Miscelánea Matemática **44** (2007) 83–100 SMM

Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue

Fernando Galaz-García
Department of Mathematics
University of Maryland
College Park MD 20742
galazg@math.umd.edu

Resumen

Hacemos algunos comentarios sobre el artículo en el que H. Lebesgue definió por primera vez su integral y establecemos la equivalencia de su definición original de medida con definiciones posteriores.

1. Introducción

Henri Lebesgue (1875–1941) no era entusiasta de las generalizaciones. Alguna vez escribió que, "reducida a teorías generales, las matemáticas serían una hermosa forma sin contenido" [10]. Sin embargo, su contribución más importante a la matemática fue, precisamente, una generalización. La teoría de integración desarrollada por Lebesgue extendió la teoría de Riemann a una clase más amplia de funciones. Aunque esta ampliación es útil por sí misma, su virtud principal es que los teoremas relacionados con el intercambio del límite y la integral son válidos bajo condiciones más generales que las requeridas por la integral de Riemann. Esto permitió un gran avance en el estudio de las series trigonométricas, fundamentales en el análisis de Fourier. Esta rama del análisis vio gran actividad a principios del siglo XX y fue de particular interés para Lebesgue a lo largo de su carrera.

Lebesgue dio a conocer con detalle su teoría de integración en su tesis doctoral *Intégrale, longueur, aire* [7], presentada en la Universidad de Nancy en 1902. Sin embargo, fue en 1901, en su nota *Sur une* *généralisation de l'intégrale définie* [6] aparecida en los *Comptes Rendus* de la Academia de Ciencias de París, cuando expuso por primera vez una síntesis de sus resultados. La lectura de este documento histórico es de gran interés, pues se trata de la primera manifestación de las ideas que dieron origen a lo que hoy se conoce como *medida* e *integral de Lebesgue*. En las secciones siguientes haremos algunos comentarios sobre el artículo original de Lebesgue y demostraremos la equivalencia entre la definición original de medida que dio Lebesgue en [6] y otras definiciones más familiares, debidas al mismo Lebesgue y a Carathéodory. El texto que en las páginas siguientes aparece entre comillas pertenece a la nota original [6], cuya traducción incluimos en el apéndice A.

2. Primitivas e integral de Riemann

Comencemos por recordar algunas definiciones básicas en la teoría de integración. Tomemos un intervalo $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, con $a \leq b$, y consideremos una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Diremos que una función F es una *primitiva* de f si

$$F'(x) = f(x),\ a \leq x \leq b.$$

Al inicio de su nota, Lebesgue observa que "en el caso de las funciones continuas, hay identidad entre las nociones de integral y de función primitiva." Esto es resultado de que toda función continua es integrable en el sentido de Riemann y, como consecuencia del teorema fundamental del cálculo, su integral es una primitiva.

La teoría de integración de Riemann es capaz de tratar con una clase de funciones más amplia que la de las funciones continuas. Por ejemplo, es suficiente que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sea monótona para que su integral de Riemann exista. Sin embargo, la integral de Riemann tiene algunas debilidades. De entre ellas, Lebesgue hace notar que "no todas las funciones derivadas son integrables, en el sentido de Riemann." Históricamente, los primeros ejemplos de funciones con tal propiedad fueron funciones derivables cuya derivada no es acotada. Es claro, en este caso, que la derivada no es integrable en el sentido de Riemann. Una de estas funciones es

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x^2) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Teniendo en cuenta este ejemplo, resulta natural formular la siguiente pregunta: ¿existen funciones cuya derivada sea acotada pero no integrable en el sentido de Riemann? El matemático italiano Vito Volterra

(1860–1940) dio solución a este problema al construir una función con estas propiedades (cf. [17]). La construcción moderna del ejemplo de Volterra es algo laboriosa y utiliza algunas herramientas de teoría de la medida, razón por la cual es presentada en el apéndice B.

Existen también funciones integrables en el sentido de Riemann y que no poseen primitiva. Tomemos, por ejemplo, las funciones

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases} ;$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

No es difícil verificar que f y g son integrables en el sentido de Riemann. Consideremos ahora la función

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ;$$

esta función es derivable y $h' = \varphi + f$, donde φ es continua. Luego

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

es una primitiva de φ y, en consecuencia, $h - \Phi$ es una primitiva de f. Supongamos ahora que g tiene primitiva. Entonces también la tendrá $g - f$, que toma únicamente los valores 0 y 1. Esto contradice el teorema del valor intermedio de Darboux para derivadas, que nos asegura que si una función derivada toma dos valores, entonces toma también todos los valores intermedios. Otro ejemplo de una función integrable en el sentido de Riemann y sin primitiva es el de una función continua en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos, en donde las discontinuidades son de salto. Esta función es integrable en el sentido de Riemann. Por otra parte, se sigue del teorema del valor intermedio de Darboux para derivadas que tal función no posee primitiva.

Estos ejemplos nos indican que la teoría de integración de Riemann no resuelve por completo el problema de la búsqueda de primitivas. Al parecer, fue Volterra el primero en hacer notar la posibilidad de generalizar el concepto de integral más allá de la definición dada por Riemann, al escribir en [17] que “en algunos casos, puede suceder que la definición ordinaria de integral [en términos de una función primitiva] no esté incluida en aquélla de Riemann..." (citado en [5], p. 57); en palabras del propio Lebesgue: "podemos desear una definición de la integral que comprenda como caso particular a la de Riemann y que permita resolver el problema de las funciones primitivas."

3. La definición de Lebesgue

Recordemos cómo se define la integral de Riemann; con este propósito, siguiendo a Lebesgue, consideramos una función continua y creciente

$$y\colon [a,b] \to \mathbb{R} ,$$

y "dividimos el intervalo (a,b) en intervalos parciales y hacemos la suma de las cantidades obtenidas al multiplicar la longitud de cada intervalo parcial por uno de los valores de y cuando x está en ese intervalo". Esto equivale a tomar una partición $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ de $[a,b]$, donde $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, y considerar las sumas de la forma

$$S = \sum_{i=0}^{n} y(x_i)(a_{i+1} - a_i) ,$$

donde x_i está en $[a_i, a_{i+1}]$. Tras un proceso que involucra el refinamiento de la partición y el paso al límite, obtenemos $\int_a^b y(x)dx$, la integral de Riemann de y.

Usando la misma idea que Riemann, Gastón Darboux (1842-1917) definió las integrales *por defecto* y *por exceso*, también conocidas como *integral inferior* e *integral superior*, respectivamente. Para definir estas integrales, denotemos por m_i al ínfimo y por M_i al supremo de y en el subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$. Al igual que con la integral de Riemann, consideramos las sumas de la forma

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \sum_{i=0}^{n} m_i(a_{i+1} - a_i), \\ \overline{S} &= \sum_{i=0}^{n} M_i(a_{i+1} - a_i) . \end{aligned}$$

Observemos que

$$\underline{S} \le S \le \overline{S},$$

independientemente de la elección de subintervalos. Definimos entonces la integral inferior de y por

$$\underline{\int_a^b} y(x)dx = \sup \underline{S},$$

donde hemos tomado el supremo sobre todas las posibles colecciones de subintervalos de $[a, b]$. De manera similar, definimos la integral superior de y por

$$\overline{\int_a^b} y(x)dx = \inf \overline{S}.$$

Notemos que siempre se cumple

$$\underline{\int_a^b} y(x)dx \leq \overline{\int_a^b} y(x)dx. \tag{3.1}$$

Las integrales inferior y superior tienen el mismo valor únicamente cuando la integral de Riemann existe; en este caso las tres integrales coinciden.

La *función de Dirichlet*, definida en $[a, b]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \text{ irrracional} \\ 1 & , \quad x \text{ racional} \end{cases},$$

nos muestra claramente que es posible tener una desigualdad estricta en (3.1). En consecuencia, la integral de Riemann de f no existe.

Notemos ahora que, "si x está en el intervalo (a_i, a_{i+1}), y varía entre ciertos límites m_i, m_{i+1}, y recíprocamente si y está entre m_i y m_{i+1}, x está entre a_i y a_{i+1}." Al tomar la división de la variación en x, es decir, los números a_i, como punto de partida para la definición de integral obtenemos las construcciones hechas por Riemann y por Darboux. Por otra parte, también hubiéramos podido tomar la "división de la variación de y, es decir, los números m_i." Ésta es precisamente la idea en que está basada la integral de Lebesgue.

Veamos cómo define Lebesgue esta integral. Con este fin, supongamos que $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es tal que

$$m \leq y(x) \leq M, \qquad a \leq x \leq b \ ,$$

donde $-\infty < m,\ M < \infty$. Tomemos $m_1,\ \ldots,\ m_p$ tales que

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{p-1} < M = m_p \ .$$

Consideremos ahora los conjuntos

$$\begin{aligned} E_0 &= y^{-1}(m), \\ E_i &= y^{-1}((m_{i-1}, m_i]), \quad i = 1, \ldots, p. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hemos ilustrado este proceso en la figura 1.

Antes de definir la medida $\lambda_0,\ \lambda_i$ de los conjuntos $E_0,\ E_i$, "consideremos una u otra de dos sumas

$$m_0\lambda_0 + \Sigma m_i\lambda_i\ ;\ m_0\lambda_0 + \Sigma m_{i-1}\lambda_i\ ;$$

si, cuando la diferencia máxima entre dos m_i consecutivos tiende a cero, estas sumas tienden a un mismo límite independiente de los m_i elegidos, este límite será por definición la integral de y, que será llamada *integrable*."

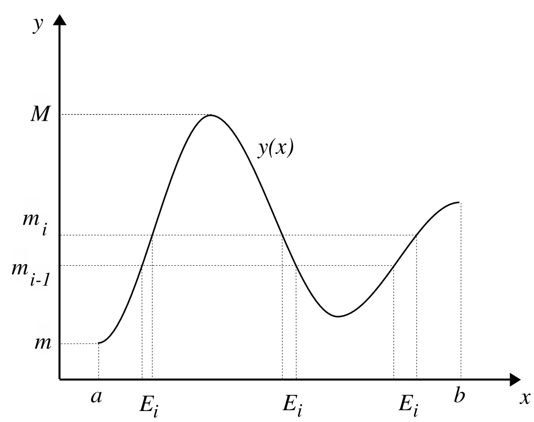

Figura 1: Construcción de la integral de Lebesgue

Enunciada ya la definición de integral, hagamos una pausa para ver, de forma intuitiva, la diferencia fundamental entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue. En un artículo publicado en 1927 [9], Lebesgue compara el proceso de integración con el de contar cuánto dinero tenemos en un conjunto de monedas de distintas denominaciones. Integrar a la manera de Riemann correspondería con ir sumando los valores de las monedas en el orden en que éstas se nos van presentando. Por otra parte, para integrar a la manera de Lebesgue, primero agrupamos las monedas por su denominación y contamos cuántas monedas de cada tipo tenemos, por ejemplo: n_1 monedas de 1 peso, n_2 monedas de 2 pesos, y así hasta agrupar todas las denominaciones; después sumamos $1(n_1) + 2(n_2) + \ldots$ hasta terminar. ¡La manera de Lebesgue parece más eficiente!

4. ¿Cómo medimos los conjuntos?

Para poder calcular la integral que definimos debemos primero especificar cuánto miden los conjuntos E_0, E_i, definidos en (3.2). Es la necesidad de asignarle una medida a estos conjuntos lo que motiva a Lebesgue a estudiar la medida de subconjuntos de $[a, b]$. Más adelante el problema de medir conjuntos arbitrarios tomaría importancia por sí mismo, desarrollándose así la *teoría de la medida*.

Para asignar una medida a los subconjuntos de $[a, b]$, "consideremos un conjunto de puntos de (a, b); podemos encerrar de una infinidad de maneras estos puntos en una infinidad numerable de intervalos; el límite inferior de la suma de las longitudes de estos intervalos es la medida del conjunto."

A esta "medida" se le conoce con el nombre de *medida exterior*; para $E \subset \mathbb{R}$, se define actualmente como

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\} \ ,$$

donde $I_n = (a_n, b_n)$, $-\infty < a_n \leq b_n < \infty$ y $\ell(I_n) = b_n - a_n$. Es inmediato de esta definición que la medida exterior del conjunto vacío y la de un punto son cero. Asimismo, $m^*((a, b)) = m^*([a, b]) = b - a$ y, si $E_1 \subset E_2$, entonces $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$. Llamamos a esta última propiedad *monotonía*. Otra característica fundamental de la medida exterior es la *σ-subaditividad*: si $\{E_n\}$ es una familia numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

El lector puede consultar la demostración de esta propiedad de la medida exterior en cualquier texto que trate la medida de Lebesgue, por ejemplo, [1], [4] ó [14].

Lebesgue define que $E \subset (a, b)$ es *medible* "si su medida aumentada con la del conjunto de puntos que no forman parte de E da la medida de (a, b)." Esto es, si

$$m^*((a, b)) = m^*(E) + m^*((a, b) \cap E^c) \ . \tag{4.1}$$

Observemos que la clase de subconjuntos medibles de (a, b) es diferente del vacío, pues contiene por lo menos al conjunto vacío, ya que

$$m^*(\emptyset) + m^*((a, b)) = m^*((a, b)) \ .$$

Actualmente decimos que $E \subset \mathbb{R}$ es medible si, para todo $A \subset \mathbb{R}$, se cumple que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c). \tag{4.2}$$

Constantin Carathéodory (1873-1950) dio a esta propiedad carácter de definición en su libro *Vorlesungen über reelle Funktionen* [2], publicado por primera vez en 1918. En [7] Lebesgue enunció otra de las definiciones modernas de medibilidad. Ésta involucra la *medida interior* de un conjunto $E \subset \mathbb{R}$, que denotamos por $m_*(E)$ y definimos como

$$m_*(E) = \sup\{m^*(F) : F \subset E,\ F \text{ es cerrado}\}.$$

Observemos que $m_*(E) \leq m^*(E)$.

En términos de medida exterior y medida interior, diremos que un conjunto E tal que $m^*(E) < \infty$ es *medible* si

$$m_*(E) = m^*(E). \tag{4.3}$$

Tenemos entonces tres definiciones distintas de medibilidad, dadas por (4.1), (4.2) y (4.3). ¿Son equivalentes? Demostraremos en seguida que, en el caso de conjuntos acotados, las tres definiciones coinciden. Sin embargo, antes de poner manos a la obra debemos desarrollar algunas herramientas que nos serán de utilidad en la demostración de este resultado.

Dados dos conjuntos $E_1,\ E_2 \subset \mathbb{R}$, la medida exterior satisface la desigualdad

$$m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2) \leq m^*(E_1) + m^*(E_2). \tag{4.4}$$

Demostremos esta desigualdad partiendo del hecho de que, cuando U y V son conjuntos abiertos,

$$m^*(U \cup V) + m^*(U \cap V) = m^*(U) + m^*(V) \tag{4.5}$$

(cf. [1], p. 10). Si alguno de los conjuntos E_1, E_2 tiene medida exterior infinita, la desigualdad se cumple de manera trivial. Supongamos ahora que E_1 y E_2 tienen medida exterior finita. Fijemos $\epsilon > 0$. La definición de medida exterior implica que existen colecciones numerables de intervalos abiertos $\{I_k\}$ y $\{J_l\}$ tales que $E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ E_2 \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} J_l$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < m^*(E_1) + \epsilon/2, \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \ell(J_l) < m^*(E_2) + \epsilon/2.$$

Notemos que $U \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y $V \equiv \bigcup_{l=1}^{\infty} J_l$ son conjuntos abiertos tales que

$$E_1 \cup E_2 \subset U \cup V, \qquad E_1 \cap E_2 \subset U \cap V.$$

La definición de la medida exterior implica que

$$m^*(U) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k), \qquad m^*(V) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \ell(J_l).$$

Por otra parte, por la monotonía de la medida exterior,

$$m^*(E_1 \cup E_2) \leq m^*(U \cup V), \qquad m^*(E_1 \cap E_2) \leq m^*(U \cap V).$$

Luego, a partir de (4.5) y las dos desigualdades anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned} m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2) &\leq m^*(U \cup V) + m^*(U \cap V) \\ &= m^*(U) + m^*(V) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) + \sum_{l=1}^{\infty} \ell(J_l) \\ &\leq m^*(E_1) + m^*(E_2) + \epsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $\epsilon \to 0$ obtenemos la desigualdad (4.4).

Podemos también comparar las medidas exterior e interior de dos conjuntos disjuntos $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ mediante la desigualdad

$$m_*(E_1 \cup E_2) \leq m_*(E_1) + m^*(E_2) \leq m^*(E_1 \cup E_2) \tag{4.6}$$

(cf. [1], p. 16 ó [14], p. 320). Estamos listos ahora para enunciar y demostrar nuestro teorema:

Teorema 4.1. *Sea $E \subset (a, b)$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) (Lebesgue, 1901)

$$m^*((a, b)) = m^*((a, b) \cap E) + m^*((a, b) \cap E^c).$$

ii) (Lebesgue, 1902)

$$m_*(E) = m^*(E).$$

iii) (Carathéodory, 1918) *Para todo $A \subset \mathbb{R}$,*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii). Por hipótesis,

$$\begin{aligned} m^*((a,b)) &= m^*((a,b)\cap E) + m^*((a,b)\cap E^c) \\ &= m^*(E) + m^*((a,b)\cap E^c). \end{aligned}$$

Por otra parte, no es difícil ver que

$$\begin{aligned} m^*((a,b)) &= m_*((a,b)\cap E) + m^*((a,b)\cap E^c) \\ &= m_*(E) + m^*((a,b)\cap E^c) \end{aligned}$$

(cf. [1], p. 13). Como todos los conjuntos involucrados tienen medida exterior finita, las igualdades anteriores implican que

$$m_*(E) = m^*(E).$$

ii) $\Rightarrow$ iii). Fijemos $A \subset \mathbb{R}$ y observemos que A es la unión disjunta de los conjuntos $A \cap E$ y $A \cap E^c$. Se sigue de la σ-subaditividad que

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Probemos ahora la desigualdad en dirección opuesta. A partir de la desigualdad (4.6), tenemos que

$$m^*((A \cap E^c) \cup E) \geq m^*(A \cap E^c) + m_*(E).$$

Por hipótesis, $m^*(E) = m_*(E)$, de manera que

$$m^*((A \cap E^c) \cup E) \geq m^*(A \cap E^c) + m^*(E).$$

De la desigualdad (4.4),

$$m^*(A) + m^*(E) \geq m^*(A \cap E) + m^*((A \cap E^c) \cup E).$$

Combinando las últimas dos desigualdades,

$$m^*(A) + m^*(E) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) + m^*(E).$$

Como $E \subset (a,b)$, entonces $m^*(E) < \infty$ y se sigue que

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Por lo tanto,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

iii) $\Rightarrow$ i). Inmediato, tomando $A = (a,b)$. $\square$

Es natural preguntarnos qué propiedades tienen los conjuntos medibles. Lebesgue distingue tres propiedades fundamentales: "estando dada una infinidad de conjuntos medibles E_i, el conjunto de puntos que forman parte de al menos uno de ellos es medible; si los E_i no tienen dos a dos ningún punto en común, la medida del conjunto obtenido es la suma de las medidas E_i. El conjunto de puntos comunes a todos los E_i es medible." Observemos que, cuando Lebesgue habla de "una infinidad de conjuntos medibles", se refiere a una infinidad numerable. Las propiedades primera y tercera, junto con el hecho de que el conjunto vacío es medible, están estrechamente relacionadas con que la clase de conjuntos medibles es una *σ-álgebra*. Notemos también que la segunda de las propiedades que menciona Lebesgue corresponde a la *σ-aditividad* de la medida.

5. Funciones medibles

Ahora que sabemos cómo medir subconjuntos de $[a, b]$, estamos casi listos para calcular la integral. Nos resta ver para qué funciones existe la integral que hemos definido. Con este fin, "es natural considerar primero las funciones tales que los conjuntos que figuran en la definición de la integral sean medibles. Encontramos que: *si una función acotada superiormente en valor absoluto es tal que cualesquiera que sean A y B, el conjunto de valores de x para los cuales tenemos $A < y \leq B$ es medible, ésta es integrable* por el procedimiento indicado. Una función tal será llamada *sumable*." Es importante notar que todas las funciones que Lebesgue considera son acotadas. Teniendo esto en cuenta, es fácil ver que actualmente nos referimos a las funciones que Lebesgue nombra *sumables* como funciones *medibles* (cf. [5], p. 125). Por lo tanto, en los párrafos siguientes, en donde hemos citado a Lebesgue la palabra *sumable* tiene el significado moderno de *medible*. Sugerimos al lector tener esto presente al leer el resto de esta sección, con el objeto de evitar confusiones.

Lebesgue observa que "la integral de una función sumable está comprendida entre la integral por defecto y por exceso." Esto implica que "*toda función integrable en el sentido de Riemann es sumable*, ya que el conjunto de sus puntos de discontinuidad es de medida nula, y podemos demostrar que si, haciendo la sustracción de un conjunto de valores de x de medida nula, permanece un conjunto en cada punto del cual una función es continua, esta función es sumable." Esta observación nos permite inmediatamente formar funciones que no son integrables en el sentido de Riemann y, sin embargo, son medibles e integrables en el sentido de Lebesgue. El ejemplo que da Lebesgue en su nota, ahora clásico, es el de la función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x \text{ irracional} \\ 1 \quad , & x \text{ racional}\,. \end{cases}$$

Como vimos en §4, la integral de Riemann de esta función no existe; por otra parte, es fácil ver que su integral (de Lebesgue) es cero. Con esto queda establecido que la integral que definió Lebesgue es, en efecto, una generalización propia de la integral de Riemann.

Lebesgue hace mención de dos propiedades de las funciones medibles:

- "*Si f y ϕ son sumables, $f+\phi$ y $f\phi$ lo son y la integral de $f+g$ es la suma de las integrales de f y de ϕ.*
- "*Si una sucesión de funciones sumables tiene un límite, éste es una función sumable.*"

Es claro que el conjunto de funciones medibles contiene a $y = k$ y $y = x$. Como consecuencia del primer resultado, los polinomios son funciones sumables. Usando el teorema de aproximación de Weierstrass y aplicando el segundo resultado, concluimos que las funciones continuas son medibles. Siguiendo este procedimiento, encontramos que el conjunto de funciones medibles contiene "todos los límites de funciones continuas, es decir, las funciones de primera clase (ver Baire, *Annali di Matematica, 1899*), contiene todas aquéllas de segunda clase, etc.".

"En particular, *toda función derivada, acotada superiormente en valor absoluto*, siendo de primera clase, *es sumable* y podemos demostrar que su integral considerada como función de su límite superior, es una de sus funciones primitivas."

En este último párrafo, Lebesgue anuncia la solución del problema que planteó al inicio de su nota: encontrar una generalización de la integral de Riemann que resuelva el problema de las funciones primitivas.

6. Comentarios finales

La integral y medida de Lebesgue son la culminación de una serie de ideas cuyos orígenes llegan hasta los matemáticos griegos Eudoxo de Cnido (408 a.C.–355 a.C.) y Arquímedes de Siracusa (287 a.C.–212 a.C.), pasando por las contribuciones fundamentales de Agustín Cauchy (1789–1857), Bernhard Riemann (1826–1866) y Émile Borel (1871–1956). El lector puede encontrar un breve bosquejo de la evolución del concepto de integral y medida en [15]. Para un marco histórico de las ideas de Lebesgue y, en general, del génesis de la teoría de integración, puede consultarse [5]. El lector interesado en datos biográficos de Lebesgue puede consultar [3], [13] ó el ensayo de K. May en [11]. Por supuesto, no podemos dejar de referir al lector a los textos del mismo Lebesgue (e.g. [9], [8], [11], [12]), quien escribió bastante sobre sus propios trabajos.

Agradecimientos. Una primera versión de este trabajo fue escrita a sugerencia de Víctor Pérez-Abreu en el último año de licenciatura del autor en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Guanajuato-CIMAT. El autor agradece también a Fernando Galaz Fontes la lectura de varias versiones de este manuscrito. Parte de este trabajo fue escrito con apoyo del CONACyT, México.

Apéndice A.

Sobre una generalización de la integral definida

Nota del Sr. **H. Lebesgue** presentada por el Sr. Picard

ante la Académie des Sciences.

29 de abril de 1901

En el caso de las funciones continuas, hay identidad entre las nociones de integral y de función primitiva. Riemann ha definido la integral de ciertas funciones discontinuas, pero no todas las funciones derivadas son integrables, en el sentido de Riemann. El problema de la búsqueda de funciones primitivas no es entonces resuelto por la integración, y podemos desear una definición de la integral que comprenda como caso particular a la de Riemann y que permita resolver el problema de las funciones primitivas [1].

Para definir la integral de una función continua creciente

$$y(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

[1]Estas dos condiciones impuestas *a priori* a toda generalización de la integral son evidentemente compatibles, porque toda función derivada integrable, en el sentido de Riemann, tiene por integral una de sus funciones primitivas.

dividimos el intervalo (a,b) en intervalos parciales y hacemos la suma de las cantidades obtenidas al multiplicar la longitud de cada intervalo parcial por uno de los valores de y cuando x está en ese intervalo. Si x está en el intervalo (a_i, a_{i+1}), y varía entre ciertos límites m_i, m_{i+1}, y recíprocamente si y está entre m_i y m_{i+1}, x está entre a_i y a_{i+1}. De manera que en lugar de darse la división de la variación de x, es decir, de darse los números a_i hubiera podido darse la división de la variación de y, es decir, los números m_i. De ahí dos maneras de generalizar la noción de integral. Sabemos que la primera (darse los a_i) conduce a la definición dada por Riemann y a las definiciones de integrales por exceso y por defecto dadas por el Sr. Darboux. Veamos la segunda.

Sea y una función comprendida entre m y M. Démonos

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{p-1} < M = m_p \; ;$$

$y = m$ cuando x forma parte de un conjunto E_0; $m_{i-1} < y \leq m_i$ cuando x forma parte de un conjunto E_i.

Definiremos más adelante las medidas λ_0, λ_i de estos conjuntos. Consideremos una u otra de dos sumas

$$m_0\lambda_0 + \Sigma m_i \lambda_i \; ; \; m_0\lambda_0 + \Sigma m_{i-1}\lambda_i \; ;$$

si, cuando la diferencia máxima entre dos m_i consecutivos tiende a cero, estas sumas tienden a un mismo límite independiente de los m_i elegidos, este límite será por definición la integral de y, que será llamada *integrable*.

Consideremos un conjunto de puntos de (a,b); podemos encerrar de una infinidad de maneras estos puntos en una infinidad numerable de intervalos; el límite inferior de la suma de las longitudes de estos intervalos es la medida del conjunto. Un conjunto E es llamado *medible* si su medida aumentada con la del conjunto de puntos que no forman parte de E da la medida de (a,b) [2]. He aquí dos propiedades de estos conjuntos: estando dada una infinidad de conjuntos medibles E_i, el conjunto de puntos que forman parte de al menos uno de ellos es medible; si los E_i no tienen dos a dos ningún punto común, la medida del conjunto obtenido es la suma de las medidas E_i. El conjunto de puntos comunes a todos los E_i es medible.

Es natural considerar primero las funciones tales que los conjuntos que figuran en la definición de la integral sean medibles. Encontramos

[2] Si agregamos a estos conjuntos conjuntos de medidas nulas elegidos convenientemente, uno obtiene conjuntos medibles en el sentido del Sr. Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions*).

que: *si una función acotada superiormente en valor absoluto es tal que cualesquiera que sean A y B, el conjunto de valores de x para los cuales tenemos $A < y \leq B$ es medible, ésta es integrable* por el procedimiento indicado. Una función tal será llamada *sumable.* La integral de una función sumable está comprendida entre la integral por defecto y la integral por exceso. De tal suerte que, *si una función integrable en el sentido de Riemann es sumable, la integral es la misma con las dos definiciones.* O, *toda función integrable en el sentido de Riemann es sumable*, ya que el conjunto de sus puntos de discontinuidad es de medida nula, y podemos demostrar que si, haciendo la sustracción de un conjunto de valores de x de medida nula, permanece un conjunto en cada punto del cual una función es continua, esta función es sumable. Esta propiedad permite formar inmediatamente funciones no integrables en el sentido de Riemann, y sin embargo sumables. Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones continuas, $\varphi(x)$ no siendo siempre nula; una función que no difiere de $f(x)$ más que en los puntos de un conjunto de medida nula denso en todas partes y que en estos puntos es igual a $f(x) + \varphi(x)$ es sumable sin ser integrable en el sentido de Riemann.

Ejemplo: La función igual a 0 si x irracional, igual a 1 si x racional. El proceso de formación anterior muestra que el conjunto de funciones sumables tiene una cardinalidad superior al continuo. He aquí dos propiedades de las funciones de este conjunto.

1. *Si f y φ son sumables, $f + \phi$ y $f\phi$ lo son y la integral de $f + \varphi$ es la suma de las integrales de f y de φ.*

2. *Si una sucesión de funciones sumables tiene un límite, éste es una función sumable.*

El conjunto de funciones sumables contiene evidentemente $y = k$ y $y = x$; luego, de acuerdo a 1., contiene todos los polinomios y como, de acuerdo a 2., contiene todos sus límites, contiene por lo tanto todas las funciones continuas, todos los límites de funciones continuas, es decir, las funciones de primera clase (ver Baire, *Annali di Matematica, 1899*), contiene todas aquéllas de segunda clase, etc.

En particular, *toda función derivada, acotada superiormente en valor absoluto*, siendo de primera clase, *es sumable* y podemos demostrar que su *integral, considerada como función de su límite superior, es una de sus funciones primitivas.*

Ahora, he aquí una aplicación geométrica: si $|f'|, |\varphi'|, |\psi'|$ son acotadas superiormente, la curva

$$x = f(t), y = \varphi(t), z = \psi(t)$$

tiene por longitud la integral de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$. Si $\varphi = \psi = 0$, tenemos la variación total de la función f de variación acotada. En el caso en que f', φ', ψ' no existan, podemos obtener un teorema casi idéntico reemplazando las derivadas por los números derivados de Dini.

Traducción del autor.

APÉNDICE B.

El objetivo de este apéndice es construir una función cuya derivada sea acotada pero no integrable en el sentido de Riemann. La construcción que aquí presentamos está basada en [16], pp. 98–99. El primer paso consiste en construir cierto subconjunto del intervalo $[0,1]$ que tenga medida $1/2$. Comencemos por remover del intervalo $[0,1]$ el subintervalo $(5/12, 7/12)$. Notemos que este subintervalo tiene longitud $1/2 \cdot 1/3$ y su punto medio coincide con el punto medio del intervalo $[0,1]$. Denotemos por E_1 a la unión de los dos intervalos cerrados que quedan después de remover $(5/12, 7/12)$ de $[0,1]$. De manera análoga a como lo hicimos con el intervalo $[0,1]$, removamos ahora de cada uno de los intervalos que componen E_1 un intervalo de longitud $1/2 \cdot 1/3^2$. Obtenemos de esta manera un nuevo conjunto E_2 que consiste de cuatro intervalos cerrados. Repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión de conjuntos cerrados $\{E_n\}$ tal que $E_{n+1} \subset E_n$. Sea $H = \cap_{n=1}^{\infty} E_n \subset [0,1]$. El conjunto H es compacto y, por lo tanto, medible. No es difícil verificar, a partir de su construcción, que tiene medida $1/2$.

Sea (a,b) uno de los intervalos contenidos en $[0,1] \setminus H$. Definamos f en (a,b) de la siguiente manera: $f(t) = (t-a)^2 \text{sen}(1/(t-a))$ en (a, α), donde $\alpha < (a+b)/2$ es tal que $f'(\alpha) = 0$; $f(t) = f(\alpha)$ en $[\alpha, (a+b)/2]$. De esta manera

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(t-a)\text{sen}\left(\frac{1}{t-a}\right) + (t-a)^2 \cos\left(\frac{1}{t-a}\right) \cdot \left(\frac{-1}{(t-a)^2}\right) \\ &= 2(t-a)\text{sen}\left(\frac{1}{t-a}\right) - \cos\left(\frac{1}{t-a}\right) \end{aligned}$$

y es 0 para $t \in [\alpha, (a+b)/2] \cup \{a\}$. Definamos f en $[(a+b)/2, b]$ reflejando respecto a la línea $t = (a+b)/2$. Finalmente, definamos f a

$[0,1]$ definiendo $f(t)=0$ para $t \in H$. Observemos que f' existe para todo $t \in [0,1] \setminus H$ y $|f'| \leq 3$ en $[0,1] \setminus H$.

Fijemos ahora $x \in H$ y veamos que $f'(x)=0$. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $|x-t| < \varepsilon$. Si $t \in H$, entonces

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = 0.$$

Si $t \in [0,1] \setminus H$, entonces t está en algún intervalo abierto $(a,b) \subset [0,1] \setminus H$. Sea d el extremo de (a,b) más cercano a t. Entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| = \left|\frac{f(t)}{t-x}\right| &\leq \left|\frac{f(t)}{t-d}\right| \\ &\leq \frac{|t-d|^2}{|t-d|} = |t-d| \\ &\leq |t-x| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que $f'(x)=0$.

Los párrafos anteriores demuestran que f' existe en todo $[0,1]$ y es acotada. Por otra parte, para cualquier $x \in H$ se cumple que $\limsup f'(t)_{t \to x} = 1$ y $f'(x) = 0$. Por lo tanto f' es discontinua en H. Por último, como $m(H) = 1/2 > 0$, f' no es integrable en el sentido de Riemann, ya que el conjunto de discontinuidades de una función integrable en el sentido de Riemann tiene necesariamente medida cero.

Referencias

[1] J. C. Burkill, *The Lebesgue integral*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no. 40, Cambridge University Press, 1951.

[2] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle funktionen*, 3rd ed., Chelsea Publishing Company, New York, 1968.

[3] G. Choquet, *Borel, Baire, Lebesgue*, Panor. Synthéses (2004), no. 18, 23–37.

[4] F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$, 1a ed., Oxford University Press México, 2002.

[5] T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration: its origins and development*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, New York 1975.

[6] H. Lebesgue, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, Ac. Sci. C.R. **132** (1901), 1025–1028.

[7] ______, *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Matematica **3** (1902), no. 7, 231–359.

[8] ______, *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **(3)** (1918), no. 35, 191–250.

[9] ______, *Sur le dévelopement de la notion d'intégrale*, Revue de métaphysique et de morale **34** (1927), no. 2, 149–167.

[10] ______, *Humbert et Jordan, Roberval et Ramus*, Enseign. Math. **2** (1957), no. 3, 149–167.

[11] ______, *Measure and the integral*, The Mathesis series, Holden-Day, 1966.

[12] ______, *La medida de las magnitudes*, Serie metrología técnica, Limusa, México, 1995.

[13] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *The Mactutor History of Mathematics archive*, University of St Andrews, URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/.

[14] H. L. Royden, *Real analysis*, 3rd ed., Prentice Hall, New Jersey, 1998.

[15] A. Shenitzer and J. Steprāns, *The evolution of integration*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 1, 66–72.

[16] C. W. Swartz, *Measure, integration and function spaces*, World Scientific, Singapore, 1994.

[17] V. Volterra, *Sui principii del calcolo integrale*, Giorn. Mat. Battaglini **19** (1881), 333–372.