MISCELÁNEA MATEMÁTICA 25 (1997) 29–38 SMM

La función continua no diferenciable de Weierstrass

Guillermo Grabinsky

Departamento de Matemáticas,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qur n'ont pas de dérivées

Ch. Hermite[1]

Un célebre *teorema* de A. M. Ampère de 1806 *demuestra* analíticamente que una función continua tiene derivadas. Tal desvarío se entiende en parte por la muy imprecisa noción que se tenía entonces de lo que es una función y que toma su forma moderna a partir del trabajo sobre series de Fourier de P. L. Dirichlet. Corresponde a B. Bolzano ser el primero (en 1834) en separar de manera clara el concepto de continuidad del de derivabilidad al construir de manera geométrica una función continua no diferenciable en algún punto (ver [3, pág. 331–332]), pero como tantas otras contribuciones de Bolzano, ésta también pasaría desapercibida por sus contemporáneos. Otro ejemplo temprano (c. 1830) se debe a Cellérier y esta dado por: $f(x) = \sum_{n+1}^{\infty} a^{-n} sen(a^n x)$ (a par suficientemente grande), el cual no sería publicado hasta 1890. Esta función no tiene derivada finita en algún punto, mientras que posee derivada igual a $+\infty$ en un conjunto numerable denso; podemos pensar que cada singularidad representa un punto de inflexión vertical, (como lo es $x = 0$ de $x^{1/3}$) (ver [5, pág. 406]).

En 1861 Weierstrass se plantea la posibilidad de construir una función continua no diferenciable en algún punto y sólo hasta 1874 comunica por carta su hallazgo a Paul Du Bois Reymond y que sería

[1] *Yo me alejo con miedo y horror de está plaga lamentable de las funciones que no tienen derivadas.* Hermite en una carta a T. J. Stieltjes.

difundida ampliamente poco tiempo después con la prueba original de Weierstrass [14]. El impacto causado a la comunidad matemática fue inmenso y provocó reaciones muy variadas que iban desde la incredulidad hasta el horror, pero la grave llamada de atención estaba dada sobre el poco rigor y la engañosa intuición, y precipitó en gran medida la imperiosa necesidad de construir sobre bases irrefutables los números reales.

H. Hankel y G. Cantor desarrollaron el Método de Condensación de Singularidades (discutido brevemente más adelante) para construir funciones con una cantidad numerable infinita de singularidades de naturaleza prefijada (es decir, sin derivada lateral izquierda o derecha, con derivada infinita, con puntos cúspides, etc.). Vale la pena revisar el clásico en teoría de funciones de J. Pierpont [9] para apreciar una gran variedad de ejemplos o el libro citado de Hobson [5].

1 Método de Condensación de Singularidades.

El método consiste en la construcción de funciones reales de variable real que poseen una cantidad numerable de singularidades prescritas de antemano y que se relacionan con la continuidad o la diferenciabilidad de la función. Estas singularidades pueden constituir un subconjunto denso del intervalo de definición de la función. En nuestro caso sólo examinaremos la diferenciabilidad. El procedimiento original se debe a Hermann Hankel (1870) quien le dio el nombre *Prinzip der Verdichtung der Singularitäten* el que se describe como sigue: Sea $\varphi\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ una función continua y diferenciable excepto en $x=0$ en donde $\varphi(0)=0$. Supongamos además que $|\varphi'(x)|\le M$ si $x\neq 0$. Sea $\varphi_n(x)=\varphi(sen\, n\pi x)$, entonces φ_n es continua y diferenciable en todo punto excepto en todo aquel número racional expresable cómo una fracción $\frac{m}{n}$ y en el que $\varphi_n\left(\frac{m}{n}\right)=0$ también. Sea $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{n^s}$ $s>1$.

Las hipótesis garantizan que la serie que define a f converge uniformemente en cada intervalo acotado y en consecuencia da lugar a una función continua, periódica la cual no tiene derivada en cada racional (ver [5, pág. 392–399]). La desventaja de esta construcción es que el examen de la naturaleza de la singularidad depende del comportamiento de cada uno de los sumandos de la serie, además de que el conjunto de singularidades consiste siempre de números racionales. Otro método de condensación más versátil se debe a G. Cantor (1882) y lo describimos a continuación: Partimos de la función φ de antes, de un conjunto numerable $G = \{w_n\} \subset (0,1)$ y de una serie convergente de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, definimos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi(x - w_n)$. Nuevamente la serie converge uniformemente y define una función continua tal que $f'(w_n)$ no existe para cada $n \in \mathbb{N}$. El método de Cantor permite considerar cualquier subconjunto numerable y tiene la ventaja adicional de que el examen de la singularidad en w_n se reduce al examen del término correspondiente. Ilustraremos esto con un ejemplo sencillo: Sea $G = \{w_n\}$ dado y $\varphi(x) = |x|$ en $(-1,1)$. Sea $f\colon(-1,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}|x - w_n|$, entonces:

$$\begin{aligned} f(w_k + h) - f(w_k) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{|w_k + h - w_n| - |w_k - w_n|}{3^n h} + \frac{|h|}{3^k h} \\ &\quad + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|w_k + h - w_n| - |w_k - w_n|}{3^n h} \\ &= S_1 + \frac{|x|}{3^k h} + S_2 . \end{aligned}$$

S_1 consta de un número finito de términos y tiende a un valor definido si $h \to 0$, mientras que si $|h| < 1$, tenemos que $|S_2| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3^k}$ de acuerdo a que $h \to 0^+$ o $h \to 0^-$ por lo que $f'(w_k)$ no existe.

Ahora bien, si $x \neq w_n$ entonces para toda m:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \left| \frac{|x + h - w_k| - |x - w_k|}{h} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$$

por lo que la serie que representa a $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ converge uniformemente $\forall\, h$ con $|h| > 0$ de donde $f'(x)$ existe si $x \notin G$.

En lo que sigue examinaremos con algún detalle diversas propiedades del famoso ejemplo de Weierstrass (ver [12, p. 352]).

Teorema 1 (K. Weierstrass) *Sea* $b \in (0,1)$ *y* a *un entero impar tal que* $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ *entonces la función* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ *no es derivable en algún punto.*

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)}{h} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} = S_m(h) + R_m(h)\,.
\end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio tenemos:

$$|\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)| \leq a^n|h|$$

por lo que si $|h| < 1$

$$|S_m(h)| \leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi a^n b^n = \pi\frac{a^m b^m - 1}{ab-1} < \frac{\pi a^m b^m}{ab-1}$$

Además $\lim_{h\to 0} S_m(h)$ existe. En lo que resta estimaremos $|R_m(h)|$ por abajo. Escribimos $a^m x = \alpha_m + \vartheta_m$ con α_m entero y $-1/2 \leq \vartheta_m < 1/2$ y sea $h = \frac{1-\vartheta_m}{a^m}$, entonces $0 < h < \frac{3}{2a^m}$ y

$$a^n\pi(x+h) = a^{n-m} \cdot a^m\pi(x+h) = a^{n-m}\pi(\alpha_m + 1)\,.$$

Como a es impar se sigue que:

$$\begin{aligned}
\cos(a^n\pi x) = \cos(a^{n-m}\pi(\alpha_m + \vartheta_m)) &= \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\vartheta_m) \\
&= (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\vartheta_m)
\end{aligned}$$

y

$$\cos(a^n\pi(x+h)) = (-1)^{a^{n-m}(\alpha_m+1)} = (-1)^{\alpha_m+1}\,.$$

De este modo

$$R_m(h) = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n\left\{1 + \cos(a^{n-m}\pi\vartheta_m)\right\}$$

y como todos los términos de la serie son positivos, tenemos

$$|R_m(h)| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{2}{3}a^m b^m$$

por lo que

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geq |R_m(h)| - |S_m(h)| > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) a^m b^m \qquad (*)$$

Pero $ab > 1 + \frac{2}{3}\pi$ y como $m \to \infty$ entonces $h \to 0$, se sigue que el lado derecho de $(*)$ tiende a ∞, de donde $f'(x)$ no existe. ∎

Un argumento más cuidadoso, debido a Bromwich obtiene el mismo resultado si y sólo si se exige que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi(1-b)$ (ver [5, p. 404]). Mientras que un análisis muy profundo debido a G.H. Hardy (1916) se prueba que basta con tener $ab \geq 1$ con $b \in (0,1)$ y a no necesariamente entero, para obtener el mismo resultado ([4]).

Notamos que la hipótesis $ab \geq 1$ no pueda relajarse más ya que si $ab < 1$ entonces la serie formal de las derivadas converge uniformemente por lo que $f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \pi a^n b^n sen(a^n \pi x)$ para todo x.

Contrario a lo que normalmente se cree, la noción de convergencia uniforme de una sucesión de funciones continuas y su relación con la función límite fue considerado por primera vez por G. G. Stokes (1847) y por P. L. Seidel (1848) quienes definen una especie de *convergencia uniforme local* es decir, en toda una vecindad de un punto (ver [5, pp. 130–131]) y se debe a Stokes la primera demostración de la suficiencia de la convergencia uniforme local de funciones continuas en un punto para que el límite sea continuo en el punto. Desde luego se debe a K. Weierstrass y su célebre prueba M (fundamental en la teoría de funciones), el primer resultado acerca de la derivabilidad de una serie de funciones y su igualdad con la serie de las derivadas.

Vale la pena mencionar en este contexto, que es *imposible* producir un ejemplo de una función continua no diferenciable de variables *complejas* como límite uniforme de funciones diferenciables, como probó el mismo Weierstrass en su famoso teorema de la *doble serie* (1841) (ver [7, pp. 430–433].

La función de Weierstrass con $ab > 1$ no es de variación acotada en algún intervalo cerrado por más pequeño que éste sea, esto lo probamos a continuación.

Sea $[c,d]$ un intervalo cerrado, por periodicidad podemos suponer que $c > 0$. Sean $x_0 = \frac{j}{a^m}, \cdots, x_k = \frac{j+k}{a^m}$ todas aquellas fracciones de tal forma que pertenecen a $[c,d]$, entonces: $\frac{j-1}{a^m} < c$ y $d < \frac{j+k+1}{a^m}$ por lo que $d - c < \frac{k+2}{a^m}$ y $k > a^m(d-c) - 2$.

Sea $\mathcal{P}_m = \{c \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_k \leq d\}$ la partición así formada. Como en la prueba del teorema escribimos: $a^m x = \alpha_m + \vartheta_m$ con α_m entero, $-\frac{1}{2} \leq \vartheta_m < \frac{1}{2}$ y $h = \frac{1-\vartheta}{a^m}$, entonces por $(*)$;

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geq a^m b^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)$$

en particular para $x = x_i \quad i = 0, \ldots, k$, tenemos que $\alpha_m = 1$ y $\vartheta_m = 0$ por lo que $h = \frac{1}{a^m}$ y de la desigualdad anterior se sigue que:

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \geq b^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right).$$

De este modo la variación de f con respecto a $\mathcal{P}_m$ satisface

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{P}_m}(f) &\geq \sum_{i=0}^{k} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \geq kb^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) \\ &= b^m \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)(a^m(d-c) - 2) \end{aligned}$$

como $a < 1$ y $ab > 1$, se sigue que $\lim_{h\to\infty} V_{\mathcal{P}_m} = \infty$ por lo que f no es de variación acotada en $[c,d]$.

2 La función de Weierstrass y derivadas laterales.

Siguiendo a U. Dini definimos sus cuatro derivadas como sigue:

$$D^+(f)(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad D_+(f)(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D^-(f)(x) = \overline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad D_-(f)(x) = \underline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

A diferencia de la derivada usual, los límites anteriores siempre existen (posiblemente en el sentido extendido). Si $D^+(f)(x) = D_+(f)(x)$ entonces diremos que f admite derivada lateral derecha y analógamente con el lado izquierdo. A pesar de lo que probamos en el teorema 1, la función de Weierstrass tiene derivadas laterales extendidas en algunos puntos si $ab > 1$, a saber:

Teorema 2 ([15]) *Existen subconjuntos numerables y densos G^+, $G^- \subset \mathbb{R}$ en los que*

$$D^+(f)(x) = D_+(f)(x) = -\infty \text{ y } D^-(f)(x) = D_-(f)(x) = +\infty \text{ si } x \in G^+$$
$$D^+(f)(x) = D_+(f)(x) = +\infty \text{ y } D^-(f)(x) = D_-(f)(x) = -\infty \text{ si } x \in G^-.$$

es decir, existen dos subconjuntos densos numerables de $\mathbb{R}$, en los que f tiene cúspides que apuntan en sentido opuesto (ver [5, p. 405]).

Demostración: Consideremos $x = 0$, entonces

$$\frac{f(0)-f(h)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n(1-\cos a^n\pi h) = 2\sum_{n=0}^{\infty} b^n sen^2\left(\frac{1}{2}a^n\pi h\right).$$

Sea $m \in \mathrm{N}$ tal que $|h|a^m \leq 1 < |h|a^{m+1}$, entonces

$$\frac{f(0)-f(h)}{h} > 2a^m \sum_{n+0}^{\infty} b^n sen^2\left(\frac{1}{2}a^n\pi|h|\right).$$

Por la desigualdad de Jordan

$$senx \geq \frac{2}{\pi}x \text{ si } \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

se tiene:

$$sen\left(\frac{1}{2}a^n\pi|h|\right) > \frac{1}{\pi}(a^n\pi|h|) > a^{n-m+1}$$

por lo que

$$\frac{f(0)-f(h)}{h} > \frac{1}{a^{m+2}}\sum_{n=0}^{\infty} b^n a^{2n} > \frac{2}{a^{m+1}}\frac{b^m a^{2m}}{ba^2-1} > \left(\frac{2}{a^2}\right)\left(\frac{b^m a^m}{ba^2-1}\right)$$

Si $m \to \infty$, entonces $h \to 0$ y como $ab > 1$ se tiene que

$$D^+(f)(0) = D_+(f)(0) = -\infty \quad \text{y} \quad D^-(f)(0) = D_-(f)(0) = +\infty$$

ahora bien, sea $x = x' + \dfrac{2r}{a^m}$ r entero, $m \in \mathrm{N}$ entonces:

$$f(x) = \sum_{n+0}^{m-1} b^n \cos(a^n\pi x) + \sum_{n=m}^{\infty} b^n \cos(a^n\pi x') = S_m(x) + S_m(x')$$

El primer sumando admite derivadas si $x = \dfrac{2r}{a^m}$ (es decir, $x' = 0$) mientras que por el argumento del párrafo anterior obtenemos que

$$D^+(f)(x) = D_+(f)(x) = -\infty \quad \text{y} \quad D^-(f)(x) = D_-(f)(x) = +\infty$$

Si ahora tomamos $x = x' + \dfrac{2r+1}{a^m}$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m-1} b^n \cos(a^n \pi x) - \sum_{n=m}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x') = S_m(x) - S_m(x')$$

y procediendo como antes, obtenemos $D^+(f)(x) = D_+(f)(x) = +\infty$ y $D^-(f)(x) = D_-(f)(x) = -\infty$. Desde luego tomamos:

$$G^+ = \left\{\frac{2r}{a^m} : r \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right\} \text{ y } G^- = \left\{\frac{2r+1}{a^m} : r \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

■

Después del ejemplo de Weierstrass, fue raro el analista que no probó su suerte con estas funciones. De la enorme variedad elegimos las de:

Pompieu: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - w_n)^{1/9}$ $G = \{w_1, w_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ dado y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ $(c_n > 0)$. En este ejemplo, $f'(x)$ existe si $x \neq w_n$ y $f'(w_n) = +\infty$ (1907).

G. Faber: $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^j} \varphi(2^{j!}x)$ donde $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$ con $D^+(f)(x) = D_+(f)(x) = +\infty$, $D^-(f)(x) = D_-(f)(x) = -\infty$ (1909).

También vale la pena mencionar un ejemplo más, que resalta por su sencillez y que a mi juicio es el más intuitivo. Se debe a B. L. Van der Warden (1930) y cuya construcción y análisis puede consultarse en el libro de Cálculo de M. Spivak ([10, pp. 474–476]) o con un menor detalle en [12, pp. 352–353]. Esencialmente la misma idea pero en *base 4* puede hallarse en el libro de S. Sprecher ([11, pp. 191–194]). Una referencia más que destaca por la gran variedad de construcciones y ejemplos es [13].

En todos los ejemplos anteriores f conserva un último rasgo de *decencia* es decir, f admite al menos una derivada lateral ¿Es posible despojar a alguna función de este bastión final? La construcción escapó al ingenio de más de uno y requirió del poder de A. S. Besicovith quien construye en 1925 una función continua sin derivadas laterales. El método es ciertamente muy elaborado. Un estudio posterior hecho por E. D. Pepper en 1928 puede encontrarse en las páginas 172–181 de [6].

La modernidad llegó con el método categórico de S. Banach quien en 1931 prueba de una manera muy simple, la existencia y *abundancia* de funciones continuas no diferenciables, de hecho, resulta excepcional que una función continua tenga derivadas laterales finitas o aún cocientes diferenciales acotados. (ver [8, pp. 45–46]).

Hoy en día aún tenemos matemáticos preocupados por problemas relacionados con la derivada de funciones reales, sus generalizaciones, sus extensiones y entre ellos mencionamos el trabajo de A. M. Bruckner [1]. Su excelente artículo panorámico con su inmensa bibliografía [2] son muy recomendables.

Referencias

[1] A. M. Bruckner. *Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Mathematics **659**. Springer-Verlag.

[2] A. M. Bruckner and J. L. Leonard. *Derivatives*, Amer. Math Monthly **73**, pp. 24–56.

[3] J. P. Collete. *Historia de las Matemáticas*, Segunda Edición. **II**. Siglo XXI Editores. (1986).

[4] G. H. Hardy. Trans. Amer. Math. Soc. **XVII** (1916), p. 391.

[5] E. W. Hobson. *Theory of functions of a real variable*, Segunda Edición (Cambridge (1926)), Dover (1957).

[6] R. L. Jeffery. *Theory of functions of a real variable*, University of Toronto Press (1953), Dover (1984).

[7] K. Knopp. *Theory and applications of infinite series*, Ed. Dover (1989).

[8] J. C. Oxtoby. *Measure and Category*, Springer GTM # 2.

[9] J. Pierpont. *Theory of functions of a real vvariable*, **II**. New York (1912). Dover (1957).

[10] M. Spivak. *Calculus*, Segunda Edición. Ed. Publish or Perish Berkeley CA. (1980).

[11] P. A. Sprecher. *Elements of real analysis*, Ed. Dover (1987).

[12] E. C. Titchmarsh. *Theory of functions*, Segunda Edición, Oxford (1939).

[13] A. C. M Van Roij and W. H. Schikhof. *A second course on real functions*, Ed. Cambridge University Press (1982).

[14] K. Weierstrass. Crelle's Journal **LXXIX** (1875), p. 21–37.

[15] G. C. Young. Quaterly Journal, **XLVII**, (1916). p. 167.