MISCELÁNEA MATEMÁTICA **32** (2000) 69–102

Una descripción parcial del desarrollo de la geometría diferencial en el siglo XX, y una panorámica sesgada de sus perspectivas al futuro

Adolfo Sánchez Valenzuela
Centro en Investigación en Matemáticas (CIMAT)
Apdo. Postal 402
36000 Guanajuato, Gto.
México

adolfo@cimat.mx

Advertencias. Es difícil leer y escribir sobre la historia de la matemática sin empaparse en los detalles técnicos. También es difícil escribir una panorámica del desarrollo geométrico del siglo XX sin introducir de una manera u otra la 'deformación hiperbólica' que resulta de abundar y detallar más sobre los descubrimientos más recientes y dar por bien conocidos los logros más antiguos. Al aceptar la invitación para escribir este artículo yo ya tenía una cierta idea de que no podría proporcionar un relato autocontenido y que necesariamente tendría que demandar mucha tolerancia e indulgencia por parte de los lectores. Ciertamente no podría aspirar a satisfacer la curiosidad y los gustos de un tipo de lector sobre otro. En el público de la "Miscelánea Matemática" hay de todo: estudiantes, profesores de educación media, profesores de universidad, investigadores, expertos en geometría diferencial, etc. He tratado, hasta donde he podido, de contar una historia, y he tratado también hasta donde he podido, de decirle algo a casi todos los lectores. Quizá a los verdaderamente expertos y versados en la geometría diferencial no tengo nada que decirles, pero tal sector es absolutamente minoritario entre el público general de "La Miscelánea". Aquellos lectores que no tienen suficientes conocimientos técnicos pueden omitir la lectura de las secciones 3 y 6 y quedarse con el recuento histórico solamente. Sin embargo, incluí dichas secciones esperando contribuir un poco a la síntesis que de la geometría diferencial puedan hacer los alumnos de posgrado y algunos colegas especialistas en áreas cercanas, como el álgebra, la geometría algebraica y la física matemática. Finalmente, la bibliografía no pretende ser exhaustiva, pero sí dar una idea de referencias significativas donde los interesados puedan encontrar los detalles técnicos en los trabajos originales. Atendí casi todas las críticas y sugerencias de las personas que leyeron el manuscrito original, pero debo decir a estas personas que, en el promedio de las opiniones y las críticas, lo que se ha quedado era lo que parecía contar con las mejores razones para quedarse y lo que se ha omitido se omitió también con base al subjetivo promedio de las razones que había para que tal material no fuera incluido.

1 Antecedentes de la geometría diferencial.

La palabra *geometría* proviene del griego y su significado original parece responder a la tarea de *medir terrenos*; no es difícil imaginar que, de tal actividad, se hicieran abstracciones que a la postre condujeran a la determinación de las propiedades fundamentales de los triángulos, de los rectángulos, etc. La síntesis de la experiencia acumulada de medir y estudiar terrenos quedó contenida en el libro "los elementos" de Euclides, escrito tres siglos antes de la era cristiana. En ese libro se mostró la geometría como una ciencia que deduce una gran cantidad de propiedades generales de las figuras geométricas a partir de una lista relativamente pequeña de propiedades fundamentales que se toman como punto de partida. Esa lista se conoce como *los postulados de Euclides.*

Hoy en día, cuando pensamos en la geometría, entendemos básicamente lo mismo; decimos que es la rama de la matemática que se encarga de estudiar las propiedades del *espacio* y de los *objetos en el espacio.* La noción misma de espacio se precisa a través de un conjunto de postulados o axiomas que definen el escenario abstracto donde habitarán los objetos; éstos, a su vez, están caracterizados por relaciones entre sus constituyentes básicos (*eg,* ciertos puntos o líneas en el objeto). La diferencia es que, al evolucionar, la geometría amplió su campo de estudio y fue, del escenario inmediato proporcionado por la tierra y por las figuras trazadas sobre su superficie a escenarios mucho más generales, donde nuestros sentidos han de emplearse de manera relativamente indirecta para darnos intuición.

El término *geometría diferencial* se refiere al estudio de la geometría empleando como herramienta los métodos del cálculo diferencial (*eg,* tomando límites y derivadas). Las bases de la geometría diferencial pueden situarse en la segunda mitad del siglo XVII y atribuirse a Isaac Newton como inventor-descubridor del cálculo diferencial en su búsqueda por entender y caracterizar el movimiento de los objetos en el espacio (como por ejemplo, el movimiento de los planetas). Sin embargo, no fue sino hasta principios del siglo XIX que, con los trabajos de Carl Friedrich Gauss, la geometría diferencial tomara un rumbo propio dentro de la matemática (*ie,* un rumbo independiente de la física), al enfatizar y evidenciar el carácter *intrínseco* de algunas propiedades de los objetos en el espacio. Por ejemplo, la noción de curvatura que hoy empleamos para curvas y superficies se debe a Gauss y lo intrínseco del concepto radica en el hecho de que — hablando en general, y de manera simplificada — si uno conoce la curvatura de un objeto, uno conoce el objeto.

Por otra parte, Gauss, Nikolai Lobachevsky y Janos Bolyai, de manera casi simultánea pero independiente, concibieron y desarrollaron una *forma espacial* en la que uno de los postulados de Euclides se remplazaba por otro diferente: en lugar de que por un punto fuera de una recta dada, sólo pasara una única recta paralela a ésta, ellos permitieron la posibilidad de que pasara más de una. El resultado es una geometría distinta a la proporcionada por la del espacio físico de nuestros sentidos, pero tan consistente y sólida como la de Euclides desde el punto de vista de sus resultados y teoremas. Un poco después, hacia la segunda mitad del siglo XIX, Bernhard Riemann, el talentoso estudiante de Gauss, desarrolló una geometría alternativa en la que por un punto fuera de una recta dada, no es posible trazar paralela alguna a dicha recta.

Desde el punto de vista de la matemática moderna, son los trabajos de Gauss y Riemann los que fundamentan la geometría diferencial actual. Riemann generalizó las ideas de Gauss y escribió dos trabajos célebres que contribuyeron enormemente al desarrollo futuro de la topología y la geometría: (1) su disertación doctoral, *sobre las bases para una teoría general de funciones de variable compleja* (1851), donde aparecen por primera vez las ideas que condujeron a la noción que hoy tenemos de *superficie de Riemann* y, (2) su disertación para ser admitido como *docente privado* (y poder recibir pagos directamente por concepto de cuotas estudiantiles), *sobre las hipótesis que forman los* *fundamentos de la geometría* (1854), en la que aparecen, entre otros conceptos, las ideas de lo que hoy llamamos *variedades diferenciables* e *invariancia ante difeomorfismos*, además de discutir con toda claridad algunas ideas que dieron paso a grandes aplicaciones de la geometría a la física matemática en manos de Einstein y Poincaré. Una traducción al inglés de esta segunda disertación de Riemann se puede encontrar en el segundo volumen de la monumental obra de Michael Spivak, [79].

El siglo XIX añadió al estudio de la geometría diferencial los trabajos de Felix Klein y Sophus Lie sobre lo que hoy llamamos la *teoría de grupos de Lie* (1870). Los grupos de Lie son grupos que, además de su estructura algebraica, poseen una estructura adicional; la que se necesita para que califiquen como 'espacios' en el sentido de la geometría diferencial. Los grupos de Lie testifican sobre (dan fé de) la simetría que tienen algunos espacios u objetos geométricos. La razón por la que los grupos de Lie son tan útiles en la matemática es porque, hablando vagamente, si uno conoce todas las simetrías que pueda tener un objeto (o un espacio), uno conoce el objeto (o espacio) de que se trata.

Aparentemente fue Klein quien evidenció el potencial geométrico de la teoría que Lie desarrollaba con el propósito de resolver ecuaciones diferenciales. Pensando en las geometrías que ya se entendían como ejemplos concretos por los trabajos de Euclides, Gauss, Lobachevsky, Bolyai y Riemann, Felix Klein se dió cuenta de que, el estudio de un tipo específico de geometría, se traducía en estudiar las relaciones que permanecen invariantes ante las transformaciones de algún grupo específico; concretamente, alguno de los grupos estudiados por Lie. El primero en realizar en forma explícita, exhaustiva y sistemática el programa de Klein, fue Henri Poincaré al proporcionar un modelo homogéneo (*ie,* un modelo del tipo G/H, siendo G un grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo cerrado) del plano hiperbólico. De gran relevancia son también los resultados algebraicos obtenidos por David Hilbert quien, motivado también por las ideas de Lie y Klein, sentó las bases de la *teoría* moderna *de los invariantes.*

2 La primera mitad del siglo XX.

Hilbert y Poincaré fueron las dos grandes figuras de la matemática europea al final del siglo XIX y el trabajo de ambos impactó profundamente el desarrollo de la geometría del siglo XX. El trabajo de Hilbert está presente en el fundamento de la *geometría algebraica* (también llamada *geometría analítica*) y en las aplicaciones del análisis a la física matemática. Por otro lado, el trabajo de Poincaré está presente en el fundamento de la topología, la teoría de sistemas dinámicos y las aplicaciones de la geometría diferencial a la física matemática. Conviene notar que *un algo* que tuvieron en común fue precisamente su interés por la física. Hilbert fue el maestro que inspiró a toda una generación de analistas dedicados al estudio de las ecuaciones diferenciales parciales de la física matemática y a lo que hoy reconocemos como teoría de operadores (*eg,* J. von Neumann, R. Courant, O. Friedrichs, L. Schwartz, L.S. Sobolev, etc., y hacia la segunda mitad del siglo XX a L. Nirenberg y P. Lax, entre otros). Por otro lado, las clases de Poincaré en la Universidad de París, desde 1881 hasta su muerte en 1912, versaron casi invariablemente sobre temas de física (mecánica celeste, electromagnetismo, fluidos, astronomía, etc.). Poincaré fue un precursor de la teoría de la relatividad y un gran entendedor de los modelos del espacio tiempo en los que el grupo de isotropía hubiera de ser el grupo de transformaciones de Lorentz (*ie,* modelos homogéneos G/H, en los que H fuera el grupo de Lorentz; de hecho el modelo más sencillo toma G igual al producto semidirecto de H con el espacio-tiempo y el grupo resultante se llama precisamente *el grupo de Poincaré*). Esta fue quizá la contribución más trascendente de Poincaré a la física y el espíritu de sus resultados evidencian inspiración en las ideas de S. Lie y F. Klein. El camino seguido por Poincaré hacia la teoría de la relatividad es distinto al seguido por Albert Einstein. El lector puede obtener una mejor idea de lo que está involucrado al reclamar la paternidad de la teoría de la relatividad en la reseña [81].

Las ideas de Klein y Lie también fueron recogidas en la última década del siglo XIX por Éli Cartan y es propiamente con él con quien da comienzo la geometría diferencial del siglo XX. De hecho, el gran desarrollo alcanzado por esta disciplina se debe enormemente al fecundo trabajo realizado por Cartan, quien siguió obteniendo resultados hasta entrada la cuarta década del siglo.

El trabajo de É. Cartan abundó en la teoría de Lie. Cartan desarrolló hasta sus últimas consecuencias todo lo que podía estar relacionado con el grupo de movimientos rígidos del espacio tridimensional (*ie,* el grupo generado por las rotaciones y las translaciones), así como su generalización a dimensiones mayores. Entre otras cosas, descubrió la *representación espinorial* del grupo de rotaciones (1913) y lo que hoy conocemos como las *ecuaciones de estructura* de un grupo de Lie. A él se debe básicamente la clasificación de las álgebras de Lie simples, en términos de las cuales pueden describirse todas las álgebras de Lie. Él fue quien descubrió de qué manera ocurren y se acoplan dentro de las álgebras de Lie simples diversas copias de una álgebra básica: $\mathfrak{sl}_2$. Por otra parte, y a la luz de los trabajos de Tullio Levi-Civita (1917) — alumno de Gregorio Ricci en la Universidad de Padua — sobre el *transporte paralelo* de vectores tangentes en espacios curvos del tipo estudiado por Riemann, Cartan desarrolló también un aparato algebraico y analítico que sirvió de ejemplo primero, y enlace después, a la *teoría general de conexiones en espacios fibrados principales y vectoriales* desarrollada por C. Ehresmann (1940). Este fue su método del *repère mobile.*

3 Una descripción técnica: las fibraciones diferenciables.

Las nociones de fibrados principales y vectoriales son un importante producto del siglo XX. Resultaron de la evolución de las ideas manejadas por Gauss sobre el carácter intrínseco de la geometría de curvas y superficies. Hoy entendemos que una variedad diferenciable M viene acompañada de un fibrado vectorial $\pi : TM \to M$, siendo TM el agregado de todos los vectores tangentes en la variedad, en tanto que $TM = \cup_{x\in M} T_xM$ y T_xM es el espacio vectorial de todos los vectores tangentes en el punto $x \in M$. Un hecho muy importante es que el espacio TM es, a su vez, otra variedad diferenciable. La poderosa herramienta del álgebra lineal — a través de los teoremas centrales del cálculo diferencial (el Teorema de la función inversa y el Teorema de la función implícita) — queda incorporada a la geometría diferencial al notar que las funciones diferenciables $F : M \to N$ pueden caracterizarse por el hecho de que, en cada punto $x \in M$, la derivada define una aplicación lineal $\mathrm{d}F_x : T_xM \to T_{F(x)}N$. Podemos hablar entonces del conjunto $C^\infty(M, N)$ de *aplicaciones diferenciables* entre las variedades diferenciables M y N. Por ejemplo, la aplicación $\pi : TM \to M$ que asocia, a cada elemento de $\cup_{x\in M} T_xM$ — que, por definición, pertenece a T_xM para algún $x \in M$ — el punto x, es diferenciable. Por lo tanto $\pi \in C^\infty(TM, M)$. La imagen inversa de un punto $x \in M$ bajo π es por definición *la fibra* sobre el punto x y por construcción, $\pi^{-1}(x)$ es el espacio vectorial T_xM; de ahí el nombre de *fibrado vectorial* para TM.

La primera y más gruesa simplificación que se puede hacer en el estudio de las variedades diferenciables, es no distinguir entre M y N si existe una aplicación diferenciable $F : M \to N$, invertible y con inversa $F^{-1} : N \to M$ diferenciable. Decimos entonces que M y N son *variedades difeomorfas* y escribimos $M \simeq N$. En particular, al estudiar cualquier variedad diferenciable M, uno concentra su atención en el grupo $\mathrm{Diff}(M) \subset C^{\infty}(M,M)$ de todas las aplicaciones diferenciables, invertibles, con inversa diferenciable. Por razones obvias, $\mathrm{Diff}(M)$ se llama *el grupo de difeomorfismos de M.*

Por otro lado, el "método de construcción" de la variedad TM empleando objetos del álgebra lineal, rápidamente da lugar a construcciones más generales: no es difícil pasar del agregado de espacios vectoriales $TM = \cup_{x\in M} T_xM$, al agregado $\mathrm{End}\, TM = \cup_{x\in M} \mathrm{End}\, T_xM$ — en el que $\mathrm{End}\, T_xM$ denota el espacio vectorial de las aplicaciones lineales del espacio vectorial T_xM en sí mismo. De aquí se obtiene otro fibrado vectorial, $\pi : \mathrm{End}\, TM \to M$, siendo π la aplicación que asocia, a cada elemento de $\cup_{x\in M} \mathrm{End}\, T_xM$ — que, por definición, pertenece a $\mathrm{End}\, T_xM$ para algún $x \in M$ — el punto x.

De manera similar se construyen $T^*M = \cup_{x\in M} \mathrm{Hom}(T_xM, \mathbb{R})$ — el fibrado vectorial cotangente asociado a la variedad M, y después los diversos fibrados tensoriales $\mathcal{T}^p_q(M) := \cup_{x\in M} T_xM \otimes \cdots p\text{-veces} \cdots \otimes T_xM \otimes T^*_xM \otimes \cdots q\text{-veces} \cdots \otimes T^*_xM$. Todas estas construcciones tienen estructura de variedad diferenciable y todas vienen equipadas con la correspondiente aplicación diferenciable $\pi \in C^{\infty}(\mathcal{T}^p_q(M), M)$, en la que la fibra $\pi^{-1}(x)$ es, por construcción, el espacio vectorial $T_xM \otimes \cdots p\text{-veces} \cdots \otimes T_xM \otimes T^*_xM \otimes \cdots q\text{-veces} \cdots \otimes T^*_xM$. Usando isomorfismos conocidos del álgebra lineal — por ejemplo, $\mathrm{End}\, T_xM \simeq T_xM \otimes T^*_xM$ — se obtienen algunos difeomorfismos entre los fibrados correspondientes — por ejemplo, $\mathrm{End}\, TM \simeq \mathcal{T}^1_1(M)$.

Similarmente, se puede pasar de $\mathrm{End}\, TM$ al agregado $\mathcal{F}(TM) = \cup_{x\in M} \mathrm{GL}\, T_xM$ de *grupos*; en cada punto $x \in M$ se consideran todas las aplicaciones lineales invertibles del espacio vectorial T_xM en sí mismo. Como bien se sabe del álgebra lineal, cada una de éstas transformaciones se puede identificar con una base del espacio vectorial T_xM. De esta manera, $\mathcal{F}(TM)$ también puede interpretarse como el agregado de todas las bases para los posibles espacios de vectores tangentes a la variedad. Este es un ejemplo de *fibrado principal.* La característica central es que la fibra $\pi^{-1}(x)$, de la aplicación $\pi : \mathcal{F}(TM) \to M$ es un grupo de Lie — $\mathrm{GL}\, T_xM$ en este ejemplo.

En síntesis, decir que una variedad diferenciable $\mathcal{B}_F(M)$ es una fibración sobre la variedad diferenciable M significa que existe una aplicación diferenciable $\pi : \mathcal{B}_F(M) \to M$ con la propiedad de que, para cada punto $x \in M$ es posible encontrar una vecindad $U \ni x$, y un difeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times V$, que satisface $p_1 \circ \varphi_U = \pi$. Aquí F es una variedad diferenciable fija con la que se pueden identificar cada una de las fibras $\pi^{-1}(x)$ y $p_1 : U \times V \to U$ es la proyección $(x, v) \mapsto x$ al primer factor. La fibración es vectorial, si F es un espacio vectorial; principal, si F es un grupo de Lie; de álgebras, si F tiene estructura de álgebra, etc.

Una concepción muy importante realizada en el siglo XX es el haber entendido a los *objetos geométricos* — *ie,* los objetos de estudio de la geometría diferencial — como aplicaciones diferenciables $\sigma : M \to \mathcal{B}_F(M)$, en donde, siendo $\pi : \mathcal{B}_F(M) \to M$ alguna fibración, se tiene que $\pi \circ \sigma = id_M$. Se dice entonces que σ es *una sección de* $\mathcal{B}_F(M)$. Localmente, en un abierto U sobre el que $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, una sección σ puede identificarse con una aplicación diferenciable $U \to F$, puesto que, $x \mapsto \sigma(x) \in \pi^{-1}(x) \simeq F$. Por ejemplo, un campo vectorial es una aplicación $x \mapsto X_x \in T_xM$ que, a cada punto de la variedad le asocia un vector tangente en ese punto; decimos que se trata de una sección $X\colon M \to TM$ del fibrado tangente. Un campo vectorial es, precisamente, un ejemplo de objeto geométrico. Asímismo lo son, una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$, una 1-forma diferencial $\theta : M \to T^*M$, una métrica Riemanniana $g : M \to T^*M \otimes T^*M$, una conexión lineal $\nabla : M \to T^*M \otimes \operatorname{End} TM$, etc.

Un beneficio adicional que resultó de concebir los objetos geométricos como secciones de fibrados fue establecer correspondencias con descripciones mucho más algebraicas que analíticas. Ilustraremos esto con los ejemplos más significativos: las funciones diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$ y los campos vectoriales $X : M \to TM$.

El conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ — que suele denotarse simplemente por $C^\infty(M)$ — es un anillo conmutativo bajo la definición de suma y producto de funciones realizados punto a punto; $f + h$ es $x \mapsto f(x) + h(x)$ y fh es $x \mapsto f(x)h(x)$. Este anillo es muy importante porque la estructura de variedad diferenciable está codificada dentro de él. Esto significa que se puede definir una variedad diferenciable especificando el espacio topológico M y su anillo de funciones diferenciables $C^\infty(M)$.

Por otra parte, un campo vectorial $X \in C^\infty(M, TM)$ se puede identificar con una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisface la regla de Leibnitz $X(fh) = fX(h) + hX(f)$. El conjunto de aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales con esta propiedad se denota por $\operatorname{Der} C^\infty(M)$ y sus elementos se llaman *derivaciones.* La fundamentación de esta correspondencia resulta de la observación de que, localmente, en un subconjunto abierto $U \subset M$ donde pueden definirse coordenadas $\{x^1, \dots, x^m\}$, una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisface la regla de Leibnitz puede escribirse en la forma $X = X^1\partial/\partial x^1 +$

$\cdots + X^m \partial/\partial x^m$, para un conjunto de m funciones $(X^1, \ldots, X^m)$ *únicas*, con $X^i \in C^\infty(U)$; esto significa que X está completamente determinado por $(X^1, \ldots, X^m)$ que, a su vez, es lo mismo que una aplicación $U \to \mathbb{R}^m$, pero esto es precisamente un campo vectorial definido en el subconjunto abierto U.

Esta construcción pone de manifiesto una estructura algebraica adicional que es la multiplicación de las funciones $X^i \in C^\infty(U)$ por las derivaciones $\partial/\partial x^i$. Esto puede hacerse en general y se puede ver que para cada $f \in C^\infty(M)$ y cada $X \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$, la aplicación $fX : h \mapsto fX(h)$ es una derivación, gracias a que el anillo $C^\infty(M)$ es conmutativo. La multiplicación de funciones por derivaciones satisface formalmente las mismas propiedades que la multiplicación de escalares por vectores y decimos entonces que $\operatorname{Der} C^\infty(M)$ es un $C^\infty(M)$-módulo. En general, todo fibrado vectorial da lugar a un $C^\infty(M)$-módulo; el $C^\infty(M)$-módulo de sus secciones. Y viceversa: bajo ciertas condiciones algebraicas, algunos $C^\infty(M)$-módulos definen un fibrado vectorial, unívocamente determinado hasta un difeomorfismo.

Una vez realizada la correspondencia de campos vectoriales con las derivaciones del anillo $C^\infty(M)$, se obtiene una correspondencia similar entre las 1-formas diferenciales $\theta \in C^\infty(M, T^*M)$ y las aplicaciones $C^\infty(M)$-lineales $\theta : \operatorname{Der} C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Similarmente, una métrica Riemanniana $g \in C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M)$ se identifica con una aplicación $C^\infty(M)$-bilineal $g : \operatorname{Der} C^\infty(M) \times \operatorname{Der} C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ tal que, para cada campo vectorial $Y \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$, la aplicación $X \mapsto g(X,Y)$, que define una 1-forma diferencial, establece un isomorfismo $Y \mapsto g(\,\cdot\,, Y)$ entre el conjunto de campos vectoriales y el conjunto de 1-formas diferenciales. Igualmente, una conexión lineal $\nabla \in C^\infty(M, T^*M \otimes \operatorname{End} TM)$ se puede identificar con una aplicación $\nabla : \operatorname{Der} C^\infty(M) \times \operatorname{Der} C^\infty(M) \to \operatorname{Der} C^\infty(M)$, denotada por $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, que es $C^\infty(M)$-lineal en el primer argumento mientras que en el segundo argumento es aditiva y satisface $(X, fY) \mapsto f\nabla_X Y + X(f)Y$.

4 La segunda mitad del siglo XX.

Éli Cartan impulsó también de manera decisiva el estudio de la topología de una variedad diferenciable a través de métodos algebraicos y analíticos estudiando de manera concreta qué sistemas de ecuaciones diferenciales parciales podían resolverse en una variedad. La herramienta empleada fue el álgebra de las formas diferenciales y el trabajo seminal realizado por Cartan en esta dirección quedó sintetizado a mediados del siglo XX en el libro de G. de Rham [77].

Uno de los matemáticos del siglo XX que más aplicó los métodos algebraicos y analíticos de Cartan al estudio de la topología de las variedades Riemannianas fue Shiing-shen Chern. A Chern se debe en las décadas de los años cuarenta y cincuenta, el desarrollo de la teoría de clases características con métodos y aplicaciones de carácter geométrico — *a la* Cartan — en contrapartida con el desarrollo de las clases características realizado por Norman Steenrod con métodos principalmente topológicos. El estudio de las clases características se inició como tal alrededor de 1935 por Hassler Whitney en Harvard y por Eduard Stiefel, este último era entonces un estudiante de Heinz Hopf en el Instituto de Matemática Aplicada de la Escuela Técnica Superior en Zürich, Suiza. Otros dos autores que contribuyeron significativamente al estudio de la topología con métodos diferenciales al estilo de Cartan y Chern fueron L.S. Pontryagin y John Milnor; es en el trabajo de éstos últimos que puede situarse la consolidación de la llamada *topología diferencial*. En particular, Milnor fue el primero en descubrir en 1964 *estructuras diferenciables exóticas* en las esferas. Años después, en 1982, como consecuencia de los trabajos de Simon Donaldson, se descubrirían estructuras diferenciables exóticas en $\mathbb{R}^4$ (*eg,* [28] y [83]).

Una buena síntesis del conocimiento generado y de los métodos desarrollados por el estudio de las clases características y la topología diferencial se consiguió en el libro [10]. Dicho tema concentró durante algún tiempo la atención de los geómetras en el *anillo de cohomología* asociado a una variedad. En este terreno, y particularmente, en la interacción del álgebra con el análisis y con las acciones de los grupos de Lie, Henri Cartan — hijo de Éli Cartan — realizó contribuciones fundamentales donde pueden ubicarse los orígenes matemáticos de la llamada supersimetría. Una elocuente descripción del trabajo de H. Cartan en el lenguage moderno de la supersimetría ha sido conseguida en [51], donde además, se incluye una reproducción de los dos trabajos centrales de H. Cartan en esta área ([23] y [24]).

H. Cartan incursionó también en el estudio de la mecánica hamiltoniana desde un punto de vista geométrico; a él se debe la caracterización de la 2-forma simpléctica canónica que habita en el fibrado cotangente de una variedad, así como su empleo para producir cantidades conservadas asociadas a un sistema hamiltoniano. En esta dirección H. Cartan fue el gran inspirador del desarrollo de la geometría simpléctica en los años 60 y 70 con los trabajos de A. A. Kirillov, B. Kostant, J. Marsden, A. Weinstein, V. Guillemin y S. Sternberg, principalmente.

Finalmente, H. Cartan también contribuyó al desarrollo del álgebra homológica, de la teoría de gavillas, de la teoría del potencial, de la topología algebraica, pero sobre todo, de la teoría de las funciones de una y varias variables complejas.

El análisis de las funciones de variable compleja cobró gran importancia en la geometría desde el trabajo fundamental de Riemann. La mejor síntesis conseguida hacia el inicio del siglo XX, donde se unificaban las ideas de Riemann con las de Klein y Poincaré, se debe a Hermann Weyl quien consiguió describir nítidamente la idea de *superficie de Riemann* (1913); varios años después se publicó una traducción al inglés de su famoso libro [99]. Alrededor de la segunda y tercera décadas del siglo XX, la geometría y el análisis con funciones de variable compleja se impulsaron notablemente ponderando, como se reconocía desde el siglo XIX, sus aplicaciones a la solución de ecuaciones diferenciales. Dos trabajos que impactaron decisivamente el desarrollo posterior de la teoría de variedades complejas son los debidos a S. Bergman y a Erich Ernst Kähler, donde básicamente se descubrió la relevancia de las métricas hermitianas y lo que ahora llamamos las métricas Kählerianas (1933). Alrededor de las mismas fechas, William Vallance Douglas Hodge encontró una importantísima propiedad de las formas diferenciales armónicas definidas en variedades complejas compactas con métrica Kähleriana; a saber, que era posible estudiar el anillo de cohomología de una tal variedad con métodos de la teoría del potencial (*ie,* resolviendo ecuaciones diferenciales parciales *elípticas*) y del álgebra lineal. La teoría de Hodge encontró nuevo impulso y continuación en los trabajos de K. Kodaira, L. Nirenberg y D. C. Spencer por un lado y en los trabajos de M. Atiyah e I. Singer, por otro; los trabajos de los primeros condujeron al entendimiento de la integrabilidad de una estructura compleja definida en una variedad diferenciable real, mientras que el trabajo de los segundos condujo al célebre teorema del índice para operadores diferenciales elípticos.

El estudio de las variedades complejas y en particular, el estudio de las variedades Kählerianas, atrajo también atención al estudio de las variedades simplécticas. Una excelente síntesis que aclara de qué manera están relacionados los problemas de la geometría compleja, de la geometría Kähleriana y de la geometría simpléctica, se consiguió al plantear el problema de la integrabilidad y la equivalencia de las *G-estructuras;* nociones introducidas por S. Chern. El estudio de las G-estructuras (*ie,* de los subfibrados del fibrado principal $\mathcal{F}(M)$ de todas las bases para los campos vectoriales de una variedad diferenciable M) evidenció importantes relaciones entre la geometría y la topología.

En esta dirección se enmarcan los resultados de S. Bochner sobre la curvatura de variedades complejas y los trabajos de Ambrose y Singer sobre los grupos de holonomía. En esta misma dirección ocurren los trabajos de A. Nijenhuis, K. Nomizu y S. Kobayashi sobre integrabilidad y holonomía.

5 Física, simetría y ecuaciones diferenciales

'Conocer un objeto' o 'entender un espacio' son afirmaciones que, en matemáticas, tienen una conotación distinta a la que normalmente tienen en el discurso de otras ciencias. La razón es que la matemática no es 'a priori' una ciencia experimental; las 'leyes de la naturaleza' no tienen nada que ver con el comportamiento de los objetos matemáticos ni con las formas de los espacios que estudian los matemáticos. Como ya lo hemos mencionado, los grupos de Lie dan cuenta de la simetría que tienen algunos espacios u objetos geométricos y si uno conoce todas las simetrías que pueda tener un objeto (o un espacio), uno conoce el objeto (o espacio) de que se trata.

Esta última afirmación ha encontrado muchas aplicaciones en las teorías de los físicos. Típicamente, las teorías matemáticas que modelan el comportamiento de algún fenómeno de la naturaleza, están realizadas en términos de 'ecuaciones diferenciales'. La teoría de los grupos de Lie permite, entre otras muchas cosas, resolver ecuaciones diferenciales con métodos algebraicos relativamente sencillos. La filosofía que hay detrás de aplicar los grupos de Lie a la solución de las ecuaciones diferenciales es la siguiente: uno concibe un espacio donde cada punto representa una de las posibles soluciones de la ecuación. Por otra parte, la ecuación refleja, y permite en principio conocer, cuáles son todas las simetrías de dicho espacio y al conocer éstas, uno conoce también las soluciones.

Las ecuaciones diferenciales, desde el punto de vista de los matemáticos son expresiones que indican una relación muy concreta entre los objetos geométricos del espacio donde la ecuación se plantea. En las ciencias aplicadas, lo importante es resolver tales ecuaciones y poder leer el resultado en términos de 'las interpretaciones' que previamente se le han asignado a los objetos que intervienen en la ecuación diferencial. Cabe señalar que, en la matemática, los objetos que intervienen en las ecuaciones no necesitan de una tal interpretación en términos de objetos o propiedades que se observen en la naturaleza. Nuevamente, 'entender una ecuación diferencial' significa cosas distintas para una ciencia aplicada que para la matemática pura. Entender una ecuación diferencial desde el punto de vista de la matemática significa entender las relaciones geométricas y algebraicas que guardan los objetos que intervinieron en la ecuación diferencial con el espacio en el que están planteadas.

En muchas ocasiones no hace falta resolver las ecuaciones diferenciales para entender su contenido geométrico, ni para conocer las propiedades generales que tendrán sus soluciones. Nuevamente, las simetrías observadas en la ecuación diferencial permiten predecir algunas de tales propiedades sin tener que trabajar demasiado. Debe decirse que resolver ecuaciones diferenciales es algo muy difícil de hacer en general y cualquier recurso que nos permita decir algo de las soluciones sin tener que trabajar demasiado se agradece enormemente en la práctica.

Una idea que se ha manejado en la física es la posibilidad de contar con una teoría que explique a partir de un principio común todas las interacciones que se observan en la naturaleza. Esto significa que tal teoría pueda hacer ver dos tipos de interacciones, que a priori concebimos como fenómenos totalmente distintos (por ejemplo, la gravitación y el electromagnetismo), simplemente como dos manifestaciones distintas de una sola interacción más primitiva. Ejemplos de la unificación de dos interacciones distintas existen en la física desde el inicio de la segunda década del siglo XX. De hecho, los trabajos A. Einstein sobre la teoría de la relatividad — una teoría donde la gravitación se relaciona con la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de materia — motivaron a H. Weyl a proponer un modelo unificado de interacciones gravitacionales y electromagnéticas en su libro [97]. Con este trabajo Weyl se convirtió en el padre de las modernas teorías de norma (tambén llamadas *teorías de gauge* o *teorías de Yang-Mills* y de las cuales aún tenemos más que decir en la sección §7). Aunque la teoría de gauge propuesta por Weyl no fructificó en su momento en virtud de los contrargumentos físicos que en la época demostraron que ciertos fenómenos no se podrían observar, lo que sí demostró fue que la idea central detrás de la unificación es la de simetría.

Los trabajos de Weyl realizados en las décadas de los años 20 y 30 sobre la teoría de representaciones de los grupos de Lie compactos estuvieron fuertemente motivados por las posibles aplicaciones a la física cuántica. El ejemplo de su gran influencia se hace patente en el célebre trabajo de E. P. Wigner (1939), sobre las representaciones unitarias del grupo de Lorentz en el que básicamente propuso una filosofía para contribuir al entendimiento de las partículas elementales descubiertas hasta esa fecha. A saber, entender a las partículas elementales como representaciones unitarias irreducibles de algún grupo sobre el que se tienen razones físicas para pensar que todas las interacciones en la naturaleza deben 'covariar' apropiadamente ante su acción. La toería de Weyl fue también la fuente de las teorías de Yang-Mills que desembocaron, por un lado, en las exitosas teorías unificadas de interacciones débiles y electromagnéticas propuestas por S. Weinberg, A. Salam y S. Glashow en la década de los años 60 y principios de los 70, y por otra parte, en un profundo entendimiento de la geometría y topología diferencial asociada a la solución de las ecuaciones de Yang-Mills de donde emergieron los resultados obtenidos por S. Donaldson en 1983 sobre la estructura topológica de las variedades diferenciables de dimensión cuatro.

Para dar una idea concreta de lo que significa tener una simetría en una teoría de interacciones, recordemos que dentro de un núcleo atómico hay partículas cargadas eléctricamente cuya carga es positiva (los protones), que conviven con otras partículas que, si bien tienen un masa muy parecida a la de las primeras, éstas otras no poseen carga eléctrica alguna (los neutrones). Si "distinguir" entre estos dos tipos de partículas fuera importante dentro del núcleo atómico, entonces la carga eléctrica sería importante para las interacciones que mantienen a los protones y neutrones tan cerca. Sin embargo, si la carga importara tanto, los protones del núcleo estarían repeliéndose entre ellos con una fuerza muy grande; luego, ya se habrían separado y se habría desintegrado el núcleo atómico dentro del cual se encontraban. Sin embargo, en general, la mayoría de los núcleos atómicos son muy estables, no se desintegran y de hecho los protones y los neutrones conviven dentro del núcleo. Esto significa que hay una fuerza muy fuerte que los debe mantener a todos unidos muy cerca unos de otros (la *fuerza fuerte*). Esto significa, a su vez, que para efectos de entender la fuerza fuerte, la carga eléctrica de los protones no es tan importante y que en primera aproximación, uno puede teóricamente intercambiar un protón por un neutrón sin notarlo en las ecuaciones que describen su interacción. Esto es precisamente lo que significa que las interacciones fuertes deben observar una simetría respecto al intercambio neutrón-protón.

En la década de los años setenta, y en virtud del antecedente mencionado en el párrafo anterior, el concepto que se introdujo en la física para obtener una teoría unificada de *todas* las interacciones conocidas fue el de *supersimetría.* Si uno consulta en la literatura de la física uno encontrará una explicación así: "La supersimetría es un tipo de simetría que unifica a las fuerzas con la materia, en el sentido de que proporciona una manera de relacionar las simetrías del espacio-tiempo con las simetrías internas de las partículas elementales, permitiendo la posibilidad de no distinguir entre sí, partículas que obedecen estadísticas distintas".

Cuando uno reformula de manera lógica y rigurosa desde el punto de vista de la geometría lo que hay detrás de las ideas físicas expresadas por una afirmación como la anterior, lo que resulta es un tipo muy específico de objetos geométricos, con relaciones algebraicas también muy específicas entre ellos, que uno puede estudiar y entender desde la base proporcionada por la geometría diferencial y los grupos de Lie. Por ejemplo, la idea de las simetrías del espacio-tiempo tiene que ver con el grupo de transformaciones que estudió Einstein y que se encuentra en los fundamentos mismos de su teoría de la relatividad; dicho grupo es localmente isomorfo al grupo de Lie de las matrices invertibles de 2×2 con entradas complejas y determinante igual a 1. Por otra parte, como ya se ha mencionado antes, la idea de partícula elemental propuesta por Wigner responde a una manera muy concreta en la que el grupo de simetrías del espacio-tiempo se hace presente en los objetos geométricos que representan a las partículas. Y finalmente, la parte desafiante y de mayor reto con la que nos confronta la idea de la supersimetría es dar la posibilidad de transformar un tipo de objeto geométrico en otro de naturaleza radicalmente distinta; a saber, transformar uno que 'prefiere' seguir la Estadística de Bose-Einstein en su comportamiento colectivo, en otro que obedece la Estadística de Fermi-Dirac. Esto último, desde el punto de vista geométrico, introduce relaciones algebraicas sumamente rígidas en los objetos a estudiar con un enfoque puramente matemático. La rama de la geometría diferencial que resulta de estudiar, bajo un sistema axiomático como el de Euclides, los objetos geométricos a los que se les puede aplicar la idea de la supersimetría, se llama supergeometría y los espacios donde 'viven' tales objetos se llaman 'superespacios' o 'supervariedades'.

Las relaciones algebraicas introducidas por la supersimetría han dado lugar a objetos geométricos elaborados a partir de anillos no conmutativos. Ante tal descubrimiento, el siglo XX generó, bajo la fuerte influencia de las teorías físicas que manejaban la idea de la supersimetría, muchas *geometrías diferenciales no conmutativas*; estas son generalizaciones de la supergeometría y se trata de geometrías en las que los anillos de "funciones diferenciables" no son conmutativos. El principal expositor de estas ideas ha sido el matemático francés A. Connes y de su trabajo se han derivado una gran cantidad de nuevas líneas de estudio en álgebra y análisis encaminadas a ser aplicadas en objetos como los grupos cuánticos, que han cobrado gran interés para la física durante los últimos quince años del siglo XX.

6 Otra descripción técnica: la acción del grupo de difeomorfismos de una variedad en los diversos objetos geométricos.

La geometría diferencial tiene mucho que ver con el estudio de los diversos subgrupos G del grupo de difeomorfismos $\mathrm{Diff}(M)$ que quedan seleccionados al fijar uno o varios objetos geométricos en una variedad M y demandar que dichos objetos se preserven bajo la acción de los elementos de $\mathrm{Diff}(M)$. Esta idea se explica mejor escribiendo de manera explícita la acción del grupo $\mathrm{Diff}(M)$ en algunos objetos geométricos típicamente definidos sobre una variedad M.

Por ejemplo, dada una variedad diferenciable M, el grupo de difeomorfismos $\mathrm{Diff}(M)$ actúa por la derecha del anillo de funciones $\mathbb{C}$ para producir automorfismos de dicho anillo mediante

$$(f, \varphi) \quad \mapsto \quad \varphi^* f\,,$$

siendo $\varphi^* f = f \circ \varphi$. De hecho, $\mathrm{Diff}(M)$ actúa por la derecha de cualquier objeto geométrico definido en M. La "regla" para obtener la forma explícita de la acción en un objeto geométrico particular es la siguiente: *hágase que, las operaciones naturales de situar a los argumentos de las funciones en sus lugares correspondientes, sea una asignación equivariante.*

Consideremos otro ejemplo. Sea X un campo vectorial en M. Como ya hemos mencionado, X es una derivación del álgebra $\mathbb{C}$. La operación natural de situar los argumentos de las funciones en sus lugares correspondientes es, en este caso, la siguiente:

$$\mathrm{Der}\,\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \text{y está dada por,} \quad (X, f) \mapsto X(f).$$

Hacer que esta operación sea equivariante para la acción por la derecha del grupo $\mathrm{Diff}(M)$ significa que $(X, f)^\varphi := (X^\varphi, f^\varphi)$ — donde hemos escrito $f^\varphi = \varphi^* f$ para la acción por la derecha de $\mathrm{Diff}(M)$ en $\mathbb{C}$, etc. — debe ser transformado por la operación natural, en $X(f)^\varphi$. Por lo tanto, de $X^\varphi(f^\varphi) = X(f)^\varphi$ obtenemos

$$X^\varphi(\varphi^* f) = \varphi^*(X(f)),$$

que debe valer para cualquier $f \in \mathbb{C}$, y cualquier $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. En particular, poniendo $f = \varphi^{-1*}h$ en ambos miembros, obtenemos,

$$X^{\varphi}(h) = \varphi^{*}\big(X\,(\varphi^{-1*}h)\big),$$

para cualquier $h \in \mathbb{C}$, y cualquier $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. Esto es, $X^{\varphi} = \varphi^{*} \circ X \circ \varphi^{-1*}$, que es la bien conocida acción por la derecha de $\mathrm{Diff}(M)$ en $\mathrm{Der}\,\mathbb{C}$:

$$(X, \varphi) \quad \mapsto \quad \varphi^{*} \circ X \circ \varphi^{-1*}.$$

Obsérvese que esta acción es por automorfismos del álgebra de Lie $\mathrm{Der}\,\mathbb{C}$, respecto a su estructura natural de álgebra de Lie dada por $[X\,,Y] = X \circ Y - Y \circ X$. En otras palabras,

$$[X\,,Y]^{\varphi} = [X^{\varphi}, Y^{\varphi}]$$

Una vez que se tienen las acciones $f \mapsto f^{\varphi}$ y $X \mapsto X^{\varphi}$ a la mano, podemos proceder a encontrar la acción de $\mathrm{Diff}(M)$ por la derecha del espacio de 1-formas diferenciales $\Omega^1(M)$, de acuerdo a la regla general. Para ello observamos primero que la aplicación natural de *situar argumentos* en su lugar es, en este caso,

$$\Omega^1(M) \times \mathrm{Der}\,\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \text{dada por,} \quad (\theta, X) \mapsto \theta(X).$$

La acción de $\mathrm{Diff}(M)$ en $\Omega^1(M) \times \mathrm{Der}\,\mathbb{C}$ es $(\theta, X)^{\varphi} := (\theta^{\varphi}, X^{\varphi})$, y la afirmación de la equivariancia al evaluar 1-formas en campos vectoriales es $\theta^{\varphi}(X^{\varphi}) = \theta(X)^{\varphi}$. Obtenemos, por lo tanto,

$$\theta^{\varphi}(X^{\varphi}) = \varphi^{*}\big(\theta(X)\big)$$

para cualquier $X \in \mathrm{Der}\,\mathbb{C}$ y cualquier $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. En particular, al poner $X = Y^{\varphi^{-1}}$ en ambos miembros obtenemos, $\theta^{\varphi}(Y) = \varphi^{*}\big(\theta(Y^{\varphi^{-1}})\big)$. Esto es,

$$\theta^{\varphi}(Y) = \varphi^{*}\big(\theta\,(\varphi^{-1*} \circ Y \circ \varphi^{*})\big)$$

para cualquier $Y \in \mathrm{Der}\,\mathbb{C}$, y cualquier $\varphi \in \mathrm{Diff}$. En particular, sea θ una 1-forma exacta; digamos, $\theta = \mathrm{d}\,h$ para alguna $h \in \mathbb{C}$. Entonces, $\theta(X) = \mathrm{d}\,h(X) = Xh$ para cualquier $X \in \mathrm{Der}\,\mathbb{C}$, y la ecuación anterior dice que

$$(\mathrm{d}\,h)^{\varphi}(Y) = \varphi^{*}\big((\varphi^{-1*} \circ Y \circ \varphi^{*})\,(h)\big) = Y\,(\varphi^{*}h) = \mathrm{d}(\varphi^{*}h)(Y)$$

para cualquier $Y \in \mathrm{Der}\,\mathbb{C}$. En otras palabras, $(\mathrm{d}\,h)^{\varphi} = \mathrm{d}(\varphi^{*}h)$ lo cual no es, sino la bien conocida afirmación de que d conmuta con el *pullback*, puesto que la notación estándar para θ^{φ} es precisamente $\varphi^{*}\theta$.

Ahora bien, la acción por la derecha de $\mathrm{Diff}(M)$ en $\mathbb{C}$ y $\Omega^1(M)$ se puede extender a toda el álgebra exterior $\Omega(M)$ requiriendo que la acción resultante sea por automorfismos de dicha álgebra. En particular, para cualquier conjunto de 1-formas $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ y para cualquier $f \in \mathbb{C}$, tendremos,

$$(f\,\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \cdots \wedge \theta_k)^{\varphi} = f^{\varphi}\,\theta_1^{\varphi} \wedge \theta_2^{\varphi} \wedge \cdots \wedge \theta_k^{\varphi}$$

De cualquier manera, las 1-formas θ_i están generadas localmente por términos del tipo $f\,\mathrm{d}\,h$, con $f, h \in \mathbb{C}$. Así, localmente, resulta suficiente con saber lo que ha de ser $(f\ \mathrm{d}h)^{\varphi}$, pero ésta última es $\varphi^* f\ \mathrm{d}(\varphi^* h)$. Por lo tanto, también sabemos todo lo que hay que saber acerca de la acción de $\mathrm{Diff}(M)$ por la derecha de $\Omega(M)$.

Consideremos ahora el espacio $\mathrm{Met}(M)$ de las métricas Riemannianas en M. La acción (por la derecha) de $\mathrm{Diff}(M)$ en $\mathrm{Met}(M)$ se puede obtener de acuerdo a la regla general descrita anteriormente: primero consideramos la operación natural de situar a los argumentos en su lugar; a saber,

$$\mathrm{Met}(M) \times \mathrm{Der}\,\mathbb{C} \times \mathrm{Der}\,\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \text{dada por,} \quad (g, X, Y) \mapsto g(X, Y).$$

Luego, requerimos que esta aplicación sea equivariante para la acción de $\mathrm{Diff}(M)$ en las ternas: $(g, X, Y)^{\varphi} := (g^{\varphi}, X^{\varphi}, Y^{\varphi})$. Por lo tanto, $g^{\varphi}(X^{\varphi}, Y^{\varphi}) = g(X, y)^{\varphi}$, de donde concluímos que,

$$g^{\varphi}(X^{\varphi}, Y^{\varphi}) = \varphi^*\big(g\,(X, Y)\big)$$

para cualesquiera X y Y en $\mathrm{Der}\,\mathbb{C}$, cualquier $g \in \mathrm{Met}(M)$, y cualquier $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. En particular, poniendo $X = Z^{\varphi^{-1}}$, y $Y = W^{\varphi^{-1}}$ en ambos miembros, obtenemos,

$$g^{\varphi}(Z, W) = \varphi^*\big(g\,(Z^{\varphi^{-1}}, W^{\varphi^{-1}})\big)$$

para cualesquiera Z y W en $\mathrm{Der}\,\mathbb{C}$, y cualquier $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$.

Daremos por último la acción derecha de $\mathrm{Diff}(M)$ en el espacio $\mathrm{Con}(M)$ de las conexiones lineales en el fibrado tangente. Nuevamente, la operación natural de situar los argumentos en su lugar es,

$$\mathrm{Con}(M) \times \mathrm{Der}\,\mathbb{C} \times \mathrm{Der}\,\mathbb{C} \to \mathrm{Der}\,\mathbb{C}, \qquad (\nabla, X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

y la afirmación de equivariancia para la acción natural de $\mathrm{Diff}(M)$ en el conjunto de ternas (∇, X, Y) es la siguiente: $(\nabla^{\varphi}, X^{\varphi}, Y^{\varphi})$ debe transformarse en $(\nabla_X Y)^{\varphi}$. Esto es,

$$\nabla^{\varphi}{}_{X^{\varphi}} Y^{\varphi} = \big(\nabla_X Y\big)^{\varphi}$$

para cualesquiera X y Y en Der $\mathbb{C}$, cualquier ∇ en Con(M), y cualquier $\varphi \in$ Diff(M). En particular, poniendo $X = Z^{\varphi^{-1}}$ y $Y = W^{\varphi^{-1}}$ en ambos miembros de la ecuación, obtenemos,

$$\nabla^{\varphi}{}_Z W = \varphi^* \circ \left(\nabla_{Z^{\varphi^{-1}}} W^{\varphi^{-1}}\right) \circ \varphi^{-1*}$$

para cualesquiera Z y W en Der $\mathbb{C}$ y cualquier φ en Diff(M).

Lo que habíamos afirmado al inicio de esta sección de que la geometría diferencial centraba su atención en los diferentes subgrupos G del grupo de difeomorfismos Diff(M) que quedan seleccionados al fijar uno o varios objetos geométricos en una variedad M y demandar que dichos objetos se preserven bajo la acción de los elementos de Diff(M), puede entonces aclararse con los siguientes ejemplos.

Supongamos que M tiene definida una métrica Riemanniana g. Lo natural es entonces estudiar el subgrupo $G \subset$ Diff(M) de todas las isometrías; esto es, $G = \{\varphi \in \text{Diff}(M) \mid g^{\varphi} = g\}$. Si M tiene definida una k-forma diferencial ω preferencial (como es el caso de una variedad simpléctica), lo natural es estudiar el subgrupo $G \subset$ Diff(M) de los difeomorfismos que preservan dicha forma diferencial; esto es, $G = \{\varphi \in \text{Diff}(M) \mid \omega^{\varphi} = \omega\}$. Si M está equipada con una conexión ∇ preferencial, el subgrupo $G \subset$ Diff(M) a considerar es el de todos los difeomorfismos que preservan dicha conexión; esto es, $G = \{\varphi \in \text{Diff}(M) \mid \nabla^{\varphi} = \nabla\}$. Lo mismo sucede si hay más de un objeto geométrico seleccionado. Por ejemplo, si los datos son una sección J de $\mathcal{T}_1^1(M)$ y una métrica Riemanniana g, el subgrupo $G \subset$ Diff(M) a considerar será $G = \{\varphi \in \text{Diff}(M) \mid g^{\varphi} = g \text{ y } J^{\varphi} = J\}$, donde la acción de Diff(M) en las secciones de $\mathcal{T}_1^1(M)$ se encuentra según la regla de equivariancia mencionada y en este caso es, $J^{\varphi} = \text{Ad}(\varphi^*) \circ J \circ \text{Ad}(\varphi^{-1*})$, siendo Ad$(\varphi^*)$ la acción en campos vectoriales $X \mapsto \varphi^* \circ X \circ \varphi^{-1*}$ descrita anteriormente.

7 Geometría, física y topología en la última parte del siglo XX.

Michael Gromov ha sido sin duda una de las figuras más sobresalientes en el mundo de la geometría en los últimos años del siglo XX. Las ideas expuestas en sus trabajos no han sido aún completamente explotadas y — en las propias palabras de Gromov — no todas han sido completamente comprendidas a fondo. (El lector interesado puede consultar una entrevista y una revisión del trabajo de Gromov en los números de febrero y marzo del año 2000 de la revista *Notices* de la American Mathematical Society). Gromov ha hecho contribuciones notables al entendimiento de la geometría Riemanniana y de la geometría simpléctica con ideas relativamente sencillas de la matemática clásica (álgebra, geometría, topología y análisis), pero la forma de combinar esas ideas y aplicarlas al estudio de las variedades Riemannianas y simplécticas ha sido verdaderamente revolucionario.

Para darle al lector una idea sobre el tipo de pensamiento matemático manejado por Gromov, es preciso tener primero un modelo sencillo a la mano. Por ejemplo, piénsese en la teoría de Morse. La teoría de Morse descubre la estrecha relación que existe entre las funciones diferenciables definidas en una variedad Riemanniana y la topología de la misma. La manera de establecer esta relación es a través del estudio de las 'superficies de nivel' de alguna función real cuyos puntos críticos sean del tipo más sencillo posible: no-degenerados. Tales funciones se llaman *funciones de Morse* y el hecho importante acerca de ellas es que abundan, en el sentido de que una función diferenciable escogida al azar, casi seguramente será de Morse. Si entre dos superficies de nivel de una función de Morse no se encuentra punto crítico alguno, entonces las dos superficies contienen la misma información topológica en el sentido de que es posible deformar continuamente una de ellas hasta hacerla coincidir con la otra. Por otra parte, si entre dos superficies de nivel existe un punto crítico, la topología de una está relacionada con la de la otra de una manera muy concreta: pegando o removiendo una celda cuya dimensión se conoce a partir de la información algebraica del punto crítico obtenida con el criterio de 'la segunda derivada'. La moraleja arrojada por la teoría de Morse es que, casi en todas partes, la variedad 'se ve' muy parecida de un sitio a otro relativamente cercano y cuando sí hay cambios cualitativos, éstos se conocen con precisión.

La abstracción que es preciso hacer en el ejemplo de la teoría de Morse para apreciar el tipo de enfoque seguido por Gromov es el siguiente: piénsese en una variedad Riemanniana en la que cada uno de sus puntos representa a su vez una variedad Riemannana compacta de dimensión d y aplíquese a dicha variedad de d-variedades Riemannianas, una teoría de Morse. Resulta claro que habrá una gran cantidad de especificaciones técnicas que hacer antes de poder utilizar un tal escenario para la teoría de Morse, pero justamente la genialidad de Gromov ha radicado en tratar de hacer esto posible y en proporcionar construcciones en ambientes generales que le han permitido hacer afirmaciones asombrosamente universales. Por ejemplo el hecho de que "las variedades hiperbólicas abundan" (variedades cuya curvatura seccional es negativa) o el hecho demostrado por Cheeger en 1969 de que, "fuera de la dimensión 4 solamente hay un número finito de clases (bajo difeomorfismos) de variedades diferenciables con curvatura seccional, diámetro y volumen acotados", han sido evidenciados por Gromov a partir de propiedades algebraicas y topológicas en dichos escenarios generales. Por ejemplo, el resultado de Cheeger se obtiene de notar que en el espacio métrico de las variedades Riemannianas compactas y d-dimensionales, las condiciones (1) los eigenvalores del tensor de Ricci son todos mayores que una constante y (2) el diámetro se mantiene menor que una constante positiva, son suficientes para definir un subconjunto precompacto. Los métodos de Gromov han puesto así de manifiesto propiedades rígidas y robustas de colecciones enormes de ejemplos. En todos los problemas que él aborda se encuentran perfectamente bien arraigadas las ideas, (1) encontrar todas aquellas propiedades que no cambian bajo deformaciones, y (2) poder demostrar afirmaciones probabilísticas sobre la existencia o no de ejemplos.

Otro ejemplo del final del siglo XX donde las construcciones de naturaleza topológica han arrojado nueva luz sobre nuestro entendimiento de la geometría y topología diferencial de las variedades de dimensión 4, fue el conseguido originalmente por Simon Donaldson y sobre el cual contribuyeron enormemente Clifford Taubes, Karen Uhlenbeck, John Morgan, Ronald Stern, Daniel Freed y otros.

A nivel topológico únicamente, la clasificación de las 4-variedades está basada en la clasificación algebraica de las posibles formas de intersección enteras definidas en el segundo grupo de homología (esto es, en la mitad de la dimensión que en este caso es 4) $\mu\colon H_2(M,\mathbb{Z}) \times H_2(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$. Un resultado clásico de Whitehead (1949) y Milnor (1958) establece que dos 4-variedades compactas y simplemente conexas son homotópicamente equivalentes si y sólo si sus formas de intersección son algebraicamente equivalentes. En 1982 M. Freedman proporcionó una manera de realizar una 4-variedad en cada clase de equivalencia de una forma de intersección dada. En la categoría diferenciable, sin embargo, no toda forma de intersección se puede realizar. El primer resultado fundamental de Donaldson establece que una 4-variedad diferenciable compacta, orientada y simplemente conexa cuya forma de intersección es positiva definida puede ser realizada en la categoría diferenciable si su forma de intersección es equivalente a una diagonal. Esto es, se trata de variedades con la forma de intersección más sencilla posible.

El teorema de Donaldson se demostró originalmente empleando métodos de las teorías físicas de *campos de Yang-Mills*. La física de las interacciones fundamentales (y de las partículas elementales sujetas a dichas interacciones) trata con representaciones de un grupo de Lie fijo G. De hecho, la física moderna piensa a las partículas como funciones definidas en una región U del espacio tiempo M que toman valores en algún espacio de representación específico del grupo G (o — según algunas restricciones físicas — de algún subgrupo G_0 de G, o de algún grupo cubriente $\widetilde{G}$ de G). La representación se hace patente cuando se escriben "las leyes de transformación" de dichas funciones frente a cambios de coordenadas. En términos de topología y geometría se trata de secciones ψ de fibrados vectoriales sobre M asociados a alguna representación (o, a alguna representación inducida desde un subgrupo G_0 al grupo G, o, de alguna representación del grupo $\widetilde{G}$ que cubre a una representación dada de G) a partir de un fibrado principal con grupo de estructura G (respectivamente, G_0, o bien $\widetilde{G}$, según el caso).

La interpretación física requiere que las representaciones sean unitarias, demandando la invariancia de cantidades como $\langle\psi \mid \psi\rangle$. Sin embargo, no todas las secciones ψ pueden representar partículas; por ejemplo, no toda función $\psi\colon \mathbb{R}^4 - \{0\} \to \mathbb{C}^2$ puede representar a un electrón; primero debe satisfacer la *ecuación de Dirac*. Por otra parte, el operador de Dirac define una transformación equivariante para la acción de G entre espacios de secciones; ello hace que el Kernel del operador sea un *subespacio invariante;* es precisamente de este subespacio de donde provienen las *partículas*.

Ahora bien, la física no sólo establece ecuaciones (como la de Dirac) para las partículas, sino que establece también ecuaciones que deben satisfacer los campos que producen las fuerzas a las que las partículas quedarán sujetas. El ejemplo prototipo son las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético. Con los pioneros trabajos de Yang y Mills (1954), por un lado y de Utiyama (1956) por otro, quedó puesto de manifiesto que los potenciales de los cuales se derivan los campos físicos que actúan sobre las partículas, se transforman, bajo cambios de coordenadas, de la misma manera en que se transforman los datos locales que definen una conexión en un fibrado vectorial; el mismo fibrado vectorial donde se realiza la partícula. Además, 'la mitad' de las ecuaciones que deben satisfacer los campos sólo dice que la fuerza derivada de los potenciales corresponde precisamente a la curvatura de la conexión. Finalmente, las cantidades físicas observables son aquellas que guardan las debidas propiedades de invariancia y equivariancia frente a las transformaciones del grupo de Lie G que se encuentra en el fundamento de todas estas construcciones. Esto último se traduce precisamente en la condición que permite globalizar los objetos definidos localmente para poder afirmar que la teoría física trata con el estudio de fibrados vectoriales, asociados a una representación del grupo estructural de un fibrado principal. En estas condiciones, la física debe, entre otras cosas, determinar los posibles campos físicos que acturán sobre las partículas.

Determinar 'los posibles campos físicos' lo traduce la geometría en determinar 'el *moduli* de las conexiones'. Lo que esto quiere decir es determinar el conjunto de todas las órbitas en el conjunto de las conexiones de un fibrado vectorial dado, al hacer actuar el grupo estructural G en dicho conjunto. La razón de esto se debe a que todos los potenciales (conexiones) que se encuentran en la misma órbita producen campos de fuerzas indistinguibles entre sí (la misma curvatura).

El *moduli* de las conexiones es entonces el conjunto de las clases de equivalencia de conexiones. El asombroso resultado que permitió demostrar el teorema de Donaldson fue comprobar que, bajo ciertas condiciones especiales, el moduli de las conexiones tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión 5, orientada y con frontera. Una de las componentes conexas de la frontera resulta ser la 4-variedad M de partida y el resto de la frontera es una variedad cuyo tipo de clase diferenciable 'se puede leer fácilmente'. En otras palabras, el moduli proporciona un cobrodismo entre la variedad de partida y otra cuya forma de intersección es fácil de determinar. El grupo empleado por Donaldson para producir el moduli de conexiones que evidencia la clase diferenciable de la variedad M fue el grupo SU_2 de los cuaternios unitarios.

Al trabajo de Donaldson le sobrevino una fuerte corriente de investigación alrededor de las ecuaciones de Yang-Mills en variedades de dimensiones tres y cuatro, así como un renovado interés por la geometría y topología diferencial en las variedades de tales dimensiones. El impacto de esta corriente fue mayúsculo y generó una cantidad impresionante de trabajos en las últimas dos décadas del siglo XX. En particular, los trabajos fundamentales de W. Thurston en el terreno de la topología y geometría de las variedades 3-dimensionales probaron ser de gran ayuda en la exploración y búsqueda de nuevos invariantes y de construcciones para abundar en nuestro entendimiento de las variedades de dimensiones 3 y 4, así como su relación posible con la física.

Hacia finales de 1993, dos trabajos de Seiberg y Witten (1994) anunciaron una nueva etapa en el desarrollo de la relación entre la física, la geometría diferencial y la topología. Aunque el enfoque propuesto por Seiberg y Witten para explorar la relación entre los anunciados invariantes y los descubrimientos obtenidos tras el teorema de Donaldson entre los años 1983 y 1993 presentaba algunos problemas técnicos difíciles de superar, la filosofía adoptada por los matemáticos Taubes, Kronheimer y Mrowka fue tomar como punto de partida los nuevos objetos — las llamadas ecuaciones de Seiberg-Witten; ecuaciones planteadas sobre una variedad Kähler — y olvidar su anunciada relación con el moduli de las conexiones. Trabajando con el grupo abeliano U_1 de los complejos unitarios — un grupo con el que es mucho más sencillo trabajar que SU_2 y cuyas representaciones unitarias irreducibles son todas unidimensionales — y resolviendo explícitamente las ecuaciones de Seiberg-Witten, se fueron obteniendo poco a poco demostraciones muy sencillas para casi todas las conjeturas que la teoría de Donaldson había dejado planteadas en diez años. El lector interesado en los detalles puede encontrar una excelente exposición de la teoría de Donaldson en el libro de Blaine Lawson (1985) y una magnífica exposición de la teoría de Seiberg-Witten en el libro de J. Morgan (1996).

8 Una mirada al futuro.

Después de haberle echado un vistazo a la historia y de detenernos en algunas de las referencias listadas en la bibliografía, queda claro que el futuro de la geometría diferencial es amplio y extenso. Hay mucho trabajo por hacer en el terreno de la topología diferencial; en la teoría de sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales sobre variedades diferenciables y holomorfas; en el entendimiento de la geometría simpléctica; etc. El siglo XX concluye abriéndonos un maravilloso camino central lleno de promesas desafiantes para el futuro. El camino donde se sumergen los problemas geométricos en problemas de otras áreas de la matemática como la topología, el álgebra, el análisis y aún la física matemática.

Uno de los objetivos originales de S. Lie fue el poder visualizar las posibles soluciones de una ecuación diferencial como los puntos de una variedad. Cuestiones geométricas y topológicas planteadas sobre dicha variedad de soluciones debían proporcionar información fundamental sobre la naturaleza de la ecuación diferencial original. El ejemplo aludido en §7, relativo a las ecuaciones de Yang-Mills para las conexiones de un fibrado vectorial específico y la estructura de variedad diferenciable encontrada en el espacio de las órbitas de dichas conexiones bajo la acción del grupo de gauge, demuestra de manera por demás elocuente lo poderosa y promisoria que resulta la idea de que los puntos de una variedad correspondan a objetos geométricos estructurados (aunque *a priori* no se hubiera podido anticipar que el tipo de resultado arrojado por un tal estudio tendría que ver con la clase diferenciable de la 4-variedad de partida). No hay duda de que en esta dirección hay mucho que explorar y la punta del iceberg ha quedado asomada entre los hallazgos recientes de la topología diferencial y el libro de Gromov (1985) sobre *relaciones diferenciales* entre objetos de una variedad diferenciable. De hecho podríamos afirmar que quedan por comprenderse todos los problemas que dependen de nuestra capacidad de interpretar geométricamente la información contenida en la solución de diversos sistemas de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones de Yang-Mills y Seiberg-Witten proporcionan sólo un ejemplo de lo lejos que puede llegarse al geometrizar los problemas planteados por las ecuaciones diferenciales.

Con el final del siglo XX parece que ha quedado claro también que, cuando los puntos de un espacio — que aún sin ser variedad diferenciable, posee alguna estructura métrica o topológica — están en correspondencia con objetos más estructurados de un cierto tipo (como el ejemplo en el que los puntos de un espacio representan variedades Riemannianas compactas de una dimensión fija, o como el ejemplo en el que los puntos son soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales como las de Yang-Mills), se pueden abordar muchas cuestiones geométricas y topológicas intrínsecas y caractéristicas de grandes familias de ejemplos. En la literatura uno se refiere a estos espacios como los *moduli* correspondientes a la familia en cuestión y lo que hemos aprendido al final del siglo XX es que la manera de abordar las características comunes o distintivas de los miembros de tales familias es mediante el estudio de la topología, o del análisis, o del álgebra, o de la geometría asociadas a cuestiones más sencillas planteadas en el moduli. El modelo aludido en el texto sobre la realización de una teoría de Morse en un moduli dado está aún por explorarse y está también por comprenderse en detalle su potencial en las aplicaciones. Aún así, la teoría de Morse es sólo una de entre muchas cosas que pueden estudiarse en los moduli con un cierto potencial de poder decir algo profundo sobre las familias a las que se aplique el estudio.

Por otra parte, dentro de la línea de estudiar nuevos tipos de variedades y objetos geométricos en ellos, vemos frente a nosotros el amplio camino de desarrollar teorías que en estos momentos se consideran menos convencionales. Tales son la supergeometría, las geometrías no conmutativas, la geometría de los grupos cuánticos, etc. Está por delante la tarea de exhibir grandes familias de ejemplos, de clasificar y caracterizar algunas de tales familias y de probar la valía de la exploración mediante demostraciones sencillas de teoremas geométricos importantes que, con los métodos convencionales resultan de difícil acceso. De manera más específica aún, quedan por delante muchas aplicaciones a la física matemática emanadas del mejor entendimiento de los nuevos objetos. Un ejemplo que podemos señalar sobre el estado de desarrollo de las geometrías no conmutativas es que hasta hace menos de diez años no podía plantearse con generalidad y precisión una ecuación diferencial, ni aún en los ejemplos más sencillos (en las supervariedades). Por supuesto, queda por delante comprender en detalle la estructura de las soluciones y de los espacios de soluciones de tales ecuaciones.

De la experiencia del siglo XX queda también claro que, mientras existan nuevos descubrimientos en la física, habrá nuevos descubrimientos en la geometría. Además, parece haber sido concluyente en la síntesis geométrica del siglo XX que, los objetos geométricos, los objetos que estudia la geometría son, y seguirán siendo, interpretables como secciones de alguna fibración adaptada al problema. Es muy difícil imaginar el futuro de la geometría sin que esto siga siendo así. Por otra parte, también es concluyente el hecho de que un gran principio guiador en la búsqueda de respuestas a los problemas de la geometría planteados en ejemplos específicos ha sido la teoría de los grupos de Lie. Es muy difícil imaginar el futuro de la geometría sin pensar que una piedra angular para su desarrollo y búsqueda de nuevos ejemplos seguirá siendo la misma.

Agradecimientos.

Agradezco enormemente la invitación de Juan José Rivaud para escribir este artículo para el número especial del año 2000 de nuestra *Miscelánea Matemática.* Quiero agradecer también muy profundamente las largas discusiones sobre la acción del grupo de difeomorfismos en campos vectoriales, formas diferenciales, métricas Riemannianas, conexiones lineales, etc., que sostuve intensamente por correo electrónico durante la segunda mitad de 1999 con mi colega María Elena Vázquez Abal. Una vez producida la primera versión de este escrito y durante el tiempo en el que se realizaba el arbitraje, algunos amigos y colegas leyeron el artículo haciendo críticas, sugerencias y comentarios muy relevantes. De entre ellos hay dos a quienes les debo mucho: Luis Hernández Lamoneda y Heberto del Río Guerra. En esta dirección deseo también expresar mi más sincero agradecimiento y reconocimiento al árbitro porque definitivamente sí podía mejorarse la exposición original a lo largo de las líneas que señaló. Finalmente, agradezco el apoyo económico recibido por parte del CONACyT (número de referencia 28491-E) para el proyecto de investigación en geometría diferencial que mantenemos en el CIMAT puesto que gracias a él nuestro 'ambiente geométrico' ha crecido, se ha visto enriquecido y cada día resulta más estimulante y motivador.

Referencias

[1] W. Ambrose, *Parallel translation of Riemannian curvature*, Ann. of Math. **64**, (1956), 337–363.

[2] W. Ambrose and I. M. Singer, *A theorem on Holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. **75**, (1953), 428–443.

[3] M. Atiyah, and I. M. Singer, *The index of elliptic operators: I*, Ann. of Math. **87**, (1968), 484–530.

[4] M. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators: II*, Ann. of Math. **87**, (1968), 531–545.

[5] M. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators: III*, Ann. of Math. **87**, (1968), 546-604.

[6] N. A. Baas, *Sophus Lie*, The mathematical intelligencer **16**, (1994), 16–19

[7] W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder, Manifolds of nonpositive curvature, Birkhäuser, Boston, (1985).

[8] S. Bergman, *Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande*, J. Reine Angew. Math. **169**, (1933), 1–42.

[9] S. Bergman, *Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande*, J. Reine Angew. Math. **172**, (1935), 89–128.

[10] R. Bott and L. W. Tu, Differential forms in algebraic topology, Springer Verlag, New York, (1982).

[11] E. Cartan, Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications géométriques, Actualités Sci. Ind. No. 994, Hermann, Paris, (1945).

[12] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. École Norm. Sup. **40**, (1923), 325–412.

[13] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. École Norm. Sup. **41**, (1924), 1–25.

[14] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. École Norm. Sup. **42**, (1925), 17–88.

[15] E. Cartan, *Les espaces à connexion conforme*, Ann. Soc. Pol. Math. **2**, (1923), 171–221.

[16] E. Cartan, *Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl*, J. Math. Pures Appl. **2**, (1923), 167–192.

[17] E. Cartan, La Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris (1925).

[18] E. Cartan, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*, Acta Math. **48**, (1926), 1–42.

[19] E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, Bull. Soc. Math. France **54**, (1926), 214–264.

[20] E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, Bull. Soc. Math. France **55**, (1927), 114–134.

[21] E. Cartan, Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, (1928).

[22] E. Cartan, La Méthode du Repère Mobile, la Théorie de Groupes Continus et les Espaces Généralisés, Actualités Sci. et Ind. #194, Hermann, Paris (1935).

[23] H. Cartan, *Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), 15–27.

[24] H. Cartan, *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), 57–71.

[25] H. Cartan, *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, Colloque sur les fonctions de plusiers variables, CBRM Bruxelles, (1953), 41–55.

[26] J. Cheeger, and M. Gromov, *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded.* I, J. Differ. Geom. **23**, (1986), 309–346.

[27] J. Cheeger, and M. Gromov, *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded.* II, J. Differ. Geom. **32**, (1990) , 269–298.

[28] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology* J. Differential Geom. **18**, (1983), 279–315.

[29] S. K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom. **18**, (1983), 269–277.

[30] S.K. Donaldson, *Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **8**, (1983), 81–83.

[31] S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29**, (1990), 257–315.

[32] S. Donaldson and P. Kronheimer, The Geometry of Four-Manifolds, New York, Clarendon; Oxford University Press, (1990).

[33] C. Ehresmann, *Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle*, C.R. Acad. Sci. Paris **202**, (1935), 20–33.

[34] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29–55.

[35] Y. Eliashberg and M. Gromov, *Lagrangian intersections and the stable Morse theory* Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B 11, No.2, Suppl. (1997), 289–326.

[36] M. Gromov, *Homotopical effects of dilation*, J. Differential Geom. **13**, (1978), 303–310.

[37] M. Gromov, *Manifolds of negative curvature*, J. Differential Geom. **13**, (1978), 223–230.

[38] M. Gromov, *Synthetic geometry in Riemannian manifolds*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, (1980), 415–419.

[39] M. Gromov, *Curvature, diameter, and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. **56**, (1981), 179–195.

[40] M. Gromov, *Structures Mátriques pour les Variétés Riemanniennes*, Textes Mathématiques, (J. Lafontaine, and P. Pansu, eds.), CEDIC, Paris, (1981).

[41] M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds* J. Differential Geom. **18**, (1983), 1–147.

[42] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds* Invent. Math. **82**, (1985), 307–347.

[43] M. Gromov, Partial differential relations, Springer Verlag, Berlin, (1986).

[44] M. Gromov and W. Thurston, *Pinching constants for hyperbolic manifolds* Invent. Math. **89**, (1987), 1–12.

[45] M. Gromov, H. B. Lawson and W. Thurston, *Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **68**, (1988), 27–45.

[46] M. Gromov, *Kaehler hyperbolicity and L^2-Hodge theory*, J. Differ. Geom. **33**, (1991), 263–292.

[47] M. Gromov, *Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps.* I, Math. Phys. Anal. Geom. **2**, (1999), 323–415.

[48] M. Gromov, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces, Birkhäuser, Boston, (1999).

[49] V. W. Guillemin and S. Sternberg, Symplectic Techniques in Physics, Cambridge University Press, Cambridge, (1984).

[50] V. W. Guillemin and S. Sternberg, *An algebraic model of transitive differential geometry* Bull. Amer. Math. Soc. **70**, (1964), 16–47.

[51] V.W. Guillemin and S. Sternberg, Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1999).

[52] Th. Hawkins, *The birth of Lie's theory of groups.* The mathematical intelligencer **16**, (1994), 6–17.

[53] W. V. D. Hodge, The Theory and Applications of Harmonic Integrals, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1952).

[54] W.V.D. Hodge, *A special type of Kähler manifolds*, Proc. London Math. Soc. **1**, (1951), 104–117.

[55] W. V. D. Hodge, *Structure problem for complex manifolds*, Rend. Math. **11**, (1952). 101–110.

[56] N. H. Ibragimov, *Sophus Lie and harmony in mathematical physics*, The mathematical intelligencer **16**, (1994), 20–28.

[57] E. Kähler, *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9**, (1933), 173–186.

[58] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups* Russ. Math. Surveys **17**, (1962), 53–104.

[59] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vols. I, II, Interscience No. 15, John Wiley, New York, (1962).

[60] K. Kodaira, L. Nirenberg, and D. C. Spencer, *On the existence of deformations of complex analytic structures*, Annals of Math. **68**, (1958), 450–459.

[61] B. Kostant, *Quantization and unitary representations*, Lecture Notes in Mathematics **170**, (1970), 87–208.

[62] B. Kostant, *Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization*, Lecture Notes in Mathematics **570**, (1977), 177–306.

[63] H. B. Lawson, The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions, CBMS No. 58, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1983).

[64] H. B. Lawson and M-L. Michelson, Spin Geometry, Princeton University Press, Princeton (1989).

[65] J. W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. **64**, (1956), 394–405.

[66] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton NJ, (1974).

[67] J. W. Morgan, The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds, Mathematical Notes No. 44, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1996).

[68] A. Newlander and L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost-complex manifolds*, Annals of Math. **65**, (1957), 391–404.

[69] A. Nijenhuis, *On the holonomy group of linear connections*, Indag. Math. **15**, (1954), 17–25.

[70] K. Nomizu, *Reduction theorem for connections and its application to the problem of isotropy and holonomy groups of a Riemannian manifold*, Nagoya Math. J. **9**, (1955), 57-66.

[71] H. Poincaré, La ciencia y la hipótesis, Colección Austral, N° 379, tercera edición, Espasa-Calpe, Madrid, (1963).

[72] H. Poincaré, La valeur de la science, Flammarion, (1905).

[73] H. Poincaré, Scientia, Spazio e tempo, Rivista di Scienza, Bologna (1912).

[74] J.S. Pontryagin, *Characteristic cycles on differentiable manifolds*, AMS Translations **32**, (1950), 233–284.

[75] L.S. Pontryagin, *Smooth manifolds and their applicactions in homotopy theory*, AMS Translations, **11**, (1959), 1–114.

[76] G. de Rham, *Sur la réductibilité d'un espace de Riemann*, Comment. Math. Helv. **26**, (1952), 328–344.

[77] G. de Rham, Variétés Différentiables, Hermann, Paris, (1955).

[78] I. M. Singer and S. Sternberg, *On the infinite groups of Lie and Cartan I*, J. Analyse Math. **15**, (1965), 1–114.

[79] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish or Perish, Berkeley, CA, (1970).

[80] S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1964).

[81] S. Sternberg, *Imagery in scientific thought by A. Miller*, Book Review, The mathematical intelligencer **8**, (1986), 65–74.

[82] E. Stiefel, *Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten*, Comm. Math. Helv. **8**, (1936), 3–51.

[83] C. H. Taubes, *Exotic differentiable structures on Euclidean 4-space*, Lecture Notes in Phys. (Springer Verlag) **202**, (1984), 41–43.

[84] C.H. Taubes, *Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix*, J. Differential Geom. **19**, (1984), 517–560.

[85] C. H. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, J. Differential Geom. **25**, (1987), 363–430.

[86] C. H. Taubes, *The stable topology of self-dual moduli spaces*, J. Differential Geom. **29**, (1989), 163–230.

[87] C.H. Taubes, *The existence of anti-self-dual conformal structures*, J. Differential Geom. **36**, (1992), 163–253.

[88] C. H. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett., **1**, (1994), 809–822.

[89] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten and Gromov invariants*, Math. Res. Lett. **2**, (1995), 221–238.

[90] W. P. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **6**, (1982), 357–379.

[91] W. P. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, The mathematical heritage of Henri Poincaré, Proc. Symp. Pure Math. Part 1 **39**, (1983), 87–111.

[92] W. P. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds. I: Deformation of acylindrical manifolds*, Ann. Math., II. Ser. **124**, (1986), 203–246.

[93] W. P. Thurston, Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1, Princeton Mathematical Series. No. 35, Princeton, NJ, University Press, 1997.

[94] R. Utiyama, *Invariant theories of interaction*, Phys. Rev. (1956), 1597.

[95] A. Weinstein, Lectures on Symplectic Manifolds, CBMS Lecture Notes No. 29, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1977).

[96] H. Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie; Einordnung der projektiven und konformen Auffassung*, Göttingen Nachrichten (1912), 99–112.

[97] H. Weyl, Space, Time, Matter, Traducción del libro original publicado en alemán en 1918, New York, Dover, (1952).

[98] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Traducción del libro original publicado en alemán en 1928, Princeton, NJ, Princeton University Press, (1931).

[99] H. Weyl, The Concept of a Riemann Surface, Addison-Wesley, Reading, MA, (1955).

[100] H. Whitney, *Sphere spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **21**, (1935), 462–468.

[101] H. Whitney, *On the theory of sphere bundles*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **26**, (1940), 148–153.

[102] H. Whitney, *On the topology of differentiable manifolds*, Lectures in Topology, University of Michigan Press, (1941), 101–141.

[103] E. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. of Math. **40**, (1939), 149–204.

[104] E. Wigner, Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Traducción del libro original publicado en alemán en 1931, New York, Academic Press, (1959).

[105] C. N. Yang and R. Mills, Phys. Rev., **96**, (1954), 191.