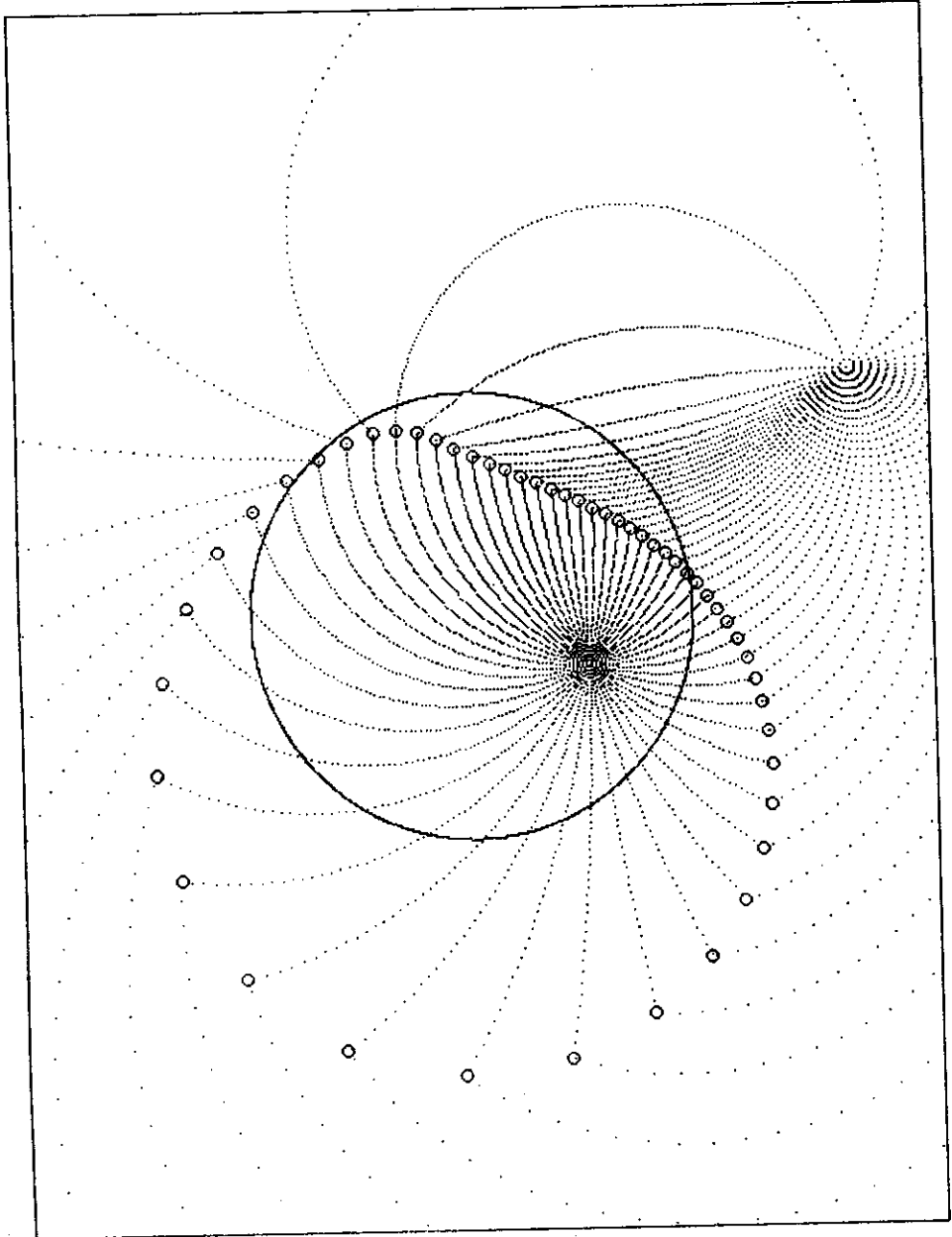
Las ecuaciones finales utilizadas en el programa fueron:

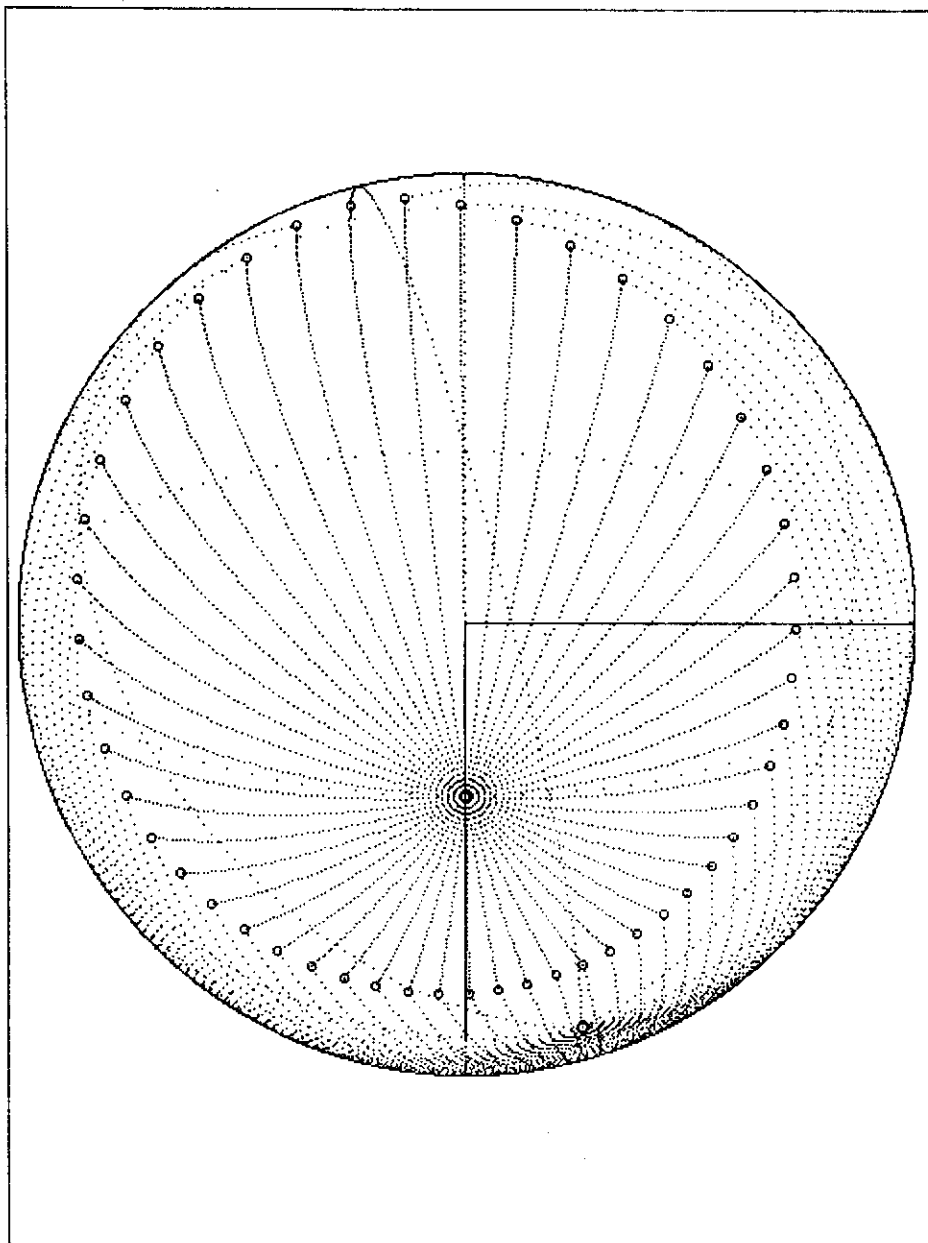
- 1) $f(x) = \cos(x\rho) - (\cos d)\cos(x\sigma) - (\sin d\cos\varphi)\sin(x\sigma)$
 $f(x) = \cos(x\rho) + p\cos(x\sigma) + q\sin(x\sigma)$, donde
 $p = -\cos d$ y $q = -\sin d\cos\varphi$.
- 2) $f'(x) = -\rho\sin(x\rho) - p\sigma\sin x\sigma + q\sigma\cos x\sigma$
- 3) $T = x$ para $f(x) = 0$.
- 4) $\cos\psi = (\cos(x\sigma)\sin d - (\cos d\cos\varphi)\sin x\sigma)/\sin x\rho$.
- 5) $\sin\psi = \frac{\sin(x\sigma)}{\sin(x\rho)}\sin\varphi$.

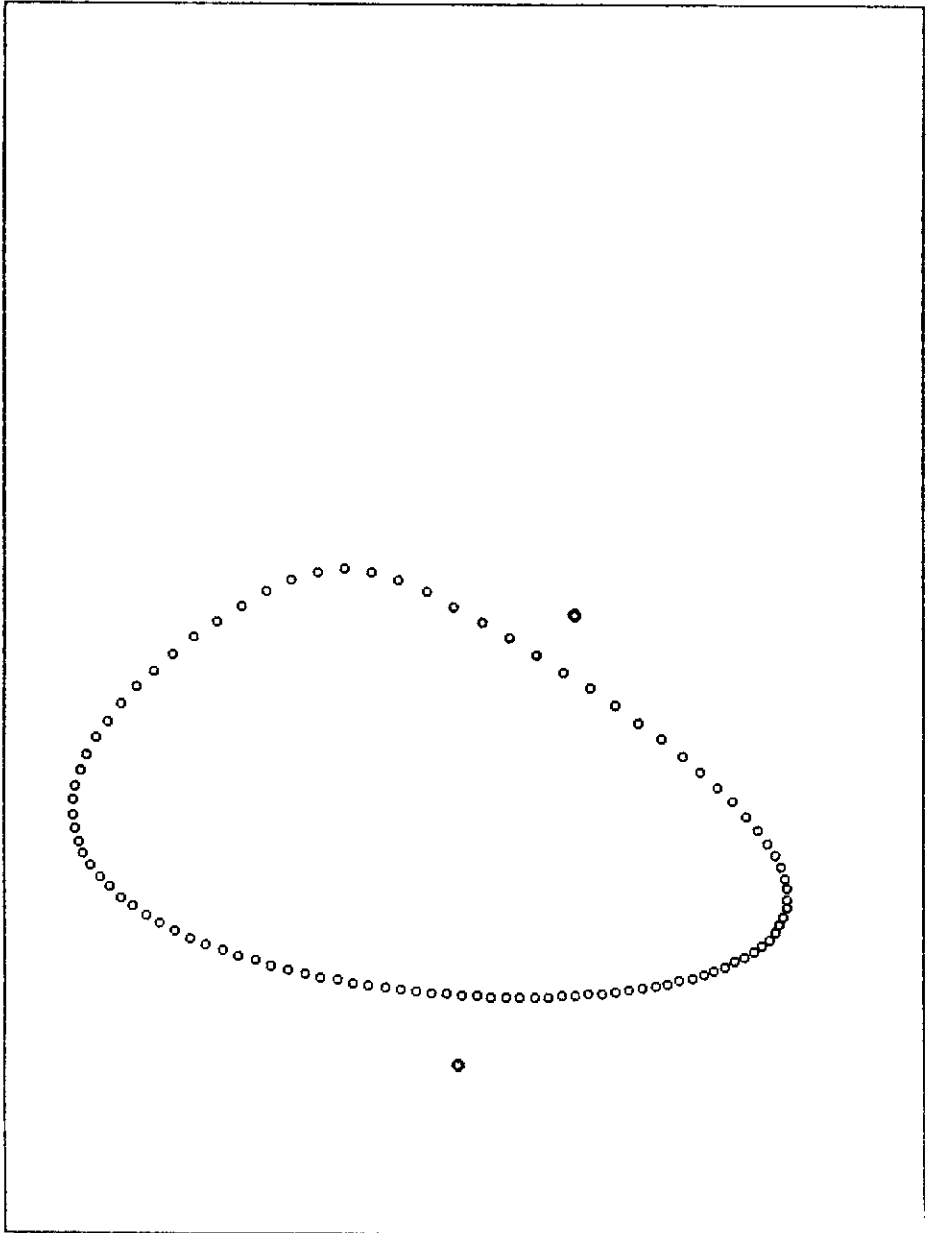
Nota. Si $\rho' = \alpha\rho$ y $\sigma' = \alpha'\sigma$ entonces $t' = \frac{t}{\alpha}$ pero $\psi' = \psi$.

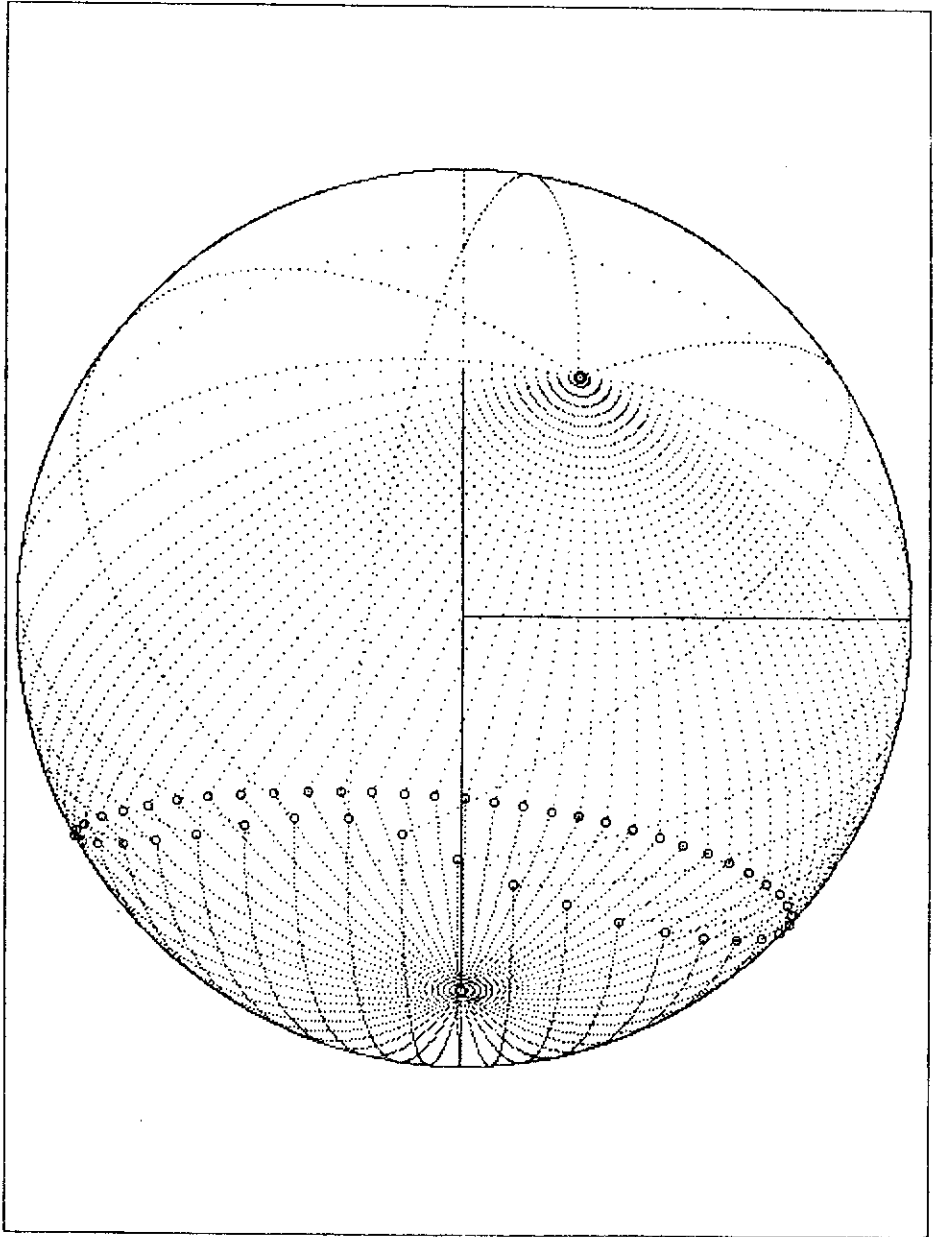
Esto quiere decir que si las velocidades aumentan, los tiempos de operación decrecen inversamente pero la geometría no cambia. Por eso $\rho = 1$ está bien.

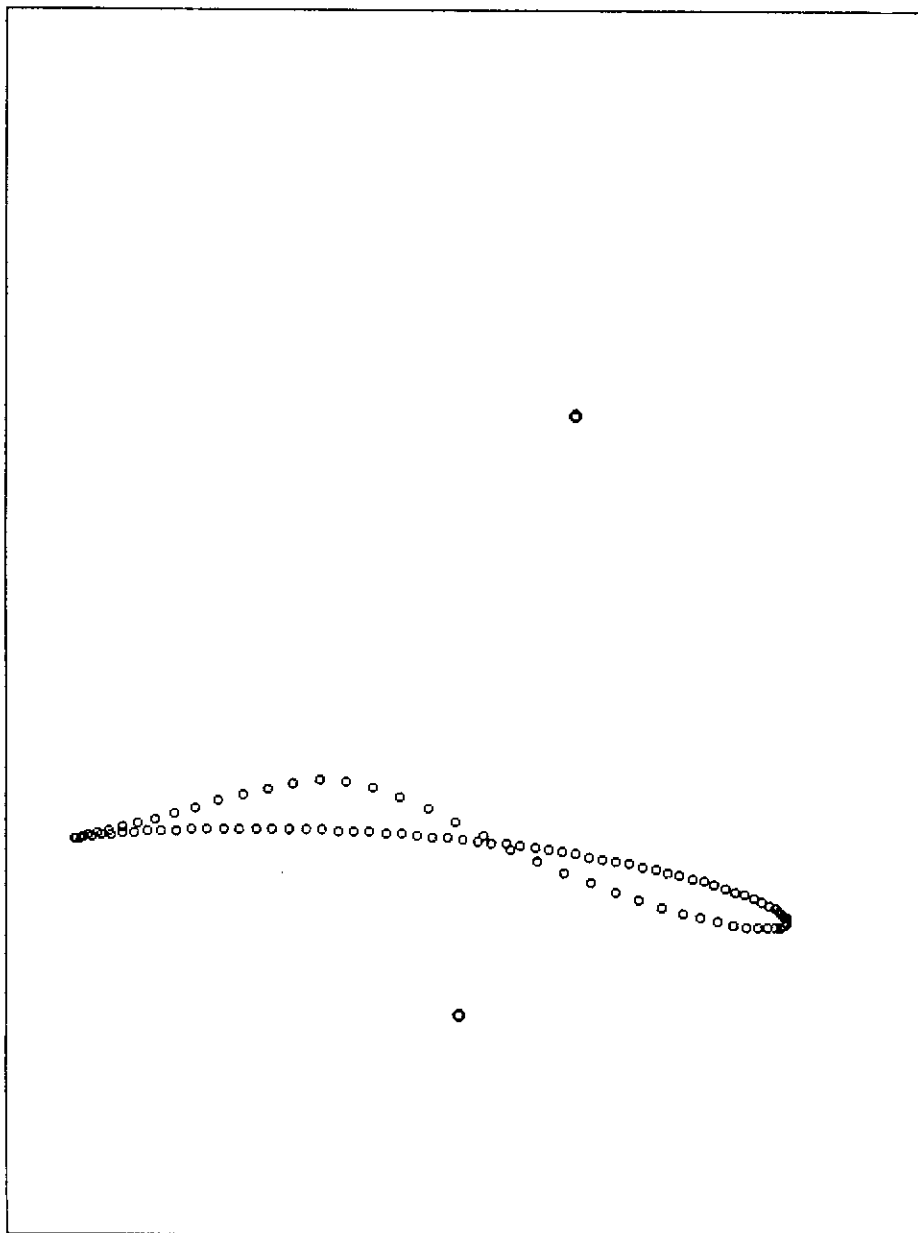












EL PROBLEMA EN EL PLANO HIPERBOLICO.

INTRODUCCION.

Presupondremos en lo subsiguiente cierta familiaridad con el álgebra de los números complejos.

El plano hiperbólico tiene dos representaciones estándar como subconjuntos de $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$. La primera es

$$\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z > 0\}$$

y la segunda

$$\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} = \{z \in \mathbf{C} \mid \|z\| < 1\}$$

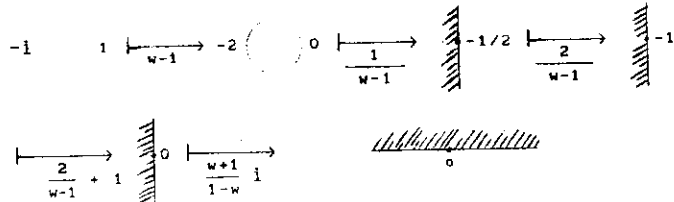
\mathbf{D} y \mathbf{H} son, respectivamente, el disco y el plano de Poincaré.

No es difícil verificar que la transformación

$$z \xrightarrow{T} \frac{z-i}{z+i} \quad \forall z \in \mathbf{H}$$

define una biyección de \mathbf{H} sobre \mathbf{D} tal que su inversa está dada por

$$w \mapsto \frac{1}{i} \frac{w+1}{w-1} = \frac{w+1}{1-w} i = (-i) \left[\frac{2}{w-1} + 1 \right]$$

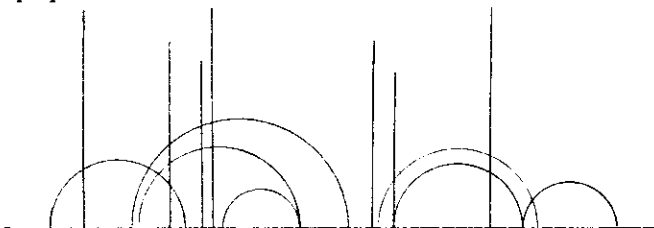


Nota. $z \mapsto \frac{1}{z}$ manda el círculo $\gamma(\theta) = e^{i\theta} - 1$ en $\sigma(\theta) = \frac{1}{2}(1 + i\cot \theta/2)$.

Aunque esencialmente iguales, ambos modelos tienen ventajas y desventajas. En general ciertos cálculos son más fáciles en **H** pero para nuestros propósitos **D** se presta mejor para la computación gráfica pues, en la métrica euclidiana, **D** está acotado.

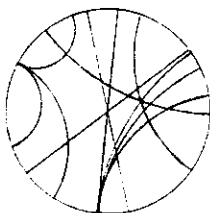
RECTAS E INCIDENCIA.

DEFINICION. Una línea hiperbólica en **H** es o bien un semicírculo ortogonal al eje de las abscisas, o bien una semirecta que emana del mismo eje y es perpendicular a este.



Observe que el eje de las abscisas no pertenece a **H**.

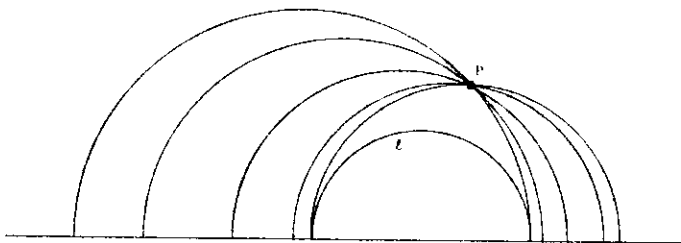
La imagen bajo $T : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{D}$ de una línea hiperbólica en **H** corresponde o bien a la intersección con **D** de un círculo ortogonal al círculo unitario o bien a un diámetro en **D**. Estas son las líneas hiperbólicas en **D**.



Por lo tanto desde el punto de vista estructural, las propiedades de incidencia en \mathbf{H} son las mismas que en \mathbf{D} .

Observe que el círculo unitario no es parte de \mathbf{D} .

Si bien en la esfera no hay paralelismos, aquí la situación es otra: Para cualquier línea hiperbólica y cualquier punto fuera de esta, entonces hay un número infinito de paralelas a la línea que pasan por el punto dado.



Toda línea divide al plano hiperbólico en dos semiplanos.

En el plano hiperbólico es fácil definir, y se deja al lector, las ideas de rayo, segmento, ángulo y triángulo. Es sólo en la esfera donde hay que tener un poco de cuidado.

Antes de continuar abriremos un paréntesis para definir al grupo de transformaciones de Möbius y el concepto de razón cruzada.

Podemos afirmar que toda la estructura del plano hiperbólico está permeada por estas nociones.

EL GRUPO DE MOBIUS.

DEFINICION. Sean $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$. Entonces la función

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es una transformación de Möbius. Al conjunto de estas transformaciones lo denotaremos por *Mob*.

La función f está definida en todo \mathbb{C} excepto para $z = -d/c$ (si $c \neq 0$). Sin embargo es útil pensar que $f(-d/c) = \infty$ y $f(\infty) = a/c$. Si $c = 0$ entonces $f(\infty) = \infty$.

Observe que *Mob* es cerrado bajo composición de funciones y que la inversa de una $f \in \text{Mob}$ está dada por

$$f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Sea λ un complejo distinto de cero. Entonces como

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}$$

queda claro que los coeficientes a, b, c, d no determinan a f . Sin embargo, si además exigimos que $ad - bc = 1$, entonces la ambigüedad se reduce a un factor de $+1$ o -1 .

TEOREMA. *Id $\neq f \in \text{Mob}$ tiene a lo más dos puntos fijos.*

Demostración: $f(z) = z$ implica $cz^2 + (d - a)z + b = 0$. Y esta ecuación tiene a lo más dos soluciones. ■

COROLARIO. *Si f y $g \in \text{Mob}$ coinciden en tres puntos distintos, entonces $f = g$.*

Demostración: $f \circ g^{-1}$ tiene tres puntos fijos. ■

TEOREMA. Dados z_2, z_3, z_4 distintos (inclusive uno puede ser ∞) entonces existe una única $f \in Mob$ tal que $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = 0$, y $f(z_4) = \infty$.

Demostración: $f(z) = \{(z - z_3)/(z - z_4)\} / \{(z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)\}$. ■

COROLARIO. Dadas dos ternas de puntos distintos, digamos z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 , entonces existe una única $f \in Mob$ tal que $f(z_i) = w_i \quad \forall i = 1, 2, 3$.

DEFINICIONES. $f \in Mob$ es una translación si es de la forma

$$f(z) = z + b \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

$F \in Mob$ es una homotecia si es de la forma

$$f(z) = az \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad \text{con } 0 \neq a \in \mathbf{R}.$$

$f \in Mob$ es una rotación si es de la forma

$$f(z) = az \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad \text{con } a \in \mathbf{C}, \|a\| = 1.$$

$f \in Mob$ es loxodrómica (o una loxodromía) si es de la forma

$$f(z) = az \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad \text{con } a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \|a\| \neq 1.$$

La inversión $f \in Mob$ es la transformación

$$f(z) = 1/z \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

Decimos que una colección de transformaciones genera a un grupo si todo elemento del grupo se puede expresar como la composición de elementos de la colección dada.

TEOREMA. *Mob está generado por las translaciones, las rotaciones, las homotecias y la inversión.*

Demostración: Supongamos primero que c es distinto de 0 entonces, si $f_1(z) = z + d/c$, $f_2(z) = 1/z$, $f_3(z) = (bc - ad)z/c^2$ y $f_4(z) = z + a/c$ tenemos que $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Si f_3 es loxodrómica, entonces es la composición de una rotación y una homotecia. Si $c = 0$ entonces definiendo $f_1(z) = (a/d)z$ y $f_2(z) = z + (b/d)$, tenemos que $f = f_2 \circ f_1$. ■

COROLARIO. *Toda $f \in Mob$ transforma círculos en círculos o en rectas.*

Demostración: Basta con hacer el análisis para la inversión. Y para este caso es sencillo transformar, bajo f , la ecuación del círculo. ■

TEOREMA. *La función que a cada $f \in Mob$ le asocia la matriz*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[donde $f(z) = (az + b)/(cz + d)$] manda la composición de transformaciones en la multiplicación de sus matrices asociadas.

El valor de este teorema es el de facilitar los cálculos.

DEFINICION. $f_1, f_2 \in Mob$ son conjugados si existe $g \in Mob$ tal que $f_2 = g \circ f_1 \circ g^{-1}$. Observe que si ζ es un punto fijo para f_1 entonces $g(\zeta)$ es fijo para f_2 .

TEOREMA. *Toda $f \in Mob$ es conjugada a una translación, a una homotecia, a una rotación o a una loxodromía.*

Demostración: Conjugue f para obtener una transformación cuyo único punto fijo es ∞ o cuyos puntos fijos son el cero y el ∞ . ■

DEFINICION. Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ entonces su razón cruzada (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la única transformación de Möbius que manda z_2 en 1, z_3 en 0 y z_4 en ∞ .

Por ejemplo $(z, 1, 0, \infty) = z$.

PROPOSICION. Sean $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ puntos distintos y sea $f \in Mob$. Entonces $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \quad \forall z_1 \in \mathbf{C}$.

TEOREMA. Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ puntos distintos entonces (z_1, z_2, z_3, z_4) es un número real si y sólo si los cuatro puntos se encuentran en un círculo.

Demostración: Definamos $f(z) = (z, z_2, z_3, z_4) \quad \forall z \in \mathbf{C}$. Entonces $f^{-1}(\mathbf{R}) = \{z \mid (z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbf{R}\}$. Pero como la imagen de \mathbf{R} bajo una transformación de Möbius es un círculo entonces el resultado de aquí se desprende. ■

TEOREMA. $f \in Mob$ es tal que $f(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ si y solamente si $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ (y suponiendo que $ad - bc = 1$).

DEFINICION. Al conjunto de transformaciones en Mob que preservan \mathbf{H} lo denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$.

TEOREMA. $f \in Mob$ es tal que $f(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ si y sólo si $d = \bar{a}$ y $c = \bar{b}$.

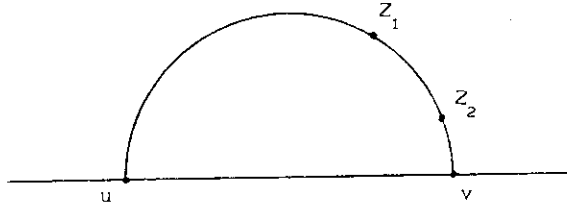
DEFINICION. Al conjunto de transformaciones en Mob que preservan \mathbf{D} lo denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathbf{D}}$.

TEOREMA. $\mathcal{M}_{\mathbf{D}}$ no tiene transformaciones lozdrómicas. Y por supuesto tampoco $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$.

Toda esta discusión ha sido geométrica y algebraica. Si bien el siguiente teorema tiene una demostración elemental, nos conformaremos aquí con una que usa cálculo.

TEOREMA. Sean λ y γ curvas diferenciables con $\lambda(0) = \gamma(0) = z_0$. Sea $f \in Mob$. Entonces el ángulo formado por λ y γ en z_0 es el mismo que el ángulo formado por $f \circ \lambda$ y $f \circ \gamma$ en $f(z_0)$.

Demostración: Lo que estamos diciendo es que los vectores $\lambda'(0)$ y $\gamma'(0)$ forman el mismo ángulo que $(f \circ \lambda)'(0)$ y $(f \circ \gamma)'(0)$. El cálculo es rutinario. ■

DISTANCIA EN EL PLANO HIPERBOLICO.

DEFINICION. Sean z_1, z_2 puntos en el plano hiperbólico y sean u y v los puntos al infinito de la línea hiperbólica que los une. Entonces la distancia entre z_1 y z_2 se define como

$$d(z_1, z_2) = | \ln(z_1, z_2, u, v) |$$

No es difícil ver que (z_1, z_2, u, v) siempre es, además de real, positivo.

Como $(z_1, z_2, u, v) = (z_2, z_1, v, u) = 1/(z_1, z_2, v, u) = 1/(z_1, z_2, u, v)$ entonces la distancia entre z_1 y z_2 no depende del orden en que tomemos a u, v . Y además, $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$.

Para cualquier recta que contenga a z se tiene que $(z, z, u, v) = 1$. Por lo tanto $d(z, z) = 0$ sin ambigüedad.

Por otro lado, $d(z_1, z_2) = 0$ implica $z_1 = z_2$.

Observe que si $z_1 = a + iy_1$, $z_2 = a + iy_2$, entonces

$$d(z_1, z_2) = \left| \ln \frac{y_1}{y_2} \right|$$

Algo de Geometria Diferencial.

Demostrar la desigualdad del triángulo no me fué nada sencillo (ver las referencias). Creo que la manera mas natural es la siguiente:

La longitud de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ está dada por la integral

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b ((x')^2(t) + (y')^2(t))^{1/2} dt$$

(comparar esto con la discusión de distancia en la esfera).

La forma que tiene la geometría diferencial de generalizar esta idea es cambiando el producto escalar en cada punto del dominio geométrico en consideración y definiendo longitud de arco del mismo modo, pero ahora la función $\| \cdot \|$ también dependerá del lugar en donde la curva esté pasando. Es con este artificio que la idea fundamental de curvatura de un espacio puede ser definida intrínseca y rigurosamente. Para nuestro ejemplo definamos

$$\begin{aligned} (u_1, v_1)_{(x,y)} \circ (u_2, v_2)_{(x,y)} &= \frac{1}{y}(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) \\ &= \frac{1}{y}(u_1 u_2 + v_1 v_2) \end{aligned}$$

donde el subíndice vectorial (x, y) indica que los vectores se piensan "anclados" ahí. Entonces,

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{(x,y)} dt = \int_a^b \frac{1}{y(t)} ((x')^2(t) + (y')^2(t))^{1/2} dt$$

Ahora la distancia entre dos puntos se define como el ínfimo de los números $\Lambda(\gamma)$ donde γ varía sobre el conjunto de curvas que unen los puntos dados. Con esta definición, la desigualdad del triángulo es casi obvia. En este contexto una geodésica es (la imagen de) una curva cuya longitud de arco realiza la distancia.

TEOREMA. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{H}$ una curva. Entonces

$$\Lambda(\gamma) \geq \ln(y(b)/y(a)).$$

Demostración:

$$\Lambda(\gamma) \geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln(y(b)/y(a))$$

■

TEOREMA. La geodésica de (a, y_0) a (a, y_1) , con $y_1 > y_0$ es $\gamma(t) = a + iy_0 \exp(t)$, $\forall t \in [0, \ln(y_1/y_0)]$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \Lambda(\gamma) &= \int_0^{\ln(y_1/y_0)} \frac{((a')^2 + ((y_0 e^t)')^2)^{1/2}}{y_0 e^t} dt \\ &= \int_0^{\ln(y_1/y_0)} 1 dt = \ln(y_1/y_0) \end{aligned}$$

■

TEOREMA. Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}}$. Entonces $\Lambda(f \circ \gamma) = \Lambda(\gamma)$ para toda curva γ en \mathbf{H} .

Demostración: Basta con hacer el cálculo.

■

COROLARIO. Si γ es una geodésica y $f \in \mathcal{M}_{\mathbf{H}}$, entonces $f \circ \gamma$ es una geodésica.

TEOREMA. La distancia definida por la razón cruzada y la distancia definida por la geometría diferencial es la misma.

ESTRUCTURA CONFORME.

La medida angular en el plano hiperbólico se define a través de la medida euclidiana de la siguiente manera: Sean r_1 y r_2 dos rayos en P . Entonces, desde el punto de vista euclidiano, r_1 y r_2 son segmentos de círculo con tangentes en P . La medida del ángulo de estas tangentes es la medida del ángulo hiperbólico $r_1 \cup r_2$.

Hay otros modelos de la geometría hiperbólica pero \mathbf{H} y \mathbf{D} son particularmente bien aceptados por esta propiedad. Que la medida angular en \mathbf{H} y \mathbf{D} sea euclidiana se resume diciendo que estos son modelos conformes en \mathbf{R}^2 .

ISOMETRIAS.

Es ahora obvio que $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ y $\mathcal{M}_{\mathbf{D}}$ son grupos de isometrías. Es consecuencia del lema de Schwarz en variable compleja el hecho de que estas son todas las isometrías que preservan orientación en $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}$ y $\mathcal{M}_{\mathbf{D}}$ respectivamente. Si bien este resultado es importante, aquí lo enunciamos con el sólo propósito de decir "son todas". Por otro lado, no lo necesitamos.

Agregando una reflexión, digamos $z \rightarrow -\bar{z}$, se completan los grupos de isometrías.

Al igual que en las geometrías plana y esférica, el grupo de isometrías que preservan orientación y dejan fijo a un punto es isomorfo al círculo unitario.

En particular, para $0 \in \mathbf{D}$ tenemos que las rotaciones hiperbólicas (en \mathbf{D}) son exactamente las rotaciones euclidianas $\mathcal{R}_\theta(z) = \exp(i\theta)z$. Para un punto $a \in \mathbf{D}$ distinto de cero basta con conjugar por

$$\varphi_a(z) = \frac{z+a}{\bar{a}z+1} \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{pmatrix}$$

que es tal que $\varphi_a(0) = a$, para obtener una rotación $\varphi_a \circ \mathcal{R}_\theta \circ \varphi_a^{-1}$ con centro en a . Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} - \|a\|^2 e^{-i\theta/2} & -a(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) \\ a(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) & e^{i\theta/2} - \|a\|^2 e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} - \|a\|^2 & -a(e^{i\theta} - 1) \\ a(e^{i\theta} - 1) & 1 - \|a\|^2 e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

Es claro ahora que el plano hiperbólico es homogéneo e isotrópico; pues podemos rotar alrededor de un punto en cualquier ángulo y podemos desplazar el espacio de cualquier punto a cualquiera otro (usando $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$).

Para mandar cualquier punto de \mathbf{H} en cualquiera otro de \mathbf{H} , basta con mandar a la unidad imaginaria en un punto arbitrario w a través de una transformación α_w . Luego la composición $\alpha_w \circ \alpha_y^{-1}$ mandará a y en w .

No es difícil checar que $T(z) = (z-i)/(z+i)$ que identifica a \mathbf{H} con \mathbf{D} es tal que $T^{-1} \circ \varphi_{T(v)} \circ T(i) = w$.

Por otro lado, las rotaciones alrededor de la unidad imaginaria i están dadas por las transformaciones de la forma $H(z) = (az+b)/(a-bz)$. El ángulo es de θ donde $e^{i\theta/2} = (a+bi)/\|a+bi\|$.

PARAMETRIZACION DE GEODESICAS.

En esta sección trabajaremos exclusivamente en \mathbf{H} .

Al discutir la desigualdad del triángulo encontramos que la geodésica, a velocidad constante 1 de (a, y_0) a (a, y_1) con $y_1 > y_0$, es $\gamma(t) = a + iy_0 \exp(t)$, $\forall t \in [0, \ln(y_1/y_0)]$.

Para encontrar la geodésica que une dos puntos basta con girar con centro en el primero hasta que ambos queden en una línea (euclidiana) vertical y luego girar, con un ángulo negativo la geodésica vertical parametrizada hasta toparse nuevamente con el segundo punto.

Consideremos nuevamente a nuestras ciudades enemigas R y B . Si $\gamma(t)$ es la geodésica (a velocidad 1) de R a B entonces

$$P_\psi(t_1) = \mathcal{R}_\psi \gamma(\rho t_1)$$

donde \mathcal{R}_ψ es la rotación con centro en R y ángulo ψ , nos da la geodésica que emana de R a un ángulo ψ con respecto al segmento \overline{RB} a velocidad ρ .

Si d es la distancia entre R y B , entonces

$$S_\varphi(t_2) = \mathcal{R}_{-\varphi} \gamma(d - \sigma t_2)$$

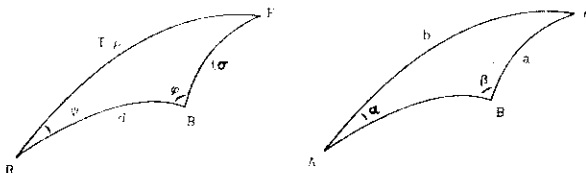
donde $\mathcal{R}_{-\varphi}$ es la rotación con centro en B y ángulo $-\varphi$, nos da la geodésica que emana de B a un ángulo $-\varphi$ con respecto al segmento \overline{BR} a velocidad ρ .

Para simplificar los cálculos, tomemos $R = i$ y $B = \exp(d)i$. Entonces,

$$P_\psi(t_1) = \frac{\text{sen}(\psi/2) + i(\cos(\psi/2)) \exp(t_1 \rho)}{\cos(\psi/2) - i(\text{sen}(\psi/2)) \exp(t_1 \rho)}$$

$$S_\varphi(t_2) = \frac{-\text{sen}(\varphi/2) + i(\cos(\varphi/2)) \exp(-t_2 \sigma)}{\cos(\varphi/2) + i(\text{sen}(\varphi/2)) \exp(-t_2 \sigma)} \exp(d)$$

TRIGONOMETRIA.



Para el tiempo T de la intercepción, se cumple que

$$P_{\psi}(T) = S_{\varphi}(T)$$

Obteniendo por tanto una ecuacion compleja de la cual se pueden igualar partes reales e imaginarias. El cálculo, que no ofrece ninguna dificultad, arroja las identidades

$$\tan \alpha/2 \tan \beta/2 = \frac{\sinh (a + b) - \sinh d}{\sinh (a + b + c)}$$

$$\tan^2 \beta/2 = \frac{\cosh (d - b) - \cosh (a)}{\cosh (a) - \cosh (d + b)}$$

También es posible obtener

$$f(a)f(b)f(c)\sin (\alpha - \beta) + f(a)\sin \beta - f(b)\sin \alpha = 0$$

$$f(a)f(b)\cos (\alpha - \beta) + f(a)\cos \beta + f(b)\cos \alpha = f(d)$$

donde $f(x) = \tanh (x/2)$.

NOTAS SOBRE GRAFICACION.

Aquí también hubo que recurrir al método de Newton para encontrar el tiempo de la operación. Como en la ecuación involucrada (se dan dos versiones) aparecieron funciones hiperbólicas, la convergencia del método fue más delicada.

Sin embargo, dado que el disco unitario \mathbf{D} es un subconjunto acotado, el problema de proyectar la situación a la pantalla fue mucho más fácil.

Las ecuaciones finales utilizadas en el programa fueron :

$$1) f(x) = \cos^2(\varphi/2)(\cosh(d - \sigma x) - \cosh(\rho x)) - \sin^2(\varphi/2)(\cosh(\rho x) - \cosh(d + \sigma x)).$$

$$2) f'(x) = \cos^2(\varphi/2)(-\sigma \operatorname{senh}(d - \sigma x) - \rho \operatorname{senh}(\rho x)) - \sin^2(\varphi/2)(\rho \operatorname{senh}(\rho x) - \sigma \operatorname{senh}(d + \sigma x)).$$

$$3) T = x \text{ para } f(x) = 0.$$

$$4) \cosh(\psi) = (\cosh(\rho T) \cosh(d) - \cosh(\sigma T)) / \operatorname{senh}(\sigma T) \operatorname{senh}(d).$$

$$5) \operatorname{senh}(\psi) = \operatorname{senh}(\sigma T) \operatorname{senh}(\varphi) / \operatorname{senh}(\rho T).$$

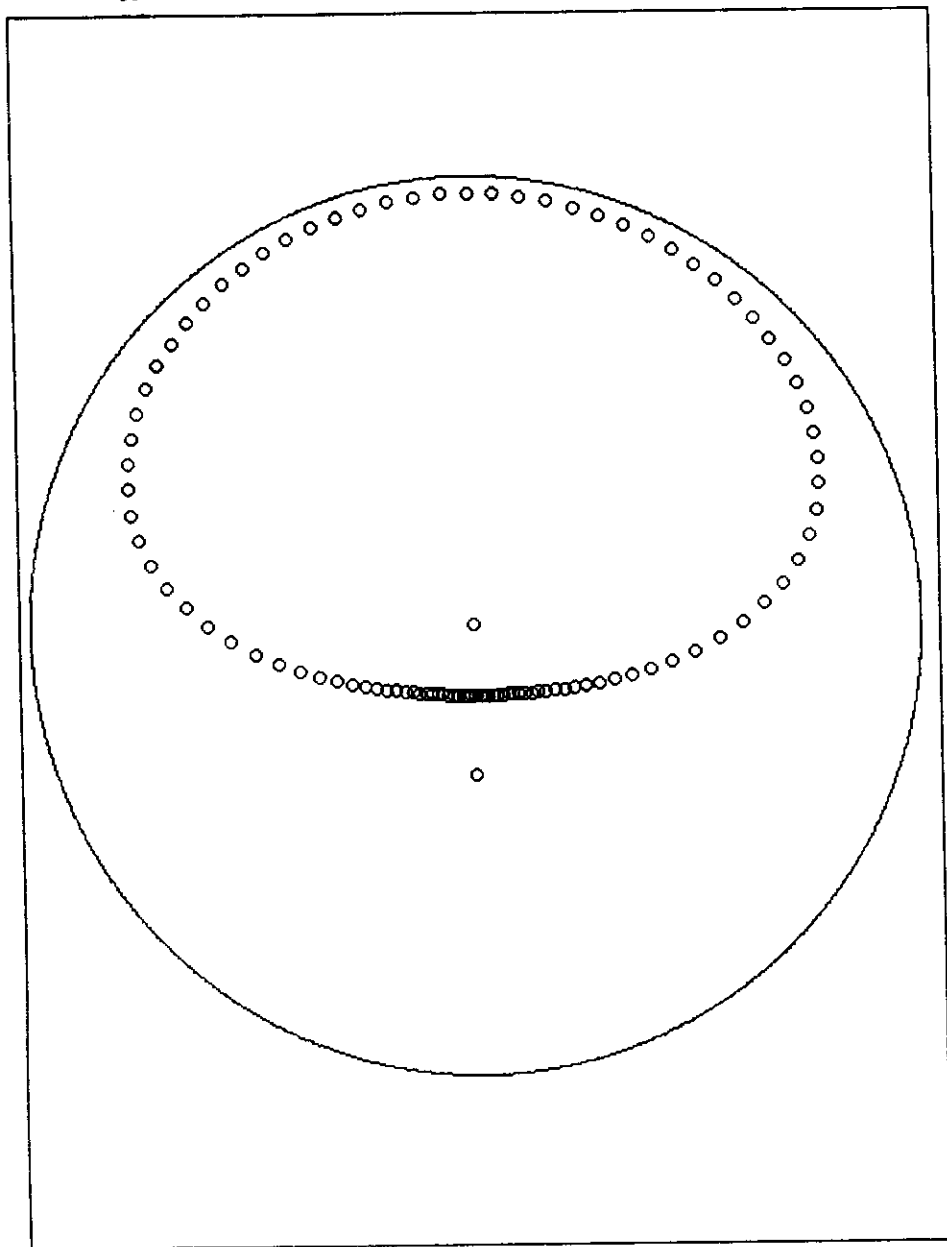
O bien (3), (4), y (5) pero usando

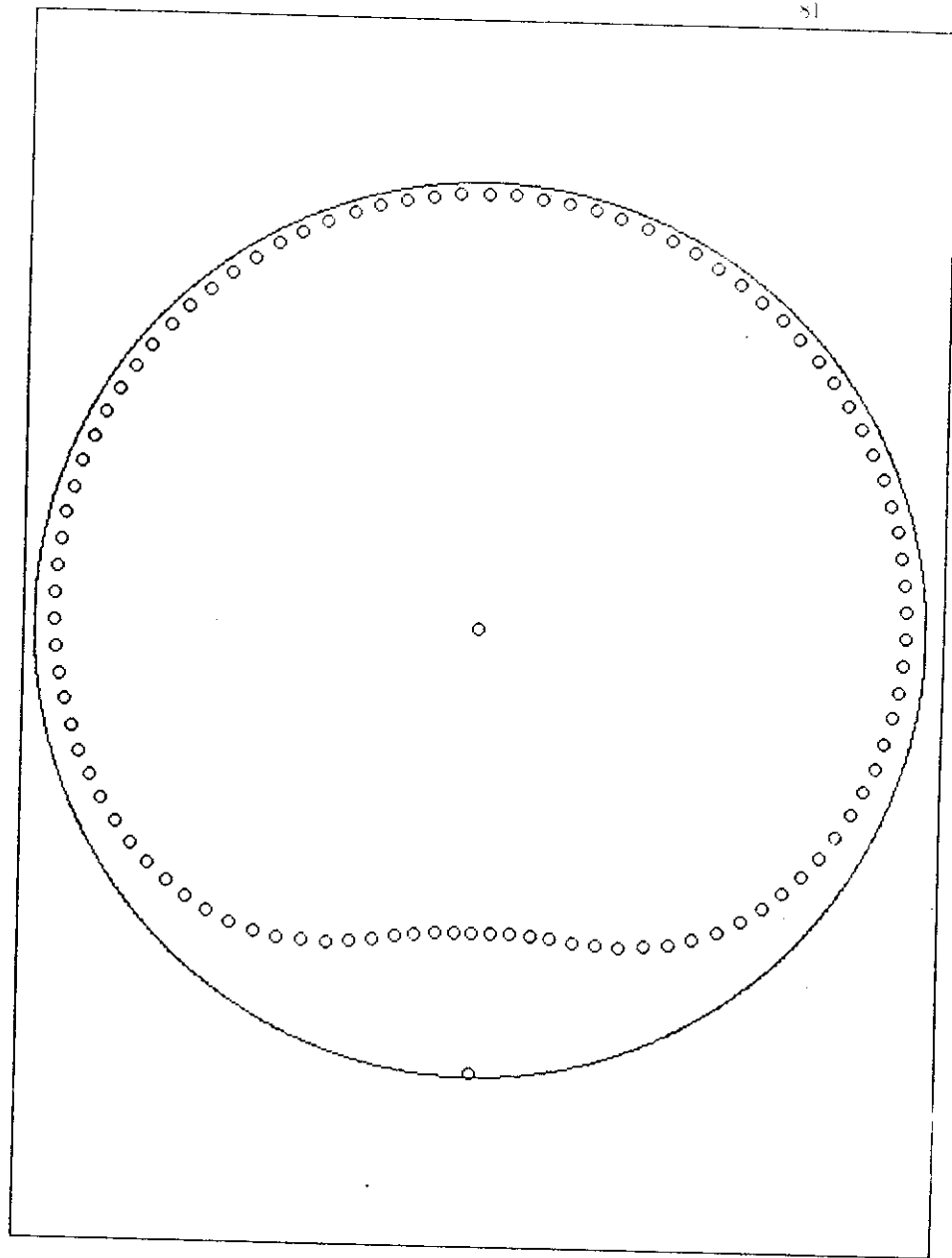
$$1') f(x) = \cosh(\rho x) - \cosh(d) \cosh(\sigma x) + \operatorname{senh}(d) \operatorname{senh}(\sigma x) \cos(\varphi).$$

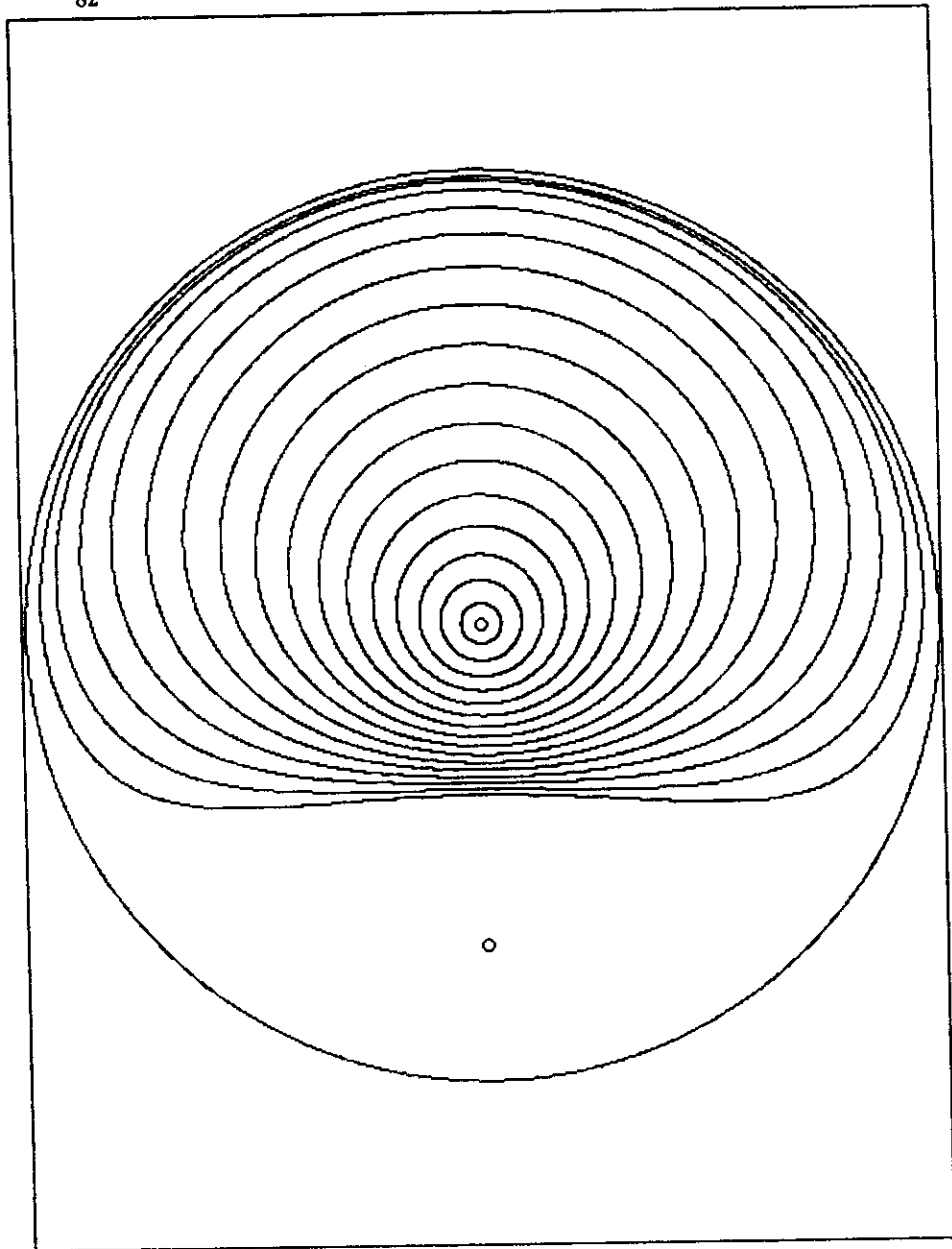
$$2') f'(x) = \rho \operatorname{senh}(\rho x) - \sigma \cosh(d) \operatorname{senh}(\sigma x) + \sigma \operatorname{senh}(d) \cosh(\sigma x) \cos(\varphi).$$

Observe que (1) provino del enfoque husseiniano, pero (1'),(4) y (5) son ecuaciones de la trigonometría hiperbólica clásica. Los resultados obtenidos con ambos juegos de ecuaciones son los mismos e igualmente no hay variación significativa en la rapidéz de convergencia.

EPILOGO: Cabe notar que para las geometrías esférica e hiperbólicas no se dió una caracterización de la configuración de Saddam Hussein. Creo que el problema es no trivial. Y yo no pude resolverlo. También, el tratamiento de la trigonometría hiperbólica es incompleto. Sin embargo esto pienso que no es tan difícil incorporarlo. Finalmente quiero darle las gracias a la eficientísima Malú por haber mecanografiado este documento.







Bibliografía

- [1] Blumenthal, Leonard M., *A Modern View of Geometry*, W. H. Freeman and Co.; San Francisco; 1961.
- [2] Conway, John B., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.
- [3] Eves, Howard, *Estudio de las Geometrias I y II*, UTEHA, 1985.
- [4] Fishback, W. T., *Projective and Euclidean Geometry*, (Sec. ed.), John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney-Toronto, 1969.
- [5] Lehner, Joseph, *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston, New York-Chicago-San Francisco-Toronto-London, 1965.
- [6] Meschkowski, Herbert, *Noneuclidean Geometry*, Academic Press, New York-London, 1964.
- [7] Ryan, Patrick J., *Euclidean and Non-euclidean Geometry: An Analytic Approach*, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York-Port Chester-Melbourne-Sydney, 1989.
- [8] Shively, L. S., *An Introduction to Modern Geometry*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1939.