Miscelánea Matemática **27** (1998) 15–27 SMM

¿Matemáticas en la Música?

Emilio Lluis-Puebla
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, U.N.A.M.

Mucho se ha hablado acerca de que la Matemática y la Música están muy “relacionadas” o de que “la Música es Matemática”, etc. Sin embargo nunca se hace precisa dicha “relación”, es decir, la conexión por ciertas cualidades o características de una con la otra. Cuando usted le pregunta a la persona que dice que “hay una relación”, que en qué consiste dicha relación generalmente le contestará, que porque cuando ha visto una partitura ésta está llena de numeritos. Es decir, los números que aparecen en el compás y las digitaciones. Tal respuesta no es satisfactoria.

Juego de Dados.

Mozart, en 1777, a los escasos 21 años de edad, escribió un “Juego de Dados Musical K. 294 (Anh.C) para escribir valses con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición”. Escribió 176 compases adecuadamente y los puso en dos tablas de 88 elementos cada una. El juego comienza lanzando los dos dados, de tal manera que tenemos 11 números posibles (de 2 al 12) y hacemos 8 tiradas obteniendo distintos compases excepto los de la última columna que son iguales (éstos últimos con dos posibilidades: una para la repetición y otra para continuar con la segunda tabla). La segunda tabla es igual a la primera excepto que tiene otros 88 compases con los de la última columna idénticos. Así tenemos

$$11^{14} \simeq 3.797498335832 \times 10^{14}$$

valses diferentes. Si se toca cada vals, con repetición de la primera parte, en 30 segundos se tardaría

$$30 \cdot 11^{14} \simeq 1.139249501 \times 10^{16}$$

segundos, o sea,

$$131,857,581,105$$

días aproximadamente, o bien

$$361,253,646$$

años aproximadamente en tocarlos todos uno tras de otro. Es decir, un estreno mundial de una obra suya cada 30 segundos a lo largo de ¡361 millones de años! (recuérdese que la antigua edad de piedra comenzó hace unos 35,000 años).

Mozart era un aficionado a las matemáticas y su enorme talento se mostró una vez más. Con este jueguito tan sencillo ¡dejó la imposibilidad de que intérprete alguno pudiera tocar su obra completa!

Medida Estética de Birkhoff.

En 1924 George David Birkhoff (1884-1944) retoma unas ideas que había tenido años atrás pero que no desarrolló por dedicarse exclusivamente a estudios puramente matemáticos. Pensó que la melodía dependía del orden de las notas escuchadas por el oído. Le pareció que podrían establecerse unas relaciones de orden, guardadas por las notas, y así poder escoger las mejores melodías. Para él, el *problema fundamental de la Estética* era el de determinar, para una clase de objetos, las características específicas de las cuales depende el valor estético.

Birkhoff considera que hay tres fases consecutivas para la experiencia estética:

(a) un esfuerzo preliminar de atención, el cual es necesario para percibir el objeto y que es proporcional a la *complejidad* C del objeto.

(b) una sensación placentera o *medida estética* M la cual recompensa este esfuerzo preliminar y

(c) una certificación de que el objeto posee una armonía, simetría u *orden* O el cual parece una condición necesaria, si no es que suficiente, para la experiencia estética.

Así, Birkhoff propone la fórmula

$$M = \frac{O}{C}$$

mediante la cual expresa la medida estética como el efecto de la densidad de las relaciones de orden comparadas con la complejidad.

El mismo inquiere lo atrevido de esta fórmula y proporciona algunas justificaciones históricas. La Estética trata del placer estético y con los objetos que lo producen. Así es que tenemos clases de objetos los cuales pueden ser comparados con respecto a su valor estético (los de clases diferentes no pueden ser comparados). Luego, el problema fundamental de la *Estética Analítica* es el de determinar los factores estéticos y su importancia relativa.

Para Birkhoff [B2], percibir un objeto estético requiere de ciertos ajustes y la sensación de esfuerzo o tensión que acompaña siempre a la percepción aparece como la suma de las tensiones a los diversos ajustes automáticos. Así, si $A, B, C, ...$ representan estos ajustes, cada uno con tensiones $a, b, c, ...$ y si éstas se realizan $r, s, t, ...$ veces podemos considerar la suma

$$C = ra + sb + tc + \cdots$$

como la complejidad.

Por otro lado, el orden O corresponde a ciertas asociaciones que intervienen en el acto de percepción. Por ejemplo, la simetría sería una asociación. Si $L, M, N, ...$ son asociaciones de varios tipos, cada una con índices de sensación $l, m, n, ...$ las cuales ocurren $u, v, w, ...$ veces, entonces podemos considerar el total de sensaciones (positivo o negativo)

$$O = ul + vm + wn + \cdots$$

como el orden del objeto. Es así que la estimación intuitiva de la cantidad de orden O inherente al objeto estético, comparado con su complejidad C, nos proporciona su medida estética.

Obviamente esta teoría matemática solo puede aplicarse a objetos cuyos factores estéticos sean esencialmente matemáticos o formales. Hay otros factores que están más allá de esta teoría, como por ejemplo, las asociaciones acerca del significado de un poema hermoso.

Veamos cómo algunos pensadores han percibido la presencia de *elementos matemáticos* en el arte y que inspiraron a Birkhoff a formular su teoría. A diferencia de las teorías hedonísticas, místicas o moralistas, la teoría analítica se concentra en proveer una solución cuantitativa al problema fundamental antes formulado. Parecería que la Estética, si ha de considerarse científica debe de abordarse en una forma analítica y restringirse a aspectos formales del arte. Sin embargo, no se pretende negar la importancia trascendente del aspecto connotativo en todo arte creativo.

Platón reconoce la importancia del elemento matemático. Dice que si a cualquier arte se le quita la aritmética, la medida, y lo pesable, lo que queda no es mucho. También expresa que a través de la medida y la proporción siempre se llega a la belleza y a la excelencia.

Aristóteles expresa que están equivocados aquellos que claman que la Matemática no dice nada acerca de la belleza y la bondad, y que los elementos de la belleza son el orden, la simetría, la limitación definida y que éstas son las propiedades a las cuales la Matemática les pone atención.

El punto de vista de la filosofía griega estaba inclinado a seleccionar la forma y la proporción como los elementos típicos de la belleza.

El matemático Luca Pacioli en su "De Divina Proporcione" de 1509 considera la sección dorada, la cual más adelante abordaremos, misma que utilizó su amigo Miguel Angel.

Durante el siglo XVII y principios del XVIII prevalecieron los conceptos de "ingenio" y "buen gusto". En éste último está implícito un esfuerzo de atención, luego un juicio estético intuitivo dependiendo del buen gusto y finalmente el análisis.

Leibniz pudo admitir las percepciones y juicios estéticos como parte del saber y definió la Música como el contar sin saber que se está contando. Esto último concuerda con el concepto de Birkhoff en el sentido de que la densidad de ciertas relaciones ordenadas entre las notas consideradas intuitivamente, miden el efecto estético. De Crousaz escribe, que el buen gusto nos hace apreciar, al principio, por sensaciones, aquello que la razón hubiera aprobado.

Rameau observó que una nota musical está compuesta por un sonido fundamental y varias parciales, y que las notas que difieren por una octava son similares en cuanto a su efecto estético y pueden considerarse casi idénticas. Estos hechos conducen al entendimiento de la música occidental. Fue d'Alembert quien dio una clara presentación del trabajo de Rameau (el cual es cualitativo, a diferencia del tratamiento cuantitativo de Birkhoff). Así, el grado de armonicidad es distinto del agrado o medida estética. Por ejemplo, el unísono y la octava son los más armoniosos de los intervalos pero no los más agradables.

Euler, en 1739, desarrolló una teoría de consonancia basado en la ley pitagórica. Entre más pequeños sean los números que expresan la relación de vibración de dos notas, éstas serán más consonantes. De ésta forma, Euler estableció un criterio de armonicidad de cualquier intervalo o acorde que concuerda con los hechos observados. Es interesante que Euler formulara una ley cuantitativa para la medida de la armonicidad. Así, el concepto general de Euler acerca de la naturaleza del goce estético concuerda completamente con el de Birkhoff, que en palabras de Helmholtz años después, establecían que entre más fácilmente percibamos el orden que caracteriza a los objetos contemplados, estos parecerán más simples y perfectos, y más fácil y gozosamente los reconoceremos. Un orden que cuesta trabajo descubrir, aunque ciertamente nos halague, asociará cierto grado de desgaste y tristeza.

Birkhoff aclara que su teoría carece de toda matemática excepto la simple enumeración y que su trabajo es un mero ensayo. En su trabajo desarrolla las bases psicológicas de su fórmula, la aplica a formas poligonales, a ornamentos y a vasos.

Para el caso de la medida estética de formas poligonales, Birkhoff considera la fórmula

$$M = \frac{O}{C} = \frac{V + E + R + HV - F}{C}$$

en donde V es la simetría vertical, E es el equilibrio, R es la simetría central, HV es la relación con una red horizontal-vertical, F es la forma no satisfactoria que incluye diversos factores y C es la complejidad. Cada variable asume valores dependiendo de varias condiciones, largas de enumerar en este artículo (véase [B2] pág.51-53).

También aplica su fórmula a los acordes diatónicos, armonía y melodía así como a la calidad musical en la poesía. En el caso musical, su teoría está basada en las relaciones de orden entre las notas y puesto que la apreciación de tales relaciones continuamente cambia y se desarrolla, no trata de formar una teoría definitiva de la medida estética que sea válida para el futuro o el pasado. Más bien, considera que el problema principal de la forma musical es el de que dado un conjunto de recursos musicales debemos determinar hasta qué grado las relaciones de orden entre las notas de una composición constituyen una base eficiente de disfrute musical. Para el caso de acordes diatónicos la complejidad C se deja a un lado, puesto que un simple acorde es un objeto unitario y los únicos ajustes automáticos son ajustes incipientes a un sólo conjunto de notas y así la medida estética de un acorde será igual a su orden. Luego

$$m = Cd + I + D$$

donde m es la medida estética de un sólo acorde tomado en una tonalidad mayor por ejemplo, Cd denota el valor del acorde y se refiere a ciertas características que no cambian cuando sus notas superiores se mueven arriba o abajo por octavas, I es el valor del intervalo y D es el valor de la nota dominante (véase [B2] pág.137-142).

En cuanto a la sucesión de acordes, Birkhoff propone la fórmula

$$M = m_1 + t + m_2$$

donde m_1 y m_2 denotan las medidas estéticas de los acordes y t la de la transición (véase [B2] pág.160-185).

También Birkhoff analiza el problema de la melodía y deja abierto el problema del ritmo. Su trabajo puede continuarse aún más y la utilización de la computadora sería de gran ayuda.

Su intención fue la de proveer procedimientos sistemáticos de análisis en simples dominios de la Estética. Concluye que hay una enorme diferencia entre el descubrimiento de un diamante y su tasación; aún más, entre la creación de una obra de arte y un análisis de los factores formales que entran en ella. Invitamos al lector que desee profundizar en estos interesantes aspectos a consultar las obras de Birkhoff enumeradas en la bibliorafía.

Números de Fibonacci y Bela Bartok.

En 1202 Leonardo de Pisa, cuyo sobrenombre era Fibonacci (en abreviación de filius Bonacci) escribió un libro llamado Liber Abacci (o libro sobre el ábaco). Sobrevive la segunda edición del año 1228. Contenía casi todo el conocimiento aritmético y algebraico de esa época y jugó un papel fundamental en el desarrollo de la matemática occidental, pues a través de él los europeos se familiarizaron con el sistema numérico indoarábigo. Contenía muchísimos ejemplos. Veamos uno de ellos, reformulado de la siguiente manera: suponga que los conejos no se reproducen durante su primer mes de vida, pero que a partir del segundo mes cada pareja de conejos produce un nuevo par. Suponga que ningún conejo muere. Si comenzamos con un par de conejos, ¿cuántas parejas de conejos hay a los doce meses y en general a los n meses? La sucesión de las parejas adultas es de la forma

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...$$

es decir, es una sucesión tal que

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ y } u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$

Para honrar al autor del problema, esta sucesión se llama *sucesión de Fibonacci* y sus términos *números de Fibonacci.* Si consideramos

$$b_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

como el cociente de crecimiento, obtendremos una sucesión, cuyo límite cuando $n \to \infty$ es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034...$ Este número, que lo denotaremos con la letra ϕ, juega un papel muy importante en la Geometría y en la Estética. Si dividimos un segmento de recta AB en un punto C tal que $AB : AC = AC : CB$ tal división se llama *sección o razón áurea (*Kepler la llamó *proporción divina).* Si $AB = x + 1$ y $AC = 1$ entonces $x^2 + x - 1 = 0$. Luego $x = .618034...$. Así, la parte mayor de cualquier longitud, dividida en razón áurea, es igual a la longitud total multiplicada por .618034....

Bela Bartok (1881-1945) alrededor de 1915 desarrolló un método para integrar todos los elementos de la música (escalas, estructuras de acordes con los motivos melódicos apropiados, proporciones de longitud, tanto de la obra en general como los de la exposición, desarrollo, reexposición, frases de conexión entre movimientos etc.) basado en la razón áurea. Es sorprendente que Bartok nunca escribiera o platicara de esto durante su vida. Ya los caldeos habían propuesto utilizar la razón áurea como principio estético 3000 años A.C., los griegos la utilizaron 2000 años después y fue reutilizada en el renacimiento pero nunca en la Música. Solamente se conoce un movimiento de un cuarteto de Haydn compuesto con longitud acorde a la sección áurea pero ésta es más una composición aislada que un principio o método de composición.

El círculo tonal de Bartok es el siguiente. Considérese el círculo de tonalidades vecinas o círculo de quintas dado de la siguiente forma: hágase una correspondencia biunívoca entre las notas *do, do#, re, re#, mi, ..., si* y los números 0, 1, 2, ...,11, en ese orden; luego considérese el grupo cíclico C_{12} generado por el 7 y ordénese este grupo en una circunferencia. Tomemos el *do* como la tónica T y asígnense las letras D , S y T sucesivamente a cada nota del círculo. D designará a la dominante y S a la subdominante. Así *la* será tónica con subdominante *re* y dominante *mi*, etc. Si unimos, mediante ejes, los puntos T, D y S, obtendremos los llamados ejes de las tónicas, de las dominantes y de las subdominantes. Deben de considerarse como una relación de tonalidades similar a la forma usual en la música de mayor-menor. En particular, existe una relación más adecuada entre los polos opuestos. Esta relación es el principio fundamental de la música de Bartok. Muchos ejemplos de su música siguen este principio. Este sistema es producto de una evolución armónica necesaria. Bartok resuelve el problema de la tonalidad y la equidistancia.

En cuanto a la Forma y la Armonía, Bartok utiliza el principio de la razón áurea. Por ejemplo, en el primer movimiento de la Sonata para dos pianos y percusiones, que consta de 443 compases, si se multiplica este número por .618... se obtiene el compás 274, el cual será el centro de gravedad del movimiento. Así la reexposición o recapitu-lación ocurre en el compás 274. Análogamente sucede con el primer movimiento de Contrastes, el cual consta de 93 compases, número que si se multiplica por .618... da el compás 57 justo donde comienza la reexposición. Hay muchos ejemplos más.

En cuanto al tratamiento armónico, en los compases 2 al 17 de la introducción de la Sonata para dos pianos y percusiones es donde se asientan los gérmenes de la obra. Los compases 2 al 5 de la primera parte están en la tónica *Fa♯-Do* con el motivo en posición fundamental, los compases 8-9 de la segunda están en la dominante *Sol-Re♭* también con el motivo en posición fundamental y la tercera parte, del compás 12 en adelante está en la subdominante *La♭-Re* con el motivo invertido. Hay 46 unidades de valor 1/8 y si se multiplica 46 por .618... se obtiene la unidad 28 que es en donde comienza el motivo invertido. El análisis puede continuarse, ver [L], y si se llama positiva a la porción larga y negativa a la porción corta puede decirse que existe una relación de simetría entre las partes positivas y negativas. Este proceso va acompañado con un incremento en la dinámica de pp a f ó ff en la sección positiva y la negativa va acompañada de una disminución de la intensidad sonora. Toda la obra puede dividirse en partes lenta-rápida+lenta-rápida en los movimientos. La sección áurea debe de aparecer al comienzo del segundo movimiento lo cual sucede si se considera el total de los 6432 octavos que al multiplicarlos por .618... da el octavo 3975 que es en el cual justamente comienza el segundo movimiento.

Si comparamos la sucesión de Fibonacci con la fuga (primer movimiento) de la Música para Cuerdas, Percusiones y Celesta observamos que los 89 compases del movimiento están divididos en secciones de 55 y 34 compases. Estas secciones se subdividen en secciones de 34 y 21 compases y 13 y 21 compases respectivamente. El clímax en fff ocurre en el compás 55 y en los extremos comienza y finaliza en pp. No es una casualidad que la exposición finaliza en el compás 21 y que los últimos 21 compases están divididos en secciones de 13 + 8 compases.

Bartok escribió que seguía a la naturaleza en la composición y que fue guiado indirectamente por fenómenos naturales para descubrir estas regularidades. Constantemente aumentaba su colección de plantas, insectos y especímenes minerales. El girasol era su planta favorita y se ponía muy feliz cuando encontraba piñas de abeto en su escritorio. Consideraba que la música folclórica también era un fenómeno de la naturaleza y que sus formaciones se desarrollaban tan espontáneamente como otros organismos vivientes: las flores, los animales, etc. Es por esto que su música le recuerda al oyente de escenas naturales.

Su uso de los acordes también está basado en los números de Fibonacci. Por ejemplo, en semitonos, 2 es una segunda mayor, 3 es una tercera menor, 5 es una cuarta, 8 es una sexta menor y 13 es una octava aumentada, etc. Para mayores detalles del análisis, ver [L]. Cuando Bartok utiliza acordes en un movimiento cromático, coloca la tercera menor sobre la cuarta justa de tal forma que el acorde adquiere la forma 8:5:3 y considerando una tercera menor, superponiéndole una cuarta seguida de otra tercera menor se obtiene su acorde característico mayor-menor.

Teoría Matemática de la Música.

Deseo mencionar brevísimamente uno de los más interesantes proyectos que actualmente se desarrollan en este campo. Me refiero a la Teoría Matemática de la Música [M] de G. Mazzola, la cual no es una versión moderna de los pensamientos esotéricos de Pitágoras. Está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria y utiliza conceptos como los de campos vectoriales y variedades. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico. Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Se observa que las estructuras musicales son estructuras globales pegadas con datos locales. Mazzola utiliza la selección de una cubierta como atlas, la cual es parte de su punto de vista en el sentido de Yoneda y Adorno. No se escribirá más aquí acerca de este tema. Este será motivo de un futuro artículo. Por el momento se invita al lector a ver [M].

Coda.

Y bien, ¿qué relación existe entre la Música y la Matemática? es decir, ¿qué conexión o correspondencia existe? Hemos visto cómo se han aplicado conceptos matemáticos (provenientes al fin y al cabo de la naturaleza, del pensamiento abstracto del Hombre, etc.) al entretenimiento con un juego de dados, a la Estética, a la Composición Musical y al Análisis Musical. Desde luego que la Acústica, la cual utiliza a la Matemática, es parte de la Física y de la Música.

Si en lugar de preguntarnos ¿qué relación existe entre la Música y la Matemática? nos preguntáramos ¿qué relación existe entre los matemáticos y los músicos? podríamos decir que algunos matemáticos adoran la Música, muchos con un enfoque similar a la medida estética de Birkhoff. A muchos matemáticos les agrada el orden mental, ven a la Música como si fueran matemáticas pero sin tener que lidiar con una lógica inflexible. Gustan más de Mozart que de Stockhausen, Schoenberg o Bartok. Sin embargo a muchos músicos no les agrada la Matemática, generalmente por que no la conocen. Hay otros músicos a quienes sí les agrada la Matemática (Mozart, Bartok, Ponce, entre otros).

La Matemática, a diferencia de la Música, no es para espectadores. Es un lenguaje que, o bien se habla, o bien no se entiende absolutamente nada. Entonces, vuelvo a preguntar ¿qué relación existe entre la Matemática y la Música? J.J. Sylvester escribe en 1864: "May not Music be described as the Mathematic of Sense, Mathematics as Music of the reason? The soul of each the same?" Ambas se crean, se recrean, podemos apreciarlas y disfrutarlas. Una ventaja o desventaja, según se quiera ver, es que para la Matemática no existe un instrumento musical donde tocarla, ésta se queda a nivel de partitura, podría decir, que va directamente de pensamiento a pensamiento.

Para quien escribe este artículo, la relación más notable, entre la Matemática y la Música es, que ambas son "Bellas Artes". Poseen características similares. Así, para el autor, la Matemática es una más de las "Bellas Artes", la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa de las Ciencias.

Bibliografía y Referencias

Birkhoff, G.D. A Mathematical Theory of Aesthetics. Rice Institute Pamphlet. Vol. 19. (1932).

[B2] Birkhoff, G.D. Medida Estética. Universidad Nacional del Litoral, Rosario, Argentina. (1945).

Birkhoff. G.D. Quelques Eléments Mathématics de L'art. Atti Congr. Intern. d. Matem., Bologna. Vol.1. p. 315-333. (1929).

[L] Lendvai, E. Bela Bartok: An analysis of his music, Kahn & Averill, London. (1979).

Mazzola, G. Gruppen und Kategorien in der Musik: Entwurf einer mathematischen Musiktheorie. R&E. 10. Heldermann Verlag Berlin. (1985).

[M] Mazzola, G. Mathematical Music Theory- An Informal Survey. Note di matematica e fisica. CEFRIM, Anno 7., Vol.7, Locarno.(1994).