¿Substituir la integral de Riemann?

Carlos Imaz J.
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV, IPN
cimaz@mail.cinvestav.mx

Juan José Rivaud M.
Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia
CINVESTAV, IPN
jrivaud@mail.cinvestav.mx

Durante el transcurso de una reunión matemática (Joint Mathematical Meeting, San Diego, California, enero de 1997), por medio de una carta abierta, un grupo de seis matemáticos [1] presentaron la propuesta de substituir la integral de Riemann, en los cursos básicos de cálculo, por la integral medidora (gauge integral), que en esencia es la integral que a principios del siglo XX introdujeron Denjoy y Perron y que ha sido afinada por, entre otros, algunos de los proponentes. Posteriormente, uno de los signatarios de la carta abierta, Schechter, publica en internet un artículo [2] donde presenta una introducción a la integral medidora y la compara con las de Riemann y Lebesgue. Finalmente, en el número 28 de Miscelánea Matemática, haciéndose eco de la propuesta, Bosch y Kucera [3] dan respaldo pleno a la idea de substitución de las integrales.

Entre las razones que se aducen para recomendar la substitución aparecen las siguientes: Por un lado, la integral medidora es muy general, ya que incluye a las integrales de Riemann y de Lebesgue, además de incluir a la integral impropia de Riemann. Por otro, la integral medidora se puede definir por medio de una pequeña modificación en la definición (apropiada) de la integral de Riemann, como puede constatarse si comparamos las definiciones que reproducimos a continuación, tomadas de [2]:

Integral de Riemann. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y sea V un número. Decimos que V es la Integral de Riemann de f , y escribimos $V = \int_a^b f(t)dt$, si dado un número positivo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo correspondiente $\delta > 0$ con la propiedad: siempre que n es un entero positivo y $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $s_1, s_2, \ldots, s_n$, son números que satisfacen las relaciones $a = t_0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s_n \leq t_n = b$ y $t_i - t_{i-1} < \delta$ para toda i, entonces $\left| V - \sum_{i=1}^{N} f(s_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon$.

Integral medidora. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y sea V un número. Decimos que V es la Integral medidora de f, y escribimos $V = \int_a^b f(t)dt$, si dado un número positivo $\varepsilon > 0$ existe una función correspondiente $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ con la propiedad: siempre que n es un entero positivo y $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $s_1, s_2, \ldots, s_n$, son números que satisfacen las $a = t_0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s_n \leq t_n = b$ y $t_i - t_{i-1} < \delta(s_i)$ para toda i, entonces $\left| V - \sum_{i=1}^{N} f(s_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon$.

Como puede apreciarse, las definiciones son literalmente casi iguales, con el sólo cambio de que en el primer caso la δ es una constante y en el segundo se trata de una función. Desde luego, llama la atención que se haya llegado a una definición tan precisa y elegante de la integral medidora, sobre todo si la comparamos con la definición que se manejaba hace treinta años, (ver [4], por ejemplo). Sin embargo, la definición de la integral de Riemann tiene la enorme ventaja de que refleja, con bastante naturalidad, el tratamiento que han recibido los problemas típicos de integración desde los griegos hasta el momento de la aparición del cálculo diferencial e integral y cuya interpretación geométrica es clara y directa, mientras que la integral medidora tiene motivaciones mucho más sutiles y especializadas y su interpretación geométrica dista mucho de ser clara e inmediata.

Las opiniones expresadas por Schechter [2], en su inciso: *The role of the gauge integral in teaching analysis*, no dejan de ser sorprendentes.

Su primera recomendación es la de utilizar la integral medidora en lugar de la integral de Riemann en los cursos de introducción al cálculo, pero (por el momento) no debe substituir a la integral de Lebesgue en cursos más avanzados (posgrado), ya que los cursos introductorios no necesitan recurrir a funciones con dominios más allá de $[a, b]$ o $\mathbb{R}$, pero si lo necesitan los avanzados. Por otro lado, sigue opinando Schechter, los cursos iniciales de cálculo se dedican, primordialmente, a cálculos mecánicos y sus aplicaciones, pero no a teoremas ni demostraciones. De hecho, lo que suele hacerse (y él lo considera correcto) es enunciar sin demostración algunos de los principales teoremas. Y remata con la siguiente reflexión: "....sostengo que la mayoría de los estudiantes de cursos iniciales ni siquiera asimilan bien la definición de la integral de Riemann. Por lo tanto, poco cambiará para ellos si les presentamos la definición de integral medidora, que es casi igual". De hecho, esta opinión es totalmente compartida por los seis proponentes, como puede constatarse en [1], al leer el párrafo dedicado a comentar la nueva definición. Recomendamos al lector que haga una primera valoración de esta práctica didáctica, teniendo en cuenta, además, que la definición de integral medidora no es fácil de asimilar, ni siquiera para un matemático.

Creemos que la problemática didáctica involucrada en todo esto tiene, desde luego, otra respuesta, que parece más sensata: eliminar, en los cursos introductorios, la definición formal de la integral e implementar el curso teniendo como objetivos adquirir familiaridad y destreza con las aplicaciones y el dominio intuitivo de los conceptos básicos, dejando la construcción formal del cálculo al margen de los argumentos e ideas de carácter físico o geométrico, como corresponde, a los cursos de análisis matemático. Es en estos cursos donde, de manera natural, se ubica la discusión acerca de la integral de Riemann, la integral de Lebesgue y la integral medidora, así como las relaciones entre ellas, no limitándose, simplemente, a la exposición detallada y rigurosa de la más general , que en este caso es la integral medidora.

En el caso de un intervalo cerrado sobre la recta real, la integral medidora nos proporciona una construcción de la integral de Lebesgue que no recurre a la teoría de la medida; esto se debe a que para funciones no negativas la integral de Lebesgue y la integral medidora coinciden (una construcción similar, en el sentido de no recurrir a teoría de la medida, puede encontrarse en Riesz y Sz-Nagy [5]). De lo anterior se desprende que los espacios $L^p[a,b]$ construidos con ambas integrales coinciden y nada se gana con la utilización de una integral más general. De hecho, las motivaciones de la integral medidora se encuentran en otras direcciones, por ejemplo, mejorar teoremas sobre dependencia continua de soluciones de ecuaciones diferenciales, para lo cual es conveniente contar con una integral aplicable a funciones que se disparan o tienen fuertes oscilaciones [4]. En cierta manera podríamos decir que la integral medidora es la *integral impropia* de Lebesgue, pues como se señala en [2, pág. 10], para funciones reales sobre un intervalo cerrado, la hipótesis de que f sea acotada implica la equivalencia de las condiciones siguientes: 1) f es Lebesgue medible, 2) f es Lebesgue integrable y 3) f es medidoramente integrable.

Por otro lado, la construcción de la integral de Lebesgue a partir de teoría de la medida tiene la virtud de su fácil generalización a otros contextos, virtud que no se ve que tenga la integral medidora.

Insistiendo en el punto, el estudiar las relaciones entre estas tres integrales como parte de un curso de análisis ayudaría a los estudiantes a darse cuenta de los significados de la generalización en matemáticas y las razones por las cuales se lleva a cabo.

Digamos, a modo de conclusión, que es difícil de aceptar que: *Sólo por un accidente de la historia la integral de Riemann es la que se utiliza hoy en día en los libros de calculo*, como se asevera en [1]; tal aseveración no es aceptable ni en el matiz casual ni en el catastrófico de la palabra *accidente.* No es posible, tampoco, aceptar que la información en libros de texto se proporcione con pasos de zorra, esto es, borrando con la cola los rastros sobre la nieve.

Referencias

[1] R. Bartle, R. Henstock, J. Kurzweil, E. Schechter, S. Schwabik and R. Vyborny,An open letter. (1997), http://atlas.math.vanderbilt.edu/ schectex/ccc/gauge/letter/

[2] E. Schechter, *An introduction to the gauge integral,* (1998), http://atlas.math.vanderbilt.edu/ schectex/ccc/gauge/

[3] C. Bosch y J. Kucera, *De una integral a otra ¿cuál escoger?.* (1999), Miscelánea Matemática # 28, pags. 1–10.

[4] C. Imaz y Z. Vorel, *Generalized ordinary differential equations in banach space and applications to functional equations.* (1966) Bol. Soc. Mat. Mex. , Vol.11 pags. 47–59.

[5] F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Functional analysis* (1955), Ungar, Nueva York.