Dedico este trabajo a Juan José Arreola.

EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

Alejandro López Yáñez*

A continuación haremos una exposición de algunos aspectos del problema de los tres cuerpos.

Al final del trabajo se incluyen una guía de notación y una lista de referencias bibliográficas para los interesados en profundizar en algún tema.

El problema de los n-cuerpos

En dicho problema consideramos n masas puntuales m_1, $m_2,\ldots,m_n$ en R^3, atrayéndose por parejas con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

La cuestión es cómo evoluciona el sistema a medida que el tiempo transcurre.

Las ecuaciones diferenciales que controlan el movimiento del sistema pueden ser establecidas usando la segunda ley de Newton (fuerza = masa × aceleración) y son:

* Investigador del CIMAS, UNAM.

Es claro que una colisión en el tiempo τ produce una singularidad en τ.

Si $n=3$, esto es, si consideramos tres cuerpos (o partículas) únicamente, podemos afirmar que toda singularidad es causada por una colisión, parece ser que este resultado se debe a Painlevé. Para $n\geq 4$ no hay un resultado análogo, o en otra forma, es un problema abierto saber si toda singularidad es consecuencia de una colisión.

Existen resultados parciales en esta dirección, como el siguiente debido a Von Ziepel.

Supongamos que hay una singularidad en τ y que el $\lim I(t)$ es finito cuando t tiende a τ, entonces la singularidad es causada por una colisión en τ, (19).

Otro resultado referente a colisiones es que el conjunto de condiciones iniciales que llevan a una colisión tiene medida cero, sin embargo no se sabe si este conjunto es denso en el espacio fase, (16), (17).

Sabemos que las soluciones son analíticas, por lo tanto es deseable expresarlas en series de potencias convergentes para toda t. De hecho Mittag-Leffler sugirió al rey de Suecia y Noruega que se estableciera un premio para la primera persona que diera dicha expansión, esta primera persona fué Sundman, sin embargo el no recibió el premio, pues este ya se le había dado a Poincaré en 1889, quien aunque no había dado la solu ción del problema, si había hecho contribuciones fundamentales a la Mecánica Celeste.

Volviendo al problema de expresar en series de potencias las soluciones diremos que el principal obstáculo consiste en dar restricciones sobre las condiciones iniciales que nos aseguren la inexistencia de singularidades en el transcurso del movimiento, o equivaléntemente para tres partículas la inexistencia de colisiones. Esto no ha sido logrado hasta la fecha. La forma en que Sundman resolvió el problema fué introduciendo una nueva variable independiente s de tal manera que r_1, r_2, r_3, t, son funciones analíticas de s aún durante las colisiones binarias, de esta manera obtuvo expansiones en series de potencias para r_1, r_2, r_3, t, en términos de s que describen el movimiento completamente, siempre y cuando no haya una colisión general (de las tres partículas simultáneamente).

Weierstrass ya sabía que si el momento angular A es diferente de cero no puede haber una colisión general, esto fué probado por Sundman. Esto completa la imagen de la solución del problema dada por Sundman.

Podemos agregar que colisiones binarias corresponden a polos de las soluciones en términos de t, y colisiones generales corresponden en la "mayoría" de los casos a singularidades esenciales, (17).

Otro hecho bien conocido es que si tenemos una sucesión de colisiones binarias en los tiempos τ_n, entonces la sucesión τ_n no se puede acumular en un tiempo finito τ.

Con el nombre de regularización es conocido el proceso consistente en remover las singularidades de las ecuaciones y de las soluciones.

El trabajo de Sundman citado anteriormente cae dentro de la teoría de regularización analítica. Dentro de la línea de regularización geométrica del problema de los tres cuerpos tenemos los trabajos de Easton, (7), (8).

Integrales

Consideremos un subconjunto O del espacio fase formado por trayectorias completas del retrato fase y una función diferenciable $IN : O \times R \longrightarrow R^n$.

La función IN es llamada una integral del problema siempre y cuando sea constante a lo largo de trayectorias.

La energía H, el momento angular A y el momento lineal C son ejemplos de integrales. Para estas integrales O es todo el espacio fase.

Bruns ha probado que cualquier integral que es una función algebraica de $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, debe de ser una función algebraica de H, A, C, (13), (22).

Painlevé ha generalizado este teorema de tal manera que en la hipótesis sólo se considera a la integral dependiendo algebráicamente de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, (12).

Debemos notar que este teorema no excluye la existencia de in tegrales trascendentes en las mismas variables o integrales algebraicas en otras variables independientes.

El estudio de las integrales es muy importante porque permite disminuir el orden del sistema de ecuaciones diferenciales, ésto puede verse de la siguiente manera, consideremos la energía $H : EF \longrightarrow R$ dada por $H(r,v) = \sum_{i=1}^{3} m_i v_i^2 - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$

Si consideramos un número real α, la imagen inversa de α bajo H, esto es, $H^{-1}(\alpha)$ será en "general" una subvariedad del espacio fase de dimensión 17 (recuérdese que el espacio fase tiene dimensión 18), como H es constante a lo largo de trayectorias la subvariedad $H^{-1}(\alpha)$ estará compuesta por curvas completas del retrato fase, o sea que el problema consistente en estudiar el retrato fase en una variedad de dimensión 18 es reducido por medio de H al estudio para cada $\alpha \varepsilon R$ del flujo en una variedad de dimensión 17, a saber, $H^{-1}(\alpha)$, por lo tanto una forma de resolver el problema sería encontrar 17 integrales algebráicamente independientes. De hecho, durante mucho tiempo ésta fué la manera usual de atacar el problema de los tres cuerpos, así resalta la relevancia del teorema de Bruns.

Birkhoff propuso estudiar el carácter topológico de las variedades integrales, esto es, las obtenidas como imágenes inversas de alguna integral, recientemente se comenzó este estudio en forma sistemática, (18).

Si consideramos una variedad integral y una curva solución en ella, vemos que si a lo largo de la solución hay una colisión, entonces la curva tiende a salirse de la variedad, si esta colisión es binaria sabemos que la solución puede ser continuada analíticamente a través de ella, desde un punto de vista geométrico esto equivaldría a pegarle a la variedad los puntos correspondientes a estados de colisión y extender el flujo a través de estos puntos, obteniendo así la variedad integral regularizada.

Otra forma de efectuar esta regularización consiste en escindir una cierta "vecindad" de los estados correspondientes a colisión e identificar los extremos de las curvas que entran y salen de esa vecindad, (7), (8).

Estudio del comportamiento de las soluciones cuando t tiende a ∞

A principios de este siglo Chazy hizo una clasificación de movimientos tomando en cuenta el comportamiento del sistema cuando t tiende a ∞, (4), (5), (6). De acuerdo a su estudio cualquier movimiento del sistema cae dentro de una y sólo una de las siguientes clases:

I^+ acotados, II^+ parabólicos, III^+ hiperbólicos, IV^+ parabólicos hiperbólicos, V^+ parabólicos elípticos, VI^+ hiperbólicos elípticos, VII^+ oscilatorios.

A continuación daremos la descripción de estos tipos de movimientos, para esto consideremos el centro de masa fijo en el origen.

I^+ En este caso las partículas permanecen moviéndose en una región acotada de R^3 a medida que t tiende a $+\infty$

II^+ Las tres partículas escapan con velocidad proporcional a $t^{\frac{2}{3}}$

III^+ Las tres partículas escapan con velocidad proporcional a t

IV^+ Los tres cuerpos escapan, dos con velocidad proporcional a $t^{\frac{2}{3}}$ y el tercero con velocidad proporcional a t

V^+ Dos partículas se mueven en una región acotada de R^3 y la tercera escapa con velocidad proporcional a $t^{\frac{2}{3}}$

VI^+ Dos partículas se mueven en una región acotada de R^3 y la tercera escapa con velocidad proporcional a t

VII^+ Aquí tenemos que

$$\lim\sup \left(\max_i (|r_i(t)|) \right) = \infty \text{ cuando } t \text{ tiende a } +\infty \text{ y}$$

$$\lim\inf \left(\max_i (|r_i(t)|) \right) < \infty \text{ cuando } t \text{ tiende a } +\infty$$

De esta clasificación obtenemos una partición del espacio fase en siete subconjuntos. Un problema importante consiste en estudiar la estructura de estos subconjuntos así como sus posiciones relativas en el espacio fase, (1).

Cabe hacer notar que la existencia de movimientos oscilatorios (probada por Sitnikov en 1959, (1)) da una idea de lo complicado que puede ser el movimiento en una evolución del sistema de los tres cuerpos.

Chazy afirmó que todo movimiento tiene el mismo tipo de comportamiento asintótico cuando t tiende a $+\infty$ que cuando t tiende a $-\infty$, o sea $I^+ = I^-$, $II^+ = II^-$, $III^+ = III^-$, etc..
Durante mucho tiempo se pensó que los movimientos gozaban de esta notable simetría, sin embargo a raíz del cálculo numérico de algunos movimientos se empezó a dudar la veracidad de esa afirmación, por ejemplo se "obtenían" movimientos en $III^- \cap VI^+$, (2); Chazy atribuía ésto al crecimiento del error en el método numérico a medida que t tendía a ∞.
Reciéntemente se demostró, por ejemplo, que $III^- \cap VI^+ \neq \phi$ y por lo tanto la posibilidad de captura (o escape simétricamente) en el problema de los tres cuerpos, (1).

Soluciones particulares

Es fácil ver que el problema de los tres cuerpos no admite soluciones de equilibrio, o sea aquellas en que las coordenadas de las partículas no dependen del tiempo.
Euler y Lagrange encontraron soluciones del problema de los tres cuerpos para las cuales las partículas se mueven a lo largo de circunferencias contenidas en un plano, con velocidad angular constante. Hay cinco soluciones de este tipo, en las dos primeras (de Lagrange, (10)), las partículas descansan en los vértices de un triángulo equilátero de lado $(M\omega^{-2})^{\frac{1}{3}}$ que se encuentra rotando alrededor de su centro de masa con velocidad angular constante ω. En las tres restantes (de Euler, (9)) las partículas se encuentran colocadas sobre una línea recta

que rota uniformemente alrededor de su centro de masa.
Lagrange tambien se preguntó la existencia de soluciones para las cuales los triángulos formados durante el transcurso del movimiento estuviesen contenidos en un plano y fuesen semejantes. Así obtuvo soluciones en las cuales cada partícula se mueve sobre una cónica (de acuerdo al problema de los dos cuerpos) y los triángulos formados son semejantes.

Soluciones periódicas

Aplicando un teorema de Lyapunov, (17), se puede demostrar la existencia de familias a un parámetro de soluciones periódicas en la vecindad de las soluciones triangulares de Lagrange.
Aplicando otro teorema de Lyapunov que da criterios para decidir la estabilidad de soluciones, podemos ver que las soluciones de Euler no son estables.
Para las soluciones de Lagrange tenemos dos casos:
Si $27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < M^2$ las soluciones no son inestables y saber si son estables o no lo son, es un problema abierto.
Si $27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) \geq M^2$ las soluciones no son estables,
Las definiciones de estabilidad e inestabilidad pueden ser consultadas en (17).

Guía de notación

R^n, espacio euclidiano de dimensión n.

$r_i(t)$, vector de posición de la *i-ésima* partícula en el tiempo t.

$\ddot{r}_i(t)$, segunda derivada con respecto al tiempo de $r_i(t)$.

$r_{ij}(t) = |r_i(t)-r_j(t)|$.

$r_i^2(t) = |r_i(t)|^2$.

k, constante que solo depende de las unidades de medición.

$p_i(t) = r_i(t)$.

$q_i(t) = m_i\dot{r}_i(t)$.

$v(t) = \dot{r}_i(t)$.

H, ver página 7.

$I = \sum_1^n m_i r_i^2$, llamado momento de inercia.

$A = \sum_1^n m_i r_i \times v_i$.

C, ecuación del centro de masa.

EF, espacio fase.

ϕ, conjunto vacío.

$M = m_1 + m_2 + m_3$.

Referencias

1.Alekseev V. M., Quasirandom dynamical systems I, II, III, Math. Sbornik 76, (118), (1968), 72-134; 77, (119), (1968), 545-600; 78, (120), (1969), 3-50. Traduc. al inglés en Math. USSR Sbornik 5, (1968), 72-128; 6, (1968), 505-560; 7, (1969), 1-43.

2.Becker L., On capture orbits, Monthly Notices Royal Astron. Soc., 80, (1920), 590.

3.Birkhoff G. D., Dynamical Systems, Am. Math. Soc. Colloq. Publ., 1927

4.Chazy J., Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps quand le temps croit indefiniment, Annales de l'Ecole Norm. Sup., 3e sér., 39, (1922), 29-130.

5.Chazy J., Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps, Jou. Math. pures et appl., 8, (1929), 353-380.

6.Chazy J., Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps, Bull. Astron., 8, (1932), 403-436.

7.Easton R., Regularization of vector fields by surgery, Jou. Diff. Eq., 10, (1971), 92-99.

8.Easton R., The topology of the regularized integral surfaces of the three body problem, Jou. Diff. Eq., 12, (1972), 361-384,

9.Euler L., De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 11, (1767), 144-151.

10.Lagrange J. L., Oeuvres, vol. 6, 272-292.

11.Nemytskii V. V.-Stepanov V. V., Qualitative Theory of Diff. Eq., Princeton University Press, 1960.

12.Painlevé, Bull. Astron., 15, (1898), 81.

13.Poincaré H., Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Dover, 1957.

14.Poincaré H., Leçons de la Mécanique Céleste, Gauthier-Villars

15.Pollard H., Mathematical Introduction to Celestial Mechanics, Prentice-Hall, 1966.

16.Saari D., Improbability of collisions in newtonian gravitational systems, Trans. Amer. Math. Soc., 162, (1971), 267-271.

17.Siegel C. L.-Moser J. K., Lectures on Celestial Mechanics, Springer_verlag, 1971.

18.Smale S., Topology and Mechanics I, II, Inventiones Math., 10, (1970), 305-331; 11, (1970), 45-64.

19.Sperling H. J., On the real singularieties of the n-body problem, J. Reine Angew Math., 245, (1970), 15-40.

20.Sternberg S., Celestial Mechanics, Benjamin, 1969.

21.Szebehely V., Theory of Orbits, Academic Press, 1967.

22.Whittaker E. T., Analytical Dynamics of Particles and Rigid bodies, Cambridge University Press, 1970.

23.Wintner A., The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton University Press, 1941.