

# Valuación de opciones financieras mediante la teoría de la dualidad de la programación lineal

J. Agustín Cano Garcés

jacano@unam.mx

Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias, UNAM  
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria  
04510 México, D.F.

## Resumen

Se presenta un método para determinar el precio de cualquier opción, siempre que el precio del subyacente evolucione de acuerdo a un modelo binomial. Si este no fuera el caso, es decir, si no es aceptable una evolución donde únicamente se permitan dos precios distintos en el siguiente periodo, se puede considerar entonces un modelo trinomial, cuatrinomial, o, en general, un modelo  $n$  – *nomial*. En estos casos, lo que el método genera son los valores mínimo y máximo que puede **alcanzar** el precio de la opción.

El enfoque tradicional que se utiliza, de manera generalizada, para valorar opciones en el caso binomial, consiste en la determinación de un portafolio de valores que replique el pago de la opción al final del periodo. Este portafolio, compuesto de una cierta cantidad del subyacente adicionada con un bono, se determina de una forma muy simple: resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

A diferencia de lo anterior, el método aquí expuesto plantea un par de problemas de programación lineal que permiten acotar el valor de cualquier opción, en realidad, de cualquier reclamación contingente, y que, en el caso más simple, con un modelo binomial, determinan un **único** valor. La utilización de la Teoría de la Dualidad permite resolver dichos problemas con extrema simplicidad, sin necesidad de evocar los siempre ubicuos algoritmos que exigen el cálculo de tablas, engorrosas para

una gran parte de los usuarios. Al aplicar dicha teoría, el problema queda reducido a un planteamiento gráfico en  $R^2$ , lo que permite visualizar de inmediato la solución buscada. Adicionalmente, pueden calcularse ahí mismo las famosas probabilidades riesgo-neutral, que corresponden, de manera natural, con las ponderaciones asociadas a los puntos extremos involucrados.

Para los lectores no familiarizados con los derivados financieros o con la teoría de la dualidad de la programación lineal se añade un apéndice al final.

## 1. Planteamiento del problema

Considérese un subyacente, tal que la evolución de su precio,  $S$ , puede modelarse a través de un árbol binomial, con un solo periodo, y sobre este subyacente una opción, o cualquier reclamo contingente, cuyo pago, al final, se puede establecer desde el inicio, para cada uno de los dos precios posibles del subyacente.

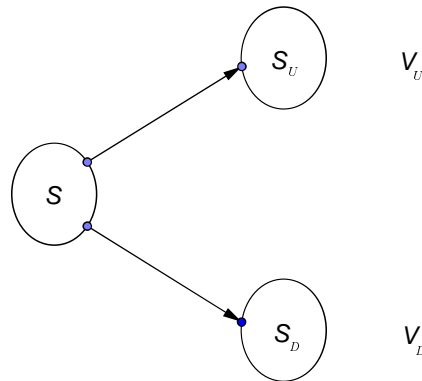


Figura 1: Arbol binomial

Es decir, conociendo el precio actual,  $S$ , los dos precios que se obtendrían dentro de un periodo,  $S_U$  y  $S_D$ , así como los pagos correspondientes de la opción,  $V_U$  y  $V_D$ , se desea calcular el precio de la misma. Para este fin se considerarán dos conjuntos de portafolios: uno cuyos valores al final sean siempre inferiores o iguales a los que pagaría la opción, y el otro, donde estos valores finales sean superiores o iguales a los pagos correspondientes de la opción. El mayor valor del primer conjunto constituye el ínfimo para el precio de la opción, mientras que el mínimo asociado al segundo conjunto corresponderá al supremo del precio de la misma.

### 1.1. Ejemplo 1

Para una mejor comprensión de lo citado anteriormente, considérese una opción de compra, un **call**, con precio de ejercicio 126, sobre un subyacente cuyo precio evoluciona de acuerdo al árbol presentado en la figura 2; se han añadido en la gráfica los pagos que se obtendrían en cada uno de los dos nodos terminales.

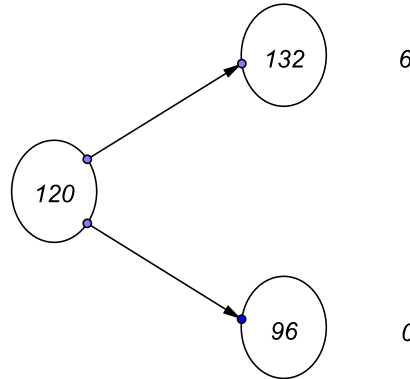


Figura 2: Valuando un **call**

Con el objetivo de calcular el precio de esta opción, se procede a formar portafolios con únicamente dos activos: una cierta cantidad del subyacente, llamémosla  $\Delta$ , y un bono con valor nominal, al vencimiento,  $B$ . Además, se tiene la tasa de interés libre de riesgo, 6 %, capitalizable continuamente, aplicable a este bono, y una última suposición es que el periodo considerado en el árbol tiene una duración de un mes.

El valor actual de un portafolio tal es  $120 \Delta + e^{-.06(1/12)} B$ ; al final, son dos los posibles valores del portafolio, dependiendo del precio que se materialice para el subyacente:  $132 \Delta + B$  ó  $96 \Delta + B$ . El siguiente paso es considerar todos los portafolios que satisfagan la condición

$$\begin{aligned} 132 \Delta + B &\leq 6 \\ 96 \Delta + B &\leq 0 \end{aligned}$$

es decir, aquellos cuyo valor al vencimiento nunca es mayor que el correspondiente pago de la opción.

Es bien conocido el hecho de que el precio de la opción,  $V$ , será mayor o igual al valor de cualquiera de estos portafolios, dado que es un instrumento financiero que provee pagos que nunca son inferiores a los de dichos portafolios, [2]. En particular, si se determina el portafolio con máximo valor, este constituirá una cota inferior para el valor de la opción.

Afortunadamente, es posible determinar el portafolio con el mayor valor, dado que este se obtiene al resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx } z_{\text{abajo}} &= 120 \Delta + e^{-0.06 (1/12)} B \\ \text{s.c.} \\ 132 \Delta + B &\leq 6 \\ 96 \Delta + B &\leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Analogamente, si se consideran portafolios cuyo valor al final del periodo nunca sea inferior al pago que se obtiene de la opción, entonces el valor mínimo de todos estos portafolios constituye una cota superior para  $V$ . El problema de programación lineal correspondiente será

$$\begin{aligned} \text{mín } z_{\text{arriba}} &= 120 \Delta + e^{-0.06 (1/12)} B \\ \text{s.c.} \\ 132 \Delta + B &\geq 6 \\ 96 \Delta + B &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Más adelante se demuestra que, bajo ciertas condiciones, este par de problemas siempre tienen solución para cualquier tipo de opción, y, en general, para cualquier reclamo contingente sobre el subyacente. El valor óptimo de ambas funciones objetivo satisface la siguiente relación:

$$(z_{\text{abajo}})_{\text{max}} \leq V \leq (z_{\text{arriba}})_{\text{min}}$$

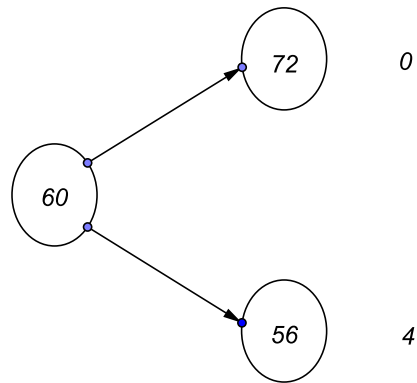
Anticipándose al método propuesto en este trabajo para resolver los problemas 1 y 2, se presenta en este punto, la solución a los mismos:

$$\begin{aligned} (z_{\text{abajo}})_{\text{max}} &= (z_{\text{arriba}})_{\text{min}} = 4.0798 \\ \Delta &= 1/6 \\ B &= -16 \end{aligned}$$

## 1.2. Ejemplo 2

Un ejemplo adicional: una opción de venta, un **put**, con precio de ejercicio 60, sobre un subyacente cuyo precio evoluciona según el árbol que se proporciona en la siguiente figura, en la cual se han añadido ya los pagos del **put** para cada nodo terminal.

Suponiendo que ahora la tasa de interés libre de riesgo es 4%, capitalizable continuamente, y que el periodo considerado en el árbol tiene

Figura 3: Valuando un *put*

una duración de 3 meses, se plantean los problemas de programación lineal que se asocian a la valuación de la opción

$$\begin{aligned}
 \text{máx } z_{\text{abajo}} &= 60 \Delta + e^{-0.04(3/12)} B \\
 \text{s.c.} \\
 72 \Delta + B &\leq 0 \\
 56 \Delta + B &\leq 4
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{mín } z_{\text{arriba}} &= 60 \Delta + e^{-0.04(3/12)} B \\
 \text{s.c.} \\
 72 \Delta + B &\geq 0 \\
 56 \Delta + B &\geq 4
 \end{aligned} \tag{4}$$

Una vez más, se anticipa la solución a los problemas 3 y 4, la que se presenta en este punto:

$$\begin{aligned}
 (z_{\text{abajo}})_{\text{máx}} &= (z_{\text{arriba}})_{\text{mín}} = 2.8209 \\
 \Delta &= -1/4 \\
 B &= 18
 \end{aligned}$$

## 2. Generalización para el árbol binomial

Esperando que los dos ejemplos anteriores hayan cumplido con el propósito de que el lector adquiriera un mejor entendimiento del enfoque que se utiliza aquí para poder valorar opciones, se procede al planteamiento

de dichos problemas para el caso general, es decir, para la situación representada por el árbol en la figura 1. Se analizará primero la interrelación entre ambos problemas, así como las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia de soluciones óptimas.

$$\begin{aligned}
 \text{máx } z_{\text{abajo}} &= S \Delta + e^{(-r t)} B \\
 \text{s.c.} \\
 S_U \Delta + B &\leq V_U \\
 S_D \Delta + B &\leq V_D
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{mín } z_{\text{arriba}} &= S \Delta + e^{(-r t)} B \\
 \text{s.c.} \\
 S_U \Delta + B &\geq V_U \\
 S_D \Delta + B &\geq V_D
 \end{aligned} \tag{6}$$

**Teorema 2.1** *El conjunto de soluciones del problema (5) es no vacío, y también lo es el del problema (6).*

**Demostración:** *Recordando que una solución es una pareja  $(\Delta, B)$  que satisface todas las restricciones de un problema, se puede obtener una,  $(\hat{\Delta}, \hat{B})$ , común a ambos, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned}
 S_U \Delta + B &= V_U \\
 S_D \Delta + B &= V_D
 \end{aligned}$$

*Como es obvio, este sistema siempre tiene solución si  $S_U \neq S_D$ .*

**Teorema 2.2** *Si uno de los problemas, (5) ó (6), no tiene óptimo finito, el otro tampoco.*

**Demostración:** *Supóngase que el problema (5) es el que no tiene óptimo finito, es decir,  $\forall M, M \gg 0$  existe una solución  $(\Delta, B)$  que satisface  $z_{\text{abajo}} = S \Delta + e^{(-r t)} B > M$ ; considerar la reflexión del punto  $(\Delta, B)$  con respecto al punto  $(\hat{\Delta}, \hat{B})$ ,  $(2 \hat{\Delta} - \Delta, 2 \hat{B} - B)$ . Este punto reflejado es solución del problema (6), ya que*

$$\begin{aligned}
 S_U (2 \hat{\Delta} - \Delta) + (2 \hat{B} - B) &= 2(S_U \hat{\Delta} + \hat{B}) \\
 &\quad - (S_U \Delta + B) \geq 2V_U - V_U = V_U
 \end{aligned}$$

$$S_D (2 \hat{\Delta} - \Delta) + (2 \hat{B} - B) = 2(S_D \hat{\Delta} + \hat{B}) \\ - (S_D \Delta + B) \geq 2V_D - V_D = V_D$$

y además, el valor de la función objetivo en ese punto satisface  $z_{arriba} = S(2 \hat{\Delta} - \Delta) + e^{(-r t)}(2 \hat{B} - B) = 2(S \hat{\Delta} + e^{(-r t)} \hat{B}) - (S \Delta + e^{(-r t)} B) < -M + 2(S \hat{\Delta} + e^{(-r t)} \hat{B})$ , es decir, la función  $z_{arriba}$  puede decrecer tanto como se quiera: no existe óptimo finito. El caso restante, cuando es el otro problema el que no tiene óptimo finito, tiene una demostración análoga.

**Corolario 2.3** Si uno de los problemas, (5) ó (6), tiene óptimo finito, el otro también.

**Demostración:** Supóngase que el problema (5) es el que tiene óptimo finito; si el otro problema no tuviera óptimo finito, entonces, de acuerdo al teorema anterior, el primero tampoco lo tendría, contradiciendo la suposición inicial. Por lo tanto, el otro también tiene óptimo finito.

**Corolario 2.4** Si alguno de los problemas, (5) ó (6), tiene óptimo finito, entonces el valor de la opción está acotado.

**Demostración:** De acuerdo al corolario anterior,  $(z_{abajo})_{máx}$  y  $(z_{arriba})_{mín}$  existen, y para evitar cualquier posibilidad de arbitraje, [2], se debe cumplir la siguiente desigualdad

$$(z_{abajo})_{máx} \leq V \leq (z_{arriba})_{mín} \quad (7)$$

Considerados en conjunto, estos resultados afirman que si el óptimo de los problemas (5) ó (6) no existe, entonces no puede determinarse ningún valor para la opción, por lo que será muy importante establecer condiciones para la existencia de dichos óptimos.

### 3. Utilización de la Dualidad (caso binomial)

Asociado a cada uno de los problemas (5) y (6), se puede plantear el problema dual correspondiente a cada uno de ellos

$$\begin{aligned} \text{mín } w_{abajo} &= \pi_1 V_U + \pi_2 V_D \\ \text{s.c.} \\ \pi_1 S_U + \pi_2 S_D &= S \\ \pi_1 + \pi_2 &= e^{(-r t)} \\ \pi_1, \pi_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& \text{máx } w_{\text{arriba}} = \pi_1 V_U + \pi_2 V_D \\
& \text{s.c.} \\
& \pi_1 S_U + \pi_2 S_D = S \\
& \pi_1 + \pi_2 = e^{(-r t)} \\
& \pi_1, \pi_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Realizando el siguiente cambio de variables,  $\pi_1^* = \pi_1 e^{(r t)}$ ,  $\pi_2^* = \pi_2 e^{(r t)}$ , los problemas se transforman en

$$\begin{aligned}
& \text{mín } w_{\text{abajo}} = e^{(-r t)} (\pi_1^* V_U + \pi_2^* V_D) \\
& \text{s.c.} \\
& \pi_1^* S_U + \pi_2^* S_D = S e^{(r t)} \\
& \pi_1^* + \pi_2^* = 1 \\
& \pi_1^*, \pi_2^* \geq 0
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& \text{máx } w_{\text{arriba}} = e^{(-r t)} (\pi_1^* V_U + \pi_2^* V_D) \\
& \text{s.c.} \\
& \pi_1^* S_U + \pi_2^* S_D = S e^{(r t)} \\
& \pi_1^* + \pi_2^* = 1 \\
& \pi_1^*, \pi_2^* \geq 0
\end{aligned} \tag{11}$$

De acuerdo con la teoría de la dualidad [1], dado un par de problemas duales entre sí, si uno de ellos alcanza el óptimo, el otro también, y además las funciones objetivo correspondientes coinciden en valor, es decir

$$(z_{\text{abajo}})_{\text{máx}} = (w_{\text{abajo}})_{\text{mín}} \tag{12}$$

$$(z_{\text{arriba}})_{\text{mín}} = (w_{\text{arriba}})_{\text{máx}} \tag{13}$$

Observando con detenimiento estos problemas se obtienen dos conclusiones: **ambos** tienen el mismo conjunto de soluciones factibles, de hecho, una única solución factible, ya que se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y además, esta es la que permite expresar  $S e^{(r t)}$  como combinación lineal convexa de  $S_U$  y  $S_D$ . Entonces, una condición necesaria y suficiente para que **ambos** problemas tengan solución factible óptima es

$$S_U \geq S e^{(r t)} \geq S_D \tag{14}$$



Esta condición se satisface siempre en un entorno de equilibrio económico, pues de lo contrario existiría la posibilidad de arbitraje. Por lo tanto, suponiendo que dicha condición se cumple, se tiene la igualdad

$$(w_{abajo})_{\min} = (w_{arriba})_{\max} \quad (15)$$

Estas 3 últimas igualdades, junto con (7), permiten afirmar que en este caso se ha determinado un valor para la opción:

$$V = (w_{abajo})_{\min} = (w_{arriba})_{\max} \quad (16)$$

### 3.1. Solución gráfica del problema dual

En lugar de aplicar alguno de los algoritmos que involucran a la famosa tabla simplex, o utilizar el clásico procedimiento gráfico, que en este caso implicaría considerar un plano con ejes coordenados asociados a  $\pi_1^*$  y a  $\pi_2^*$ , se plantea aquí un enfoque diferente.

El problema (11) puede reformularse como

$$\begin{aligned} \text{máx } w_{arriba} &= e^{(-r t)} (w) \\ \text{s.c.} \\ \pi_1^* \begin{pmatrix} S_U \\ V_U \end{pmatrix} + \pi_2^* \begin{pmatrix} S_D \\ V_D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S e^{(r t)} \\ w \end{pmatrix} \\ \pi_1^* + \pi_2^* &= 1 \\ \pi_1^*, \pi_2^* &\geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Este replanteamiento establece que se desea encontrar una combinación lineal convexa de los puntos  $\begin{pmatrix} S_U \\ V_U \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} S_D \\ V_D \end{pmatrix}$  que satisfaga la restricción, y tal que el valor de  $w$  sea máximo. Graficando dichos puntos sobre un plano, el conjunto de combinaciones lineales convexas corresponde al segmento de recta que los une, y el **único** punto que satisface la restricción pertenece a tal segmento, como se ilustra en la figura 4.

Así, es extremadamente simple determinar el valor de la opción: se plantea la gráfica del segmento, se ubica el valor de  $S e^{(r t)}$  sobre el eje de las abscisas, y la ordenada correspondiente en el segmento proporciona el valor de  $w$ , con lo que, calculando  $e^{(-r t)} w$ , se obtiene el precio de la opción.

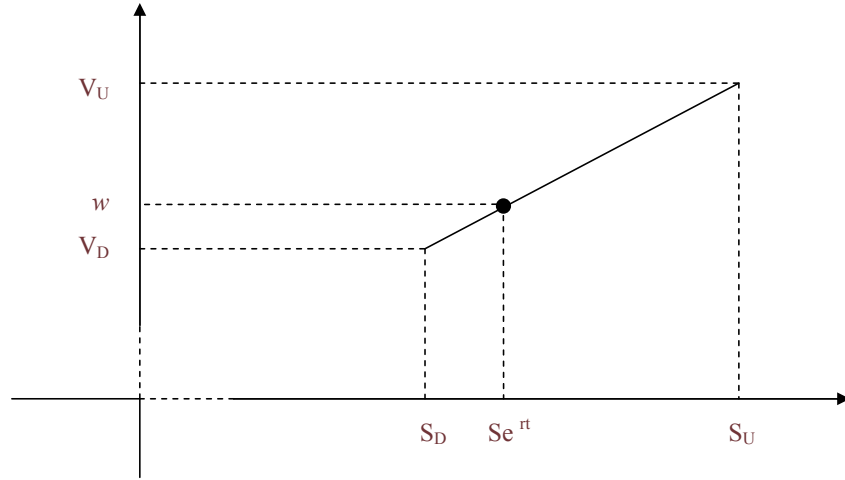


Figura 4: Gráfica asociada al dual

Pero esta gráfica posee **toda** la información deseada sobre la opción; se puede calcular el valor de  $\pi_1^*$ ,

$$\pi_1^* = \frac{S e^{(r t)} - S_D}{S_U - S_D} \quad (18)$$

que es, precisamente, el valor de la **probabilidad riesgo-neutral** tan ubicua en casi todos los textos que tratan el modelo binomial. Además, calculando la pendiente de la recta que subyace al segmento, se obtiene el valor óptimo de  $\Delta$  en el modelo primal asociado, (6),

$$\Delta^* = \frac{V_U - V_D}{S_U - S_D} \quad (19)$$

y, para finalizar, la ordenada al origen de esa recta es el valor óptimo de  $B$  en dicho primal,

$$B^* = -\Delta^* S_U + V_U (= -\Delta^* S_D + V_D) \quad (20)$$

### 3.2. Aplicación a los ejemplos

Utilizando las expresiones anteriores es posible confirmar las soluciones que se presentaron previamente para los ejemplos. En el caso del ejemplo 1 se tiene  $S_U = 132$ ,  $S_D = 96$ ,  $V_U = 6$ ,  $V_D = 0$ ,  $r = 0.06$ , y  $t = 1/12$ , por lo que  $\Delta^* = \frac{6-0}{132-96} = \frac{1}{6}$ , y  $B^* = -\frac{1}{6}(132) + 6 = -16$ ; además, se calcula  $\pi_1^* = \frac{120e^{(.06(1/12))}-96}{132-96} = 0.6834$ . De la gráfica, que se deja al lector como ejercicio, se obtiene el valor de  $w$ ,  $w = 0.6834(6) + 0.3166(0) =$

4.1003, lo que conduce al valor de la opción, al calcular el valor presente,  $V = e^{-(.06(1/12))}(4.1003) = 4.0798$ .

Análogamente, para el ejemplo 2 se tiene,  $S_U = 72$ ,  $S_D = 56$ ,  $V_U = 0$ ,  $V_D = 4$ ,  $r = 0.04$ , y  $t = 3/12$ , por lo que  $\Delta^* = \frac{0-4}{72-56} = -\frac{1}{4}$ , y  $B^* = \frac{1}{4}(56) + 4 = 18$ ; además, se calcula  $\pi_1^* = \frac{60e^{(.04(3/12))}-56}{72-56} = 0.2877$ . De la gráfica, que también se deja al lector como ejercicio, se obtiene el valor de  $w$ ,  $w = 0.2877(0) + 0.7123(4) = 2.8492$ , lo que conduce al valor de la opción, al calcular el valor presente,  $V = e^{-(.04(3/12))}(2.8492) = 2.8209$ .

## 4. Planteamiento para el caso trinomial

Si se supone que el precio del subyacente para el siguiente periodo puede alcanzar, no dos, sino tres valores, como se representa en la figura 5, ya no es posible, en general, determinar el valor de opciones sobre este subyacente; solamente será posible determinar un portafolio cuyo valor sea una cota superior para el valor de la opción, y otro, cuyo valor corresponda a una cota inferior para el valor de esta.

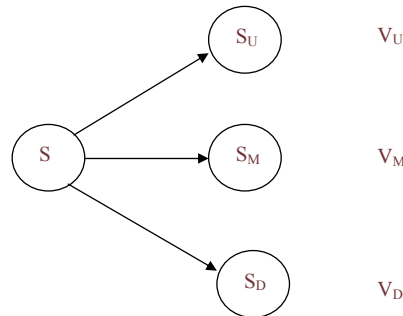


Figura 5: Árbol trinomial

Los modelos correspondientes, que son una ampliación del modelo binomial, ya que en este caso hay que considerar tres posibles valores del precio del subyacente, son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{máx } z_{\text{abajo}} &= S \Delta + e^{(-r t)} B \\
 \text{s.c.} & \\
 S_U \Delta + B &\leq V_U \\
 S_M \Delta + B &\leq V_M \\
 S_D \Delta + B &\leq V_D
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
& \text{mín } z_{arriba} = S \Delta + e^{(-r t)} B \\
& \text{s.c.} \\
& S_U \Delta + B \geq V_U \\
& S_M \Delta + B \geq V_M \\
& S_D \Delta + B \geq V_D
\end{aligned} \tag{22}$$

Planteando los problemas duales correspondientes a (21) y a (22), y haciendo el cambio de variables como en el caso binomial, se tienen:

$$\begin{aligned}
& \text{mín } w_{abajo} = e^{(-r t)} (\pi_1^* V_U + \pi_2^* V_M + \pi_3^* V_D) \\
& \text{s.c.} \\
& \pi_1^* S_U + \pi_2^* S_M + \pi_3^* S_D = S e^{(r t)} \\
& \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* = 1 \\
& \pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^* \geq 0
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
& \text{máx } w_{arriba} = e^{(-r t)} (\pi_1^* V_U + \pi_2^* V_M + \pi_3^* V_D) \\
& \text{s.c.} \\
& \pi_1^* S_U + \pi_2^* S_M + \pi_3^* S_D = S e^{(r t)} \\
& \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* = 1 \\
& \pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^* \geq 0
\end{aligned} \tag{24}$$

Una vez más, se puede constatar que **ambos** problemas tienen el mismo conjunto de soluciones factibles, junto con la misma función objetivo; la única diferencia es que en el primero se desea minimizarla, mientras que en el segundo lo que se busca es obtener un máximo. Pero, esta vez el conjunto de soluciones factibles **no** consiste de solamente un punto, en general, por lo que se tendrá una solución factible óptima del problema (23) diferente de la del problema (24).

#### 4.1. Solución gráfica para el caso trinomial

Para evitar los engorrosos cálculos que implica la utilización de la tabla simplex, así como la dificultad inherente a la resolución gráfica tradicional, que en este caso requeriría una gráfica en un espacio tridimensional, se procede a reformular los problemas duales (23) y (24), como se hizo previamente en el caso binomial:

$$\text{mín ( ó máx) } w_0 = e^{(-rt)} (w)$$

s.c.

$$\pi_1^* \begin{pmatrix} S_U \\ V_U \end{pmatrix} + \pi_2^* \begin{pmatrix} S_M \\ V_M \end{pmatrix} + \pi_3^* \begin{pmatrix} S_D \\ V_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S e^{(rt)} \\ w \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* = 1$$

$$\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^* \geq 0$$

Se puede resolver este problema si se grafican en un plano los puntos  $\begin{pmatrix} S_U \\ V_U \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} S_M \\ V_M \end{pmatrix}$ , y  $\begin{pmatrix} S_D \\ V_D \end{pmatrix}$ , junto con la envolvente convexa de los mismos; la región de soluciones factibles es el segmento de recta definido por la intersección de ese conjunto convexo con la recta vertical de abscisa  $S e^{(rt)}$ .

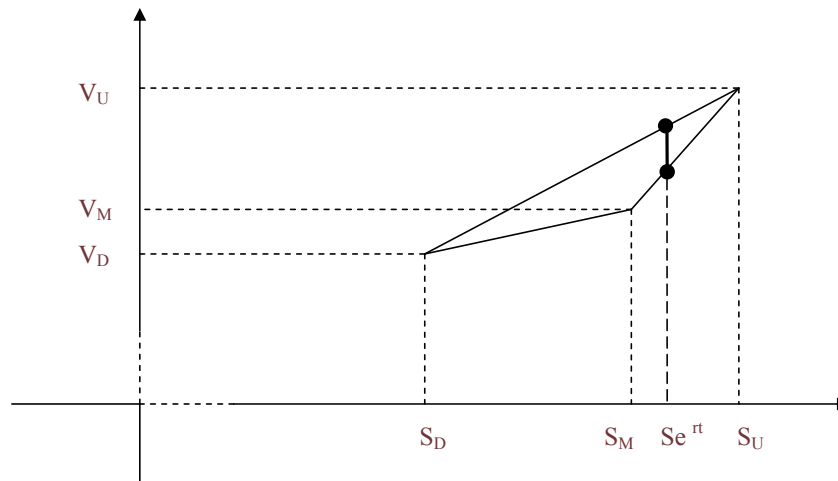


Figura 6: Gráfica del dual: caso trinomial

Con la ayuda de la gráfica se determina, visualmente, y de manera inmediata, cuáles son los valores mínimo y máximo de la función objetivo: las ordenadas de los puntos extremos del segmento se multiplican por  $e^{(-rt)}$  para obtener, respectivamente,  $(w_{abajo})_{mín}$ , para el punto inferior, y  $(w_{arriba})_{máx}$ , para el punto superior del segmento. Como ya se ha mencionado, estos son los valores que acotan el valor de la opción.

### 4.1.1. Ejemplos

Aplicando lo expuesto, considérese una opción de compra, un **call**, con precio de ejercicio 79, sobre un subyacente cuyo precio evoluciona de acuerdo al árbol presentado en la figura 7; se han añadido en la gráfica los pagos que se obtendrían en cada uno de los tres nodos terminales.

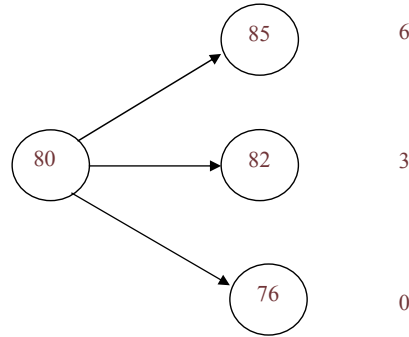


Figura 7: Árbol para **call**

Suponiendo que la tasa de interés libre de riesgo es 6%, capitalizable continuamente, y que el periodo considerado en el árbol tiene una duración de 2 meses, se procede directamente a establecer la gráfica correspondiente, que aparece en la figura 8, ubicando en un plano los tres puntos  $\begin{pmatrix} 85 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 82 \\ 3 \end{pmatrix}$ , y  $\begin{pmatrix} 76 \\ 0 \end{pmatrix}$ , junto con la envolvente convexa asociada.

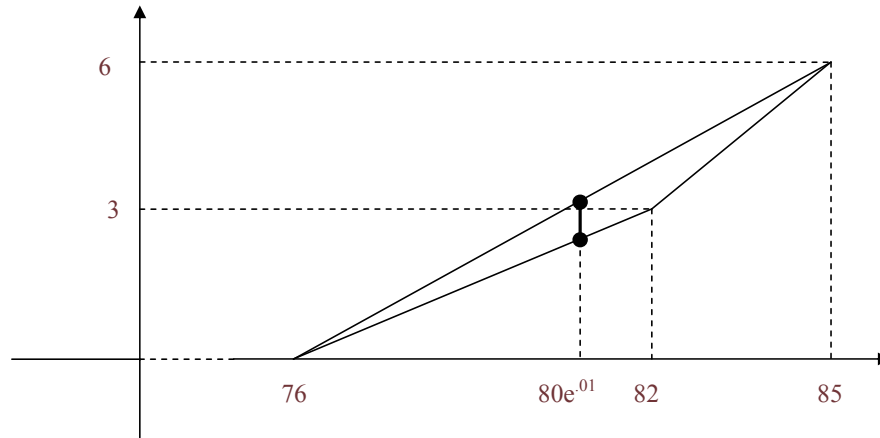
Para obtener una cota inferior al valor de este call, se obtiene la ordenada del punto inferior del segmento que aparece en la gráfica, pudiendo calcularla usando los valores  $\pi_2^* = \frac{80e^{(.06(2/12))} - 76}{82 - 76} = 0.8007$  y  $\pi_3^* = 1 - \pi_2^* = 0.1993$ , ya que este punto se encuentra sobre el segmento que une al segundo con el tercer punto de los que definen el convexo graficado. Así, la ordenada se puede calcular como  $0.8007 * 3 + 0.1993 * 0 = 2.4020$ , y finalmente, multiplicando por  $e^{(-.06(2/12))}$  se obtiene  $(w_{abajo})_{min} = 2.3781$ .

Análogamente, para calcular una cota superior al valor del call se usan los valores asociados al otro extremo del segmento,

$\pi_1^* = \frac{80e^{(.06(2/12))} - 76}{85 - 76} = 0.5338$  y  $\pi_3^* = 1 - \pi_1^* = 0.4662$ , obteniendo el valor de la ordenada  $0.5336 * 6 + 0.4662 * 0 = 3.2027$ , y después de multiplicar por  $e^{(-.06(2/12))}$  se termina con  $(w_{arriba})_{max} = 3.1708$ . La conclusión es que, para evitar arbitraje, el precio  $V$  de la opción debe satisfacer

$$2.3781 \leq V \leq 3.1708.$$

c

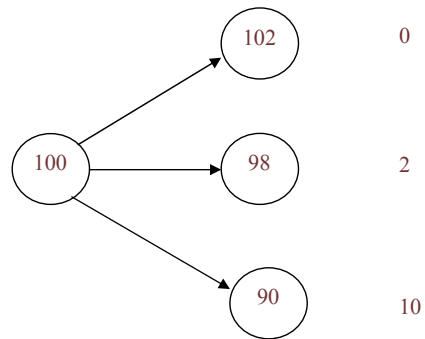
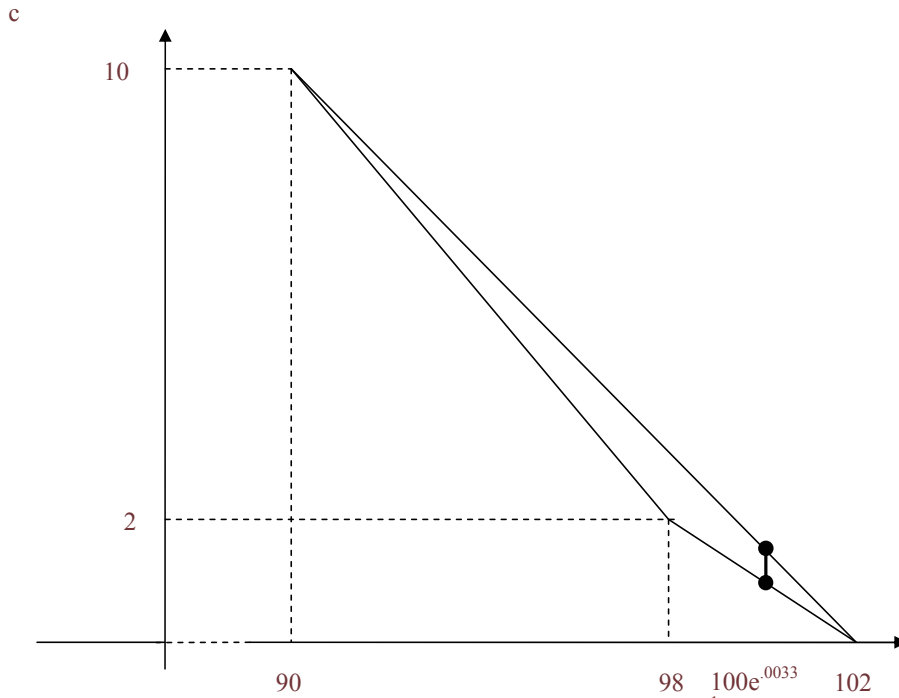
Figura 8: Gráfica para solución del **call**

Se deja al lector la tarea de determinar los dos portafolios óptimos, uno para cada uno de los extremos del segmento que constituye el conjunto de soluciones factibles, con los que pueda corroborar las cotas encontradas aquí. Para cumplir con esta tarea solamente es necesario calcular la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las dos rectas involucradas.

Como un ejemplo adicional, considérese una opción de venta, un **put**, con precio de ejercicio 100, sobre un subyacente cuyo precio evoluciona de acuerdo al árbol presentado en la figura 9; se han añadido en la gráfica los pagos que se obtendrían en cada uno de los tres nodos terminales.

Suponiendo que la tasa de interés libre de riesgo es 4% capitalizable continuamente, y que el periodo considerado en el árbol tiene una duración de un mes, se procede directamente a establecer la gráfica correspondiente, que aparece en la figura 10.

Se obtiene la ordenada del punto inferior del segmento que aparece en la gráfica, usando los valores  $\pi_1^* = \frac{100e^{(.04(1/12))} - 98}{102 - 98} = 0.5835$  y  $\pi_2^* = 1 - \pi_1^* = 0.4165$ , ya que este punto se encuentra sobre el segmento que une al primero con el segundo punto de los que definen el convexo graficado. Así, la ordenada se puede calcular como  $0.5835 * 0 + 0.4165 * 2 = 0.8331$ , y finalmente, multiplicando por  $e^{(-.04(1/12))}$  se obtiene  $(w_{abajo})_{min} = 0.8303$ .

Figura 9: Árbol para *put*.Figura 10: Gráfica para solución del *put*.

Para el otro extremo del segmento,  $\pi_1^* = \frac{100e^{(-0.04)(1/12)} - 90}{102 - 90} = 0.8612$  y  $\pi_3^* = 1 - \pi_1^* = 0.1388$ , obteniendo el valor de la ordenada  $0.8612 * 0 + 0.1388 * 10 = 1.3884$ , y después de multiplicar por  $e^{(-0.04)(1/12)}$  se termina con  $(w_{arriba})_{máx} = 1.3838$ . La conclusión es que, para evitar arbitraje, el precio  $V$  del put debe satisfacer

$$0.8303 \leq V \leq 1.3838$$



## 5. Método gráfico par árboles n-nomiales

Utilizando los argumentos presentados hasta este punto, es posible estructurar un método que permita obtener una cota inferior y una cota superior para el precio de cualquier opción sobre un subyacente, siempre que el precio de este pueda ser modelado con un árbol n-nomial. Suponiendo que los posibles precios del subyacente dentro de un periodo sean  $S_1 > S_2 > \dots > S_n$ , que los pagos correspondientes de la opción sean  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , que la tasa de interés libre de riesgo sea  $r$ , y que la duración implícita del periodo sea  $t$ , tal como se presenta en la figura 11, con la condición adicional  $S_1 \geq S e^{rt} \geq S_n$ , entonces es posible aplicar el método.

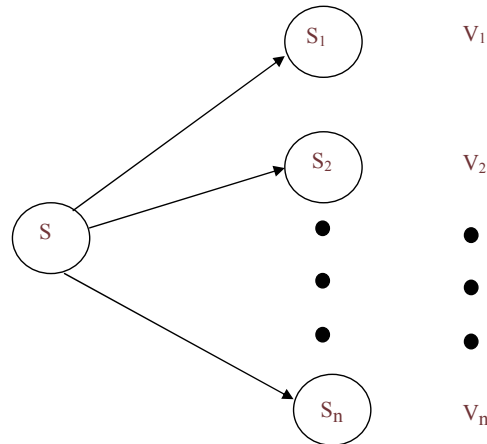


Figura 11: Árbol n-nomial.

### Algoritmo Dualnomial

- (1) Graficar en un plano los puntos  $\begin{pmatrix} S_i \\ V_i \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- (2) Dibujar Q, la envolvente convexa del conjunto de los  $n$  puntos.
- (3) Levantar una perpendicular L, en el punto  $\begin{pmatrix} S e^{rt} \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- (4) Determinar T, el segmento vertical que corresponde a la intersección de Q y L.

(5) Los extremos de T corresponden a las soluciones buscadas. Para cada uno de ellos:

- identificar la cara de Q a la que pertenecen
- si  $\begin{pmatrix} S_i \\ V_i \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} S_j \\ V_j \end{pmatrix}$  son los puntos que definen esa cara, con

$S_i < S_j$ , calcular

$$\begin{aligned}\pi_j^* &= \frac{S e^{(r t)} - S_i}{S_j - S_i} \\ \pi_i^* &= 1 - \pi_j^* \\ \pi_k^* &= 0, k = 1, 2, \dots, n, k \neq i, k \neq j\end{aligned}$$

- con estos valores calcular

$$w = \sum_{k=1}^n \pi_k^* V_k$$

- y terminar calculando

$$w_0 = e^{(-r t)} w.$$

(6) El valor de  $w_0$  obtenido para el extremo inferior de T es  $(w_{abaja})_{\min}$ , y aquel que se obtiene para el extremo superior de T es  $(w_{arriba})_{\max}$ . El valor de la opción,  $V$ , satisface

$$(w_{abaja})_{\min} \leq V \leq (w_{arriba})_{\max}$$

Terminar.

Si además se quisiera obtener los valores de  $\Delta$  y  $B$  para los portafolios asociados a estos 2 valores, entonces se pueden calcular a partir de los índices del paso (5) del método:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{V_j - V_i}{S_j - S_i} \\ B &= -\Delta S_j + V_j.\end{aligned}$$

## 6. Conclusiones

El enfoque presentado en este artículo para abordar el problema de determinación del precio de opciones financieras es una amalgama de dos disciplinas aparentemente ajenas: la programación lineal, eminentemente determinística, aplicada a un problema que generalmente se aborda en la literatura especializada desde un punto de vista probabilístico.

En particular, la Teoría de la Dualidad en la programación lineal, permite abordar el problema de una manera tal, que justifica muy claramente la condición necesaria y suficiente para que exista un portafolio de réplica de la opción, único en el caso binomial.

Además, la manera de reinterpretar el problema dual asociado hace posible obtener la solución a través de una gráfica en  $R^2$ , de manera casi inmediata, sin tener que utilizar los cálculos, que implica el método simplex.

Y un subproducto adicional del método, muy importante, es que, mediante su utilización, se puede resolver con la misma facilidad modelos más allá del binomial, ya que el número de cálculos necesarios no sufre ningún aumento.

Para terminar, sería interesante continuar este análisis, vía la dualidad, para explorar modelos que incluyan más de un periodo, con el fin de enriquecer las aportaciones diferentes del enfoque de procesos aleatorios.

## Bibliografía

1. M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, y H. D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, 1990.
2. R. Jarrow y S. Turnbull, *Derivative Securities*, South-Western College Publishing, Thomson Learning, 2000.

## 7. Apéndice

### 7.1. Derivados financieros

#### 7.1.1. Opciones y pagos

Actualmente existe una gran cantidad de productos financieros derivados, instrumentos financieros llamados así porque su precio se “deriva” o depende del precio de un subyacente, el cual puede ser oro, petróleo, una acción, una tasa de interés, un índice, y, en general, cualquier artículo al que se le pueda asignar un precio. Entre los derivados que pueden considerarse básicos están las llamadas opciones, y aquí se ha restringido la atención únicamente a dos tipos.

La opción de compra, comúnmente llamada **call**, da el **derecho de comprar** el subyacente a un precio pactado, el precio de ejercicio, en una cierta fecha futura  $T$ , independientemente de cual sea el precio de dicho subyacente en la fecha futura  $T$ . De manera análoga, la opción de venta, llamada **put**, da el **derecho de vender** el subyacente a un precio pactado, el precio de ejercicio, en una cierta fecha futura  $T$ , independientemente del precio de dicho subyacente en la fecha futura  $T$ .

Si se denomina  $K$  al precio de ejercicio, y  $S(T)$  al precio del subyacente al vencimiento del contrato, es obvio que, para un **call**, solamente conviene ejercer el derecho de compra cuando  $S(T)$  es mayor que  $K$ ; de la misma manera, para un **put**, se ejercerá el derecho de vender si  $K$  es mayor que  $S(T)$ . Así, el payoff o pago que recibe el poseedor de una opción en la fecha  $T$ , se define como

$$\begin{aligned} & Máx\{0, S(T) - K\} \\ & Máx\{0, K - S(T)\} \end{aligned}$$

para el **call** y para el **put**, respectivamente.

### 7.1.2. Arbitraje

Se dice que hay posibilidad de arbitraje cuando, sin disponer de efectivo, se puede adquirir un portafolio de instrumentos que garantice una ganancia sin riesgo, es decir, nunca se sufrirían pérdidas, no importa cuál sea el precio de los instrumentos en la fecha  $T$ . Es claro que tal situación no podría darse en ningún mercado financiero, ya que, de ser así, cualquiera podría, sin capital inicial, obtener ganancias sin temor a sufrir pérdidas. La teoría para determinar precios de los derivados se basa en el hecho de que no existen oportunidades de arbitraje.

**Proposición 1.** *Si un portafolio  $A$  tiene asociado un payoff  $P_A$  y un portafolio  $B$  el payoff  $P_B$ , entonces, si  $P_A \geq P_B$  el precio del portafolio  $A$  es mayor o igual al precio del portafolio  $B$ .*

**Demostración** *Si no fuera así, suponiendo que el precio de  $A$  fuera menor que el de  $B$ , vendiendo en corto  $B$  se obtiene dinero para comprar  $A$ , quedando una ganancia al instante, y al llegar la fecha  $T$  se tendrá  $P_A$ , que por hipótesis es mayor ó igual a  $P_B$ , por lo que se puede pagar esta obligación, sin sufrir pérdidas, es decir, habría arbitraje.*

**Proposición 2.** *En el modelo binomial representado en la figura 1, se debe cumplir la desigualdad*

$$S_U \geq S e^{(r t)} \geq S_D \quad (26)$$

**Demostración** *Si no fuera así, existirían dos casos: suponiendo que  $S e^{(r t)} > S_U$ , vendiendo en corto el subyacente se obtiene  $S$ , que se invierte a la tasa libre de riesgo  $r$ ; al terminar el periodo se tendrá  $S e^{(r t)}$ , que por hipótesis es mayor que cualquiera de los 2 posibles valores del subyacente, por lo que se puede pagar esta obligación obteniendo ganancia en ambos, sin sufrir pérdidas, es decir, habría arbitraje. El otro caso,  $S e^{(r t)} < S_D$ , permitiría obtener un préstamo por una cantidad  $S$ , comprar el subyacente, y al final del periodo vender el subyacente*

con lo que se podría pagar el préstamo y quedarse con un remanente, otra vez sin riesgos, y una vez más, habría arbitraje. Este resultado se generaliza al caso  $n$ -nomial substituyendo  $S_U$  por  $S_1$  y  $S_D$  por  $S_n$ .

## 7.2. Programación lineal

Dado cualquier problema de programación lineal (P), siempre es posible plantear el problema dual (D) asociado al mismo. Se trata, esencialmente, de plantear un nuevo problema utilizando los coeficientes de la función objetivo de (P) como términos independientes en (D), los términos independientes de (P) como coeficientes de la función objetivo de (D), y la matriz de coeficientes de las restricciones de (P), transpuesta, se convierte en la matriz de coeficientes de (D); además, la dirección de optimización de (P) se invierte para convertirse en la de optimización de (D).

De la descripción anterior se desprende que el número de variables en uno de los problemas coincide con el número de restricciones en el otro, por lo que se dice que a cada restricción de (P) le corresponde una variable de (D), y que a cada variable de (P) se le asocia una restricción en (D). Además, cuando una variable no aparece explícitamente en las restricciones de no negatividad, entonces se dice que es una variable sin restricción, es decir, pueden asignarles valores positivos, negativos o cero.

La siguiente tabla puede servir de guía para plantear el dual de cualquier problema de programación lineal:

	máx	mín
restricción tipo $\leq$		<i>variable</i> $\geq 0$
restricción tipo $\geq$		<i>variable</i> $\leq 0$
restricción tipo =		variable sin restricción
<i>variable</i> $\geq 0$	restricción tipo $\geq$	
<i>variable</i> $\leq 0$	restricción tipo $\leq$	
variable sin restricción	restricción tipo =	

### Ejemplo 1

$$\text{máx } z = 5x_1 + 3x_2 - 9x_3$$

*s.c.*

$$6x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15$$

$$-x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 8$$

y el problema dual asociado

$$\text{mín } w = 15y_1 + 8y_2$$

*s.c.*

$$6y_1 - y_2 = 5$$

$$2y_1 + 7y_2 = 3$$

$$y_1 + 4y_2 = -9$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

### Ejemplo 2

$$\text{mín } z = 15x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

*s.c.*

$$16x_1 - x_2 + 7x_3 \geq 21$$

$$x_1 + 13x_2 - 5x_3 \geq 9$$

y el problema dual asociado

$$\text{máx } w = 21y_1 + 9y_2$$

*s.c.*

$$16y_1 + y_2 = 15$$

$$-y_1 + 13y_2 = -3$$

$$7y_1 - 5y_2 = 2$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Se terminará este apéndice citando el Teorema Fundamental de la Dualidad, que ha sido central en el desarrollo del presente trabajo. La demostración del mismo puede consultarse en casi cualquier texto dedicado a la Programación Lineal, tal como [1].

**Teorema** *Dado cualquier par de problemas duales entre sí, (P) y (D), una y solamente una de las siguientes afirmaciones se cumple:*

- (a) *Ninguno de los problemas tiene solución*
- (b) *Si solamente uno de ellos tiene solución, entonces su función objetivo no está acotada, no existe óptimo finito*
- (c) *Si ambos tienen soluciones, entonces ambos tienen solución óptima, y además el valor óptimo de (P) coincide con el de (D).*