Miscelnea Matemtica **35** (2002) 41–48 SMM

Eudoxo, Arquímedes y el límite de una sucesión

Roberto Torres Hernández
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Querétaro
robert@sunserver.uaq.mx

1. Introducción.

Una de las principales características del calculo diferencial e integral es el uso y manejo de procesos infinitos y es también una diferencia notable con respecto a las matemáticas previas (álgebra, geometría, etc.) que se estudian hasta el bachillerato.

Entre estos procesos infinitos, el concepto de límite de una sucesión es fundamental para (entre otras cosas) la formalización de la idea de integral.

Es interesante notar que desde tiempos remotos fue motivo de preocupación entre los matemáticos, el trabajar con una sucesión de números (positivos) cuya diferencia con cero sea tan pequeña como se quiera. También es importante señalar que en este estudio antiguo del límite confluyen conocimientos de aritmética, álgebra y geometría, eslabonando así diversos aspectos de la Matemática elemental sobre un problema común.

2. Eudoxo, Euclides y Arquímedes.

En la famosa obra de Euclides *Los Elementos* (300 A.C.), aparece una definición atribuida a Eudoxo (quien vivió alrededor del año 370 A.C.) y que será punto de partida para nuestro trabajo:

Definición 4 (Libro V): Dos magnitudes tienen razón entre sí, cuando cada una puede ser multiplicada en modo de superar a la otra.

Arquímedes de Siracusa (287-212 A.C.), casi cien años después, interpretó y usó esta definición de la siguiente manera:

Dados dos números positivos a y b, existen números naturales n y m tales que $na > b$ y $mb > a$.

Por esta razón, a esta forma se le llama *Axioma de Arquímedes* o *Axioma de Eudoxo-Arquímedes.*

Un poco mas adelante, en los mismos *Elementos*, encontramos:

Proposición 1 (Libro X): Dadas dos magnitudes distintas, si de la mayor se sustrae una magnitud mayor que su mitad, del resto se sustrae una magnitud mayor que su mitad (del resto) y si este proceso se repite continuamente, quedará alguna magnitud más pequeña que la menor de las magnitudes dadas inicialmente.

Interpretando esta situación en términos algebraicos, podemos decir que si M_0 y ε son las magnitudes (positivas) dadas, con M_0 mayor, y tenemos una sucesión de magnitudes M_1, M_2, M_3,... tales que

$$M_1 < \frac{M_0}{2}, M_2 < \frac{M_1}{2}, M_3 < \frac{M_2}{2}, \ldots$$

entonces $M_n < \varepsilon$ para algún número natural n.

En este momento cabe destacar que esta proposición (en términos modernos) dá una condición suficiente (que no necesaria) para que una sucesión de números positivos tienda a cero.

Es interesante observar como esta afirmación puede demostrarse usando el Axioma de Arquímedes:

Dados M_0 y ε, por el axioma de Arquímedes existe un número natural N tal que $N\varepsilon > M_0$. Ahora, por hipótesis, M_0 es mayor, por lo que se debe de tener que $N \geq 2$ y multiplicando esta desigualdad por $\frac{\varepsilon}{2}$ se tiene $\varepsilon \leq \frac{N}{2}\varepsilon$ o equivalentemente $N\varepsilon - 2\varepsilon \geq 0$. Sumando $N\varepsilon$ a ambos lados obtenemos $2N\varepsilon - 2\varepsilon \geq N\varepsilon$. Por hipótesis, sabemos que $M_0 < N\varepsilon$, de donde se obtiene, sustituyendo

$$2N\varepsilon - 2\varepsilon = 2(N-1)\varepsilon \geq N\varepsilon > M_0\,.$$

Despejando, obtenemos finalmente

$$(N-1)\varepsilon > \frac{1}{2}M_0 > M_1\,.$$

Repitiendo el argumento con la desigualdad $(N-1)\varepsilon > M_1$ como base, se llega a que $(N-2)\varepsilon > M_2$, por lo que después de $N-1$ pasos, llegaremos a que $\varepsilon > M_N$ que es lo que se quería probar.

3. Dos aplicaciones geométricas.

Como aplicaciones de este resultado, mostraremos dos bellos teoremas que ilustran como se enlazan aspectos elementales de álgebra y geometría sobre el problema del infinito.

Teorema. *Dado un círculo C y $\varepsilon > 0$, existe un polígono regular inscrito P tal que $a(C)-a(P) < \varepsilon$, donde $a(X)$ denota el área de la figura X.*

Demostracin: Consideremos los polígonos regulares P_i inscritos en C con 2^{2+i} lados y sea $M_i = a(C) - a(P_i)$ la diferencia entre las áreas del círculo y cada uno de los polígonos. Observemos que el teorema quedará demostrado si logramos probar que $M_n < \varepsilon$ para algún número natural n.

Para esto, lo que demostraremos es que

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2}M_n$$

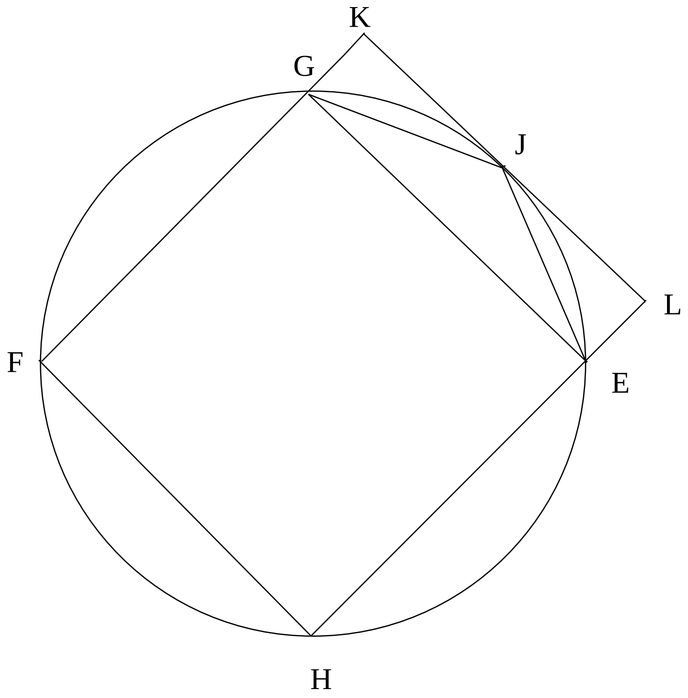
pues si esta desigualdad es cierta, reacomodando términos, tenemos que

$$M_n - \frac{1}{2}M_n > M_{n+1} \text{ es decir, } \frac{1}{2}M_n > M_{n+1}$$

con lo cual tenemos la hipótesis de la proposición pasada y cuya conclusión es precisamente que $M_n < \varepsilon$ para algún número natural n.

Dado que la prueba es esencialmente la misma para cada i, trabajaremos sólo el caso $n = 0$.

Considerese entonces la siguiente figura:



Deseamos demostrar que

$$M_0 - M_1 > \frac{1}{2} M_0 \,.$$

Observemos primero que

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= [a(C) - a(P_0)] - [a(C) - a(P_1)] \\ &= a(P_1) - a(P_0) \end{aligned}$$

donde P_0 es el cuadrado $GFHE$ y P_1 es el octágono que se consigue al bisectar cada uno de los lados de P_0. En la figura sólo se ilustra el vértice J de tal octágono. Además, se ha completado el triángulo JGE al rectángulo $KGEL$ que claramente tiene el doble de su área, así:

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= a(P_1) - a(P_0) \\ &= 4 \cdot a(JGE) \\ &= 2 \cdot a(KGEL)\,. \end{aligned}$$

Pero el área del rectángulo $KGEL$ es mayor que el área del segmento circular GEJ (denotado por $\widehat{GEJ}$) de donde

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= 2 \cdot a(KGEL) \\ &> 2 \cdot a(\widehat{GEJ}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a(\widehat{GEJ}) \end{aligned}$$

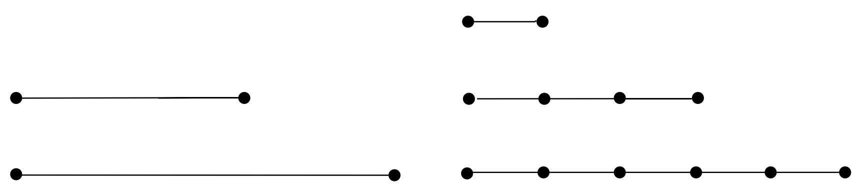
Pero los cuatro segmentos circulares $\widehat{GEJ}$ son iguales a la diferencia entre el círculo y el cuadrado P_0 por lo que

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &> \frac{1}{2}\left[a(C) - a(P_0)\right] \\ &= \frac{1}{2} M_0 \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. $\square$

Para nuestra siguiente aplicación, necesitamos la siguiente

Definición. Dos segmentos de recta son *conmensurables* si existe una unidad (tercer segmento) que quepa un número entero n de veces en el primer segmento y un número entero m de veces en el segundo.



Dados los dos segmento en la parte izquierda de la figura anterior, podemos ver que el segmento mas pequeño en la parte derecha cabe tres veces en el primero y cinco veces en el segundo. De esta forma decimos que dichos segmentos son conmensurables.

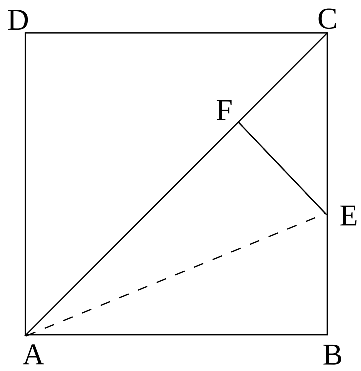
Notemos en este momento que para afirmar que dos segmentos no son conmensurables (y que a partir de aqui les llamaremos *inconmensurables*) debemos estar seguros que ninguna unidad mide un número entero de veces a dichos segmentos.

Un ejemplo de la situación anterior se dá al considerar el lado de un cuadrado y la diagonal.

El argumento para observar que es imposible la existencia de un segmento unidad que pueda caber un número entero de veces en el lado y la diagonal involucra un proceso infinito en el que interviene nuevamente nuestra proposición.

Teorema. *El lado y la diagonal de un cuadrado cualquiera son segmentos inconmensurables.*

Demostracin: Supongamos que existe una unidad U que cabe un número entero de veces en el lado del cuadrado $ABCD$ y otro número entero de veces en la diagonal AC. A partir de aqui, diremos simplemente que la unidad *mide* al lado y *mide* a la diagonal. De ser así, considerese el siguiente esquema:



Dado el lado AB y la diagonal AC, construyase el punto F sobre AC tal que $AF = AB$. Sea E el punto en CB tal que EF es perpendicular a AC. Observemos ahora que los triángulos EFA y EBA son congruentes, por ser ambos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa (AE) y un cateto igual ($AF = AB$). Esto nos dice que $EF = EB$.

Claramente, $\measuredangle ECF = 45°$ por ser AC la diagonal de un cuadrado y como el ángulo en F es recto y la suma de los ángulos interiores del triángulo CFE debe de ser 180°, se tiene que $\measuredangle FEC = 45°$. Todo esto dice que el triángulo CFE es isósceles y por lo tanto $CF = EF$.

En conclusión, $CF = EB$.

Ahora, como la unidad (que está fija) mide a AC y a $AF = AB$, debe de suceder que mide tambien a la resta de estos segmentos, es decir, mide a $AC - AF = CF$.

Analogamente, como la unidad mide a BC (lado del cuadrado) y a $CF = EB$, mide tambien a la resta $BC - EB = EC$.

Resumiendo, tenemos que la unidad mide a CF y a EC.

Pero si observamos nuestra situación, tenemos que EC es la diagonal del cuadrado con lados EF y CF, que es un cuadrado más pequeño que el original y al que también mide la unidad con la que empezamos.

Si llamamos M_0 a la longitud de BC que es el lado de nuestro cuadrado original y M_1 a la longitud de CF, el lado del cuadrado pequeño, afirmamos que $M_1 < \frac{1}{2}M_0$.

Para ver esto observemos que $CE > CF$, ya que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre el mayor de sus lados. Como ya probamos que $CF = EB$, es claro entonces que

$$\begin{aligned} M_0 &= EB + CE \\ &= M_1 + CE \\ &> M_1 + M_1 . \end{aligned}$$

Esto demuestra que $M_1 < \frac{1}{2}M_0$.

Repitiendo todo el argumento anterior sobre este nuevo cuadrado llegaremos a un tercer cuadrado (mucho más chico) y al que nuestra unidad deberá medir su lado, al que llamaremos M_2 y su diagonal. Por las mismas razones, se tiene que

$$M_2 < \frac{1}{2}M_1$$

Luego, tenemos una sucesión de magnitudes M_0, M_1, M_2, ...tales que $M_{i+1} < \frac{1}{2}M_i$ de donde por nuestra proposición, se tiene que existe algún M_n que será menor que la unidad U elegida al inicio. Pero la unidad U deberá medir a M_n lo cual es absurdo y el Teorema queda probado. $\square$

4. A manera de epílogo.

Una de las líneas de investigación en didáctica de las matemáticas con mayor futuro (en mi opinión) es la de involucrar la historia de la matemática en su enseñanza. Con respecto al presente trabajo, me gustaría señalar lo siguiente:

- Ilustra de una manera geométrica, los primeros inicios en la lucha por llegar a la definición actual de límite de una sucesión.

- Por supuesto, algunas sucesiones (como $a_n = \frac{1}{n}$) tienden a cero sin cumplir las hipotesis de nuestra proposición, lo cual evidencia que las condiciones de esta son suficientes pero no necesarias. Esto, lejos de ser un defecto, es una virtud para la enseñanza, pues con ello se motiva la búsqueda de una definición suficientemente general con la misma idea en el fondo de lo que se maneja en este artículo.

Es indudable que la historia de la matemática es un instrumento invaluable en la enseñanza de las matemáticas.

Referencias

[1] C. H. Edwards, Jr. *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag. 1979.

[2] Euclides. *The Thirteen Books of The Elements.* Vol. 1 y 3. Dover. 1956.

[3] O. Toeplitz, y H. Rademacher, *Números y figuras.* Alianza Editorial. 1981.