Miscelánea Matemática 25 (1997) 97–100 SMM

Weierstrass hoy

Jorge Ize*, Antonmaría Minzoni* y Alexander Turbiner**

* FENOMEC-IIMAS, UNAM
** ICN, UNAM

Es prácticamente imposible reseñar en unos cuantos renglones el impacto de los resultados y de las ideas de un Matemático de la talla de Weierstrass. Sin embargo, sí se puede decir que Weierstrass es uno de los fundadores del Análisis Moderno.

Una de las contribuciones más importantes de Weierstrass a las Matemáticas fue su insistencia en tener formulaciones exactas, claras y rigurosas. Como lo escribe Hadamard, en 1921, *con Gauss, Cauchy, Riemann y Weierstrass, la noción precisa de lo que uno debe entender por una función analítica estaba completa.* Los artículos sobre la función de Weierstrass y sobre la aproximación de funciones por polinomios ilustran perfectamente este punto.

El considerar a una función como un punto en un espacio de funciones permitió iniciar lo que hoy llamamos Análisis Funcional (formalizada en gran parte por Hilbert (1862-1943)). Esta manera de pensar se ve muy claramente en los logros fundamentales de Weierstrass en el Cálculo de Variaciones.

Quizás sea conveniente situar al Cálculo de Variaciones en el momento en el que Weierstrass empieza a contribuir al campo: si bien el Cálculo de Variaciones fue iniciado, en el siglo XVIII, por Fermat, Newton, Leibniz y los Bernoulli, la mayor contribución operacional se debe, en el siglo siguiente, a la obra de Euler, Lagrange y Legendre. Al principio del siglo XIX (antes de 1838), Jacobi y Hamilton plantearon el principio de mínima acción y sus muy importantes consecuencias, tanto para la Física como para los sistemas dichos hamiltonianos. Depués de estos trabajos, hay un vacío de más de 20 años, hasta el momento en que Weierstrass empieza a dar clases sobre Cálculo de Variaciones, entre 1865 y 1890. Las notas de esas clases fueron recopiladas por sus estudiantes, en particular Burckhardt y Schwarz, y los resultados de Weierstrass fueron conocidos principalmente a través de las tesis de sus estudiantes.

En estas notas Weierstrass prueba el primer resultado de regularidad en la frontera de las extremales (regularidad que será uno de los puntos centrales en los métodos modernos del estudio de ecuaciones elípticas), el primer estudio riguroso de la segunda variación y de su relación con los puntos conjugados de Jacobi, la primera demostración correcta de las condiciones de suficiencia (aquí permite a Hilbert, Bolza, Bliss y Caratheodory el dar un Cálculo de Variaciones totalmente correcto), entre otras cosas. Pero lo que es más interesante son dos puntos: el primero es que, por medio de su función de excesso, Weierstrass diferencía el tipo de extremo que uno obtiene según la topología que uno usa. El segundo es la introducción de la noción de campos de extremales; de esta forma Weierstrass enriquece el Cálculo (la parte *algebraica*) con la geometría. Esta manera de enfocar al Cálculo de Variaciones, con las contribuciones muy posteriores de Morse y las múltiples aplicaciones físicas, ha sido el motor de la investigación en este campo en los últimos 100 años.

Otro punto fundamental, demostrando la influencia a largo plazo de Weierstrass, es el siguiente: uno de los grandes éxitos del Cálculo consiste en poder describir localmente, usando la aproximación y el desarrollo de Taylor, el comportamiento de objetos (las funciones) muy complicados. Este fue uno de los logros principales del análisis antes de Weierstrass. Por otra parte, los resultados asintóticos permiten describir el comportamiento cerca del *infinito* de estos mismos objetos. Este es el estudio que uno hace cuando la función que uno desea estudiar es conocida. Ahora bien, en muchos casos la función es precisamente la incógnita por determinarse y aqui aparece el problema inverso, es decir ir de lo *local* a lo *global*. Weierstrass es el primero en darse cuenta de esta posibilidad, es decir, conociendo propiedades locales de las funciones (en el caso particular de las funciones meromorfas) en las singularidades (polos y ceros) y su comportamiento cualitativo en el infinito, poder reconstruir en forma explícita la función completa.

Esto prueba de manera concluyente que, en este caso, las constricciones geométricas y la naturaleza de las singularidades determinan por completo esas funciones meromorfas. Queda claro que aquí estamos al inicio de una gran parte de la geometría analítica y de varias otras partes de la Matemática Moderna. Aquí es necesario recordar el artículo sobre las funciones theta.

Poincaré (1854-1912) reconoce que fue el tratar de generalizar los resultados de Weierstrass al caso de más variables lo que lo llevó a desarrollar sus propias ideas sobre ecuaciones diferenciales, con una mezcla de análisis, geometría y topología, y a iniciar lo que hoy llamamos Análisis Global.

Estas ideas fundamentales tienen actualmente una presencia constante en una gran variedad de situaciones. Entre ellas, permiten integrar completamente (y en forma explícita) sistemas hamiltonianos de dimensión infinita en términos de funciones hiperelípticas (de infinitas variables). En este caso es *fácil* determinar, con información de problemas linearizados, la naturaleza de las singularidades, de tal modo que el comportamiento de la solución queda determinado por la geometría. En este caso, las ideas de Weierstrass permiten construir explícitamente la solución a problemas fuertemente nolineales de gran interés en propagación de ondas desde fluidos hasta fibras ópticas.

De la misma forma, parte de los métodos topológicos en problemas nolineales, teoría del grado o métodos variacionales, tuvieron su origen en esta idea de Weierstrass.

Otro aspecto muy actual en Física Moderna es el poder calcular desarrollos de perturbaciones para poder explicar una gran variedad de fenómenos que van desde materia condensada hasta física de partículas elementales. En este caso se utiliza una combinación de métodos variacionales modernos con las ideas iniciales de Weierstrass para resolver una gran variedad de problemas en los cuales uno usa también propiedades de simetrías, lo cual es un avance muy reciente en teoría de perturbaciones. En estos casos las simetrías de los problemas variacionales imponen restricciones en el comportamiento analítico de las cantidades que se quiere calcular. Estas restricciones son tanto en las singularidades como en el comportamiento en el infinito. La aproximación variacional se construye usando funciones de prueba que reproducen el comportamiento singular exactamente y permiten una interpolación en la región de interés que no se puede estudiar con otros métodos. Por otra parte, la posibilidad de restringir el comportamiento analítico debido a las simetrías produce resultados exactos sobre cantidades que no son calculables aproximadamente.

Aquí también se ve que la idea de determinar objetos globales a partir de singularidades y de restricciones geométricas es hoy en día una idea que se usa en variadísimos contextos.

En este sentido, Weierstrass puede considerarse, a través de su influencia sobre los dos analistas más importantes de principios de siglo, Hilbert (el *algebraico*) y Poincaré (el *geómetra*), como uno de los padres del Análisis Moderno.

Queda claro, por lo tanto, que las contribuciones de Weierstrass al Análisis no son solamente el haber aclarado los conceptos básicos (ni haber dado ejemplos o contraejemplos) sino que van mucho más allá del progreso de la Matemática del siglo XIX y que siguen influenciando la investigación actual.

Muchos consideran a Weierstrass, junto a Poincaré y Hilbert, como uno de los últimos matemáticos *enciclopédicos*. Es casi imposible que, hoy en día, un solo individuo pueda manejar la cantidad de información necesaria para hacer investigación relevante. Sin embargo, es muy deseable fomentar las colaboraciones interdisciplinarias para que grupos de investigadores puedan contribuir significativamente al avance de la Ciencia.