Miscelánea Matemática **58** (2014) 1–29 SMM

Henri Poincaré: La imagen de un titán

J. Rafael Martínez E.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
enriquez@unam.mx

And this grey spirit, yearning in desire
To follow knowledge like a sinking star
Beyond the utmost bound of human thought.
Alfred, Lord Tennyson, "Ulysses"

1. Introducción

El 17 de julio de 1912, cuando aún se recuperaba de una reciente cirugía, fallece Henri Poincaré. Conforme se extendía la noticia parecía que la élite cultural de toda Francia quedaba sumida en el pasmo. La estatura intelectual de Poincaré, y lo que ésta le confería a su país, explicaba la reacción ante la idea de ya no contar con su presencia.

Así captó el suceso una nota aparecida en un diario parisino: «Hay cosas difíciles de apreciar con justicia cuando se está demasiado próximo a ellas. No se da uno cuenta de la altura de la torre Eiffel mientras camina alrededor de su base. Hace falta tomar distancia, verla dominar el paisaje parisino, perder la cima entre la bruma para darse cuenta de que verdaderamente supera, por mucho, todo lo que la rodea. Igual sucede con la obra de Henri Poincaré. Estamos todavía demasiado cercanos al gran sabio para poder medir su altura. Sin embargo, y a pesar de ello, podemos darnos cuenta de algunas características generales de su colosal obra.»[**3**]

A nadie sorprendió que, ante su inesperada muerte, la academia y la prensa francesa se mostraran particularmente pródigas en elogios hacia la figura de Henri Poincaré, tenido ya como el más grande sabio de su época. Un «titán modesto», «el poeta del infinito», fueron algunos de los títulos con los que se buscaba transmitir la grandeza del personaje.

Una biografía formal de Poincaré podría parecer un catálogo de excesos, una oda a su inteligencia y su visión de los derroteros que se abrían para la ciencia, de premios, distinciones, homenajes y un listado de alocuciones celebratorias de su vida y su obra. Entre todo ello, y sus inevitables viajes que tanto disfrutaba, se pregunta uno, ¿cómo es que encontró los espacios para escribir los más de 500 artículos y treinta libros que conforman su producción escrita, tratados que abarcaban desde las matemáticas aplicadas, las puras —si es que hay algo que las distingue—, la lógica, la física y los fundamentos de la ciencia? Sin duda, la suya fue la obra de un titán cuasi mitológico.

2. Conocer al hombre

Podría uno especular sobre si la delicada constitución física de Poincaré, y su falta de habilidades corporales, le hayan inclinado desde su infancia hacia las actividades intelectuales y no tanto a fortalecer su cuerpo. No sorprende leer que «Poincaré mide 1 m. 65 cm. de estatura, pesa 70 kilogramos, un tanto encorvado y con un estómago sobresaliente, con rostro agradable y buen aspecto, nariz grande y rojiza, cabello castaño y mostacho rubio». Así describía el Dr. Toulouse[1] la apariencia física de Henri Poincaré cuando el ya reconocido genio francés contaba con 45 años de edad, y para entonces había recibido todos los premios y honores que su patria natal y las sociedades científicas y universidades más prestigiadas, tanto europeas como norteamericanas, solían conceder.

Antes, desde su niñez, era considerado un genio, una especie de «monstruo de las matemáticas» —como lo describiera uno de sus instructores— y en cuanto a su físico, que «era ambidiestro y corto de vista: durante su niñez sufría de una coordinación muscular deficiente, habiendo pasado por una larga temporada afectado por la difteria. Recibió una educación esmerada de parte de su madre y destacó por la calidad de sus composiciones a lo largo de su paso por los primeros niveles educativos. . . »[2]

[1] Dr. Tolouse (1910), *Henri Poincaré*. París: Flammarion.

[2] Citas tomadas de Krantz (2006), *An Episodic History. . .*, p. 356. Que Poincaré era ambidiestro es un hecho expresado por él mismo en sus respuestas a los exhaustivos interrogatorios a los que se vio sometido por el Dr. Édouard Toulouse, director del laboratorio de Psicología Experimental de la École des Hautes Études de París e interesado en estudios médicos y psicológicos de gente excepcional. Según esto Poincaré era declaradamente ambidiestro “hasta aproximadamente los 8 años de edad, y le costó trabajo, durante mucho tiempo, distinguir entre izquierda y derecha” (Toulouse, *op.cit.*, p. 57). También se cuenta con el testimonio de algunos

En cuanto a su carácter el mismo Dr. Toulouse lo calificaba como una persona afable, con apariencia distraída, aún cuando conversaba con alguien y parecía no prestar mucha atención a lo que se le decía, y sin embargo siempre respondía como si hubiera pensado larga y concienzudamente su respuesta. Un tanto falto de pasión para discutir sus ideas, a lo que se añadía un aire de timidez, le conducía a evitar dirigirse a un público no especializado en temas científicos sin antes haber preparado su presentación, no así cuando de temas científicos se trataba, pues entonces le bastaba con llevar algunas notas y frases a las que no siempre prestaba mucha atención al momento de expresar sus ideas y resultados.

Así era este hombre, un paseante más para quien, desconociendo su identidad, lo viera atravesar un jardín parisino. Y sin embargo, para sus alumnos, sus colaboradores y quienes estuvieran al tanto de lo que ocurría en el mundo de la ciencia y de aquellas porciones de la cultura que rozaran lo relativo a las corrientes vanguardistas del pensamiento científico, la sola mención de la figura de Poincaré convocaba imágenes de un... «genio equiparable al de Gauss,... y que dominaba todas las (disciplinas) matemáticas de su tiempo», como lo describiera Jean Dieudonné [**10**, pp. 51–52.], el gran matemático de mediados del siglo XX y uno de los espíritus más críticos en cuanto a reconocer méritos académicos en sus contemporáneos. En efecto, equiparable en importancia, y posiblemente superior en amplitud, la riqueza del quehacer matemático de Poincaré era comparada con la de L. Euler, F. Gauss y D. Hilbert, todos ellos con raíces profundas en el mundo de las matemáticas pero con incursiones sobresalientes en problemas de vanguardia de la física de su tiempo. Aún así, sus contribuciones a la matemática eclipsaron durante su vida las aportaciones que hizo a la física, tanto que Émile Picard[3], refiriéndose a Poincaré, lo describió no solo «como un gran matemático, sino como la matemática misma». Y sin embargo, para 1912, el año de su muerte, Poincaré era quien más

---

que lo conocieron y tuvieron un trato estrecho con él, como es el caso de Tobias Dantzig (*Henri Poincaré. Critic of Crisis* (1968), p. 2). Ver también los comentarios al respecto de Jeremy Gray, cuya biografía de Poincaré no había sido puesta en circulación al momento de escribir este texto (Gray, *Henri Poincaré, A Scientific Biography*, 2013, pp. 23–26).

[3]Que Euler y Gauss hicieron aportaciones notables a la física-matemática es algo muy conocido. No tanto lo es que Picard, quien se distinguió por sus contribuciones a la variable compleja y a la teoría de las funciones analíticas, también aportó resultados teóricos a la teoría de la electricidad y a la elasticidad, así como por ser autor de uno de los primeros libros de texto sobre la teoría de la relatividad. De igual manera, no es un hecho tan conocido que Hilbert haya contribuido a la formalización de la mecánica cuántica.

menciones había recibido como candidato para obtener el Premio Nobel de Física. Nunca lo obtuvo, posiblemente porque quienes en su época formaban parte del Comité Nobel no estaban compenetrados con los resultados que estaban por revolucionar el mundo de la física. El mismo A. Einstein recibió el premio Nobel solo hasta 1921, y no por su teoría de la relatividad —campo en el que, para muchos, Poincaré se adelantó a Einstein— sino, en particular, «por su... descubrimiento del efecto fotoeléctrico».

Este esbozo biográfico, si bien encuentra sitio en una revista dedicada a las matemáticas, no se ocupará de desglosar ni en amplitud ni en detalle las dimensiones de sus aportaciones al ámbito matemático debido a que en estas mismas páginas, en este año en que se recuerda la inmensa figura de Poincaré por conmemorarse el centenario de su fallecimiento, aparecerán varios artículos dedicados a explorar sus contribuciones a las matemáticas. En función de ello solo se mencionarán, tangencialmente, algunas de sus aportaciones a esta rama del conocimiento, dejando de lado las aportaciones que, en opinión de muchos, lo hacen el padre de la topología, nacida en el seno de su *Analysis Situs*[4], y en especial de la topología algebraica. Tampoco se toca la famosa 'conjetura de Poincaré'[5], resuelta para el caso $n = 3$ por Grigori Perelman solo hasta el 2002–2003[6].

Quedan también fuera de este ensayo sus trabajos sobre funciones automorfas, el hecho de que la bifurcación de Hopf, con toda justicia, debería llamarse bifurcación de Poincaré–Andronov–Hopf [**37**, pp. 173–174], ecuaciones diferenciales parciales y sistemas dinámicos, estabilidad del sistema planetario, etc[7]. De igual manera no ha sido posible

[4] El grupo de artículos que en su conjunto le hacen merecedor de la paternidad de la 'topología' o *Analysis Situs* aparecieron entre 1892 y 1905. Todos ellos fueron recogidos y publicados otra vez en un libro monográfico en 2010, bajo el título *Papers on topology, Analysis Situs and its five supplements*. El término *Analysis Situs* aparece con Leibniz para referirse a lo que es común a las estructuras geométricas que uno puede imaginar.

[5] En los suplementos al *Analysis situs* aparecen varias versiones de la llamada *conjetura de Poincaré*. Al final del quinto suplemento (1904) presenta la versión definitiva, señalando que es un problema abierto que requiere una respuesta. Tal y como la plantea dice así: «Consideremos ahora una variedad tridimensional V ... ¿es posible que el grupo fundamental de V pueda ser reducido a la sustitución idéntica y que sin embargo V no sea simplemente conexa?». Véase [**33**, p. 272]

[6] La historia de los esfuerzos que culminan en el trabajo de Grigori Perelman ha sido narrada, de manera excelente, en los libros de O'Shea (2007), *The Poincaré Conjecture...*, de Szpiro (2007), La conjecture de Poincaré y de Gessen (2009), *Perfect Rigor: A Genius...*

[7] La Academia de Ciencias comenzó a publicar en 1916 lo que sería una colección de 12 volúmenes donde recoge las artículos publicados por Poincaré bajo sus

incluir sus más que interesantes polémicas con Hilbert y otros temas sobre cuestiones un tanto filosóficas, que van desde los fundamentos de la geometría y cuestiones sobre el intuicionismo, el logicismo y el 'convencionalismo', esta última considerada una corriente generada por el mismo Poincaré[8]. A cambio de ello se cuenta con más espacio para su biografía —que es el propósito de este ensayo— y sus contribuciones a otras ramas del saber, en especial la física y ese universo un tanto ambiguo, sin fronteras definidas, de la física matemática.

3. Elementos biográficos

Henri Poincaré nace en Nancy, el 29 abril de 1854. Su padre, Léon, y su tío Antoni, venían de la región de Neufchâteau dans les Vosges, y ambos fueron profesionistas exitosos, el primero como médico y el segundo como Inspector General de Puentes y Carreteras. Este último tuvo a su vez dos hijos: Lucien Poincaré, que eventualmente ocupó el cargo de Director de la Enseñanza Secundaria en el Ministerio de Instrucción Pública y de las Bellas Artes, y Raymond Poincaré, que llegaría a ser Presidente de la República Francesa de 1913 a 1920. Su madre dedicó una gran parte de su tiempo a la educación de sus hijos, quienes además aprovecharon el entorno familiar, plagado de amistades dedicadas a la ciencia y las artes, y algunas vinculadas con las universidades y la Escuela Politécnica. Con todo, su infancia no fue tan feliz como uno podría creer: como ya se mencionó, a la edad de 5 años sufrió una difteria que le dejó secuelas durante un largo tiempo, tanto físicas —nueve meses con la laringe inflamada, lo cual le impedía hablar adecuadamente— como de comportamiento, ya que se volvió un niño tímido que no se atrevía a bajar solo las escaleras de su casa y rehuía la compañía de los jóvenes de su edad, dada la brusquedad de sus juegos. Esto le llevó a sumergirse en la lectura, de donde surgió la primera percepción, por parte de sus padres, de que era un niño con una inteligencia excepcional: nunca leía dos veces un libro dado que todo quedaba grabado en su memoria, página a página, una línea tras otra. Este don lo conservó a lo largo de su vida y era notorio que mantenía un registro mental de todos los eventos que ocurrían en su entorno.

Su primera pasión fue la historia natural, provocada por su lectura, cuando contaba con 6 o 7 años de edad, de La Tierra antes del diluvio, de Louis Figuier, y a ella le siguieron muchas más del mismo autor y de

auspicios. Ver bibliografía.

[8]Véase [**37**, pp. 81–90] y [**19**].

otros recomendados por su maestro particular, M. Hinzelin. En 1862 ingresa al Liceo, con una madre que albergaba grandes dudas sobre qué tanto había aprendido su hijo en casa y, por ende, qué tan atrasado estaba respecto de sus compañeros que habían seguido la ruta usual de ingreso a la escuela. Las dudas se resolvieron cuando Henri obtuvo la mejor nota de toda la clase en su primer ensayo, y continuó repitiendo este resultado en todas las demás asignaturas. A la edad de 15 años ya sabía que su pasión eran las matemáticas, aunque esto no excluyó que en 1871 se graduara del bachillerato tanto en estudios clásicos como en ciencias. A partir de entonces empieza a mostrar sus aptitudes excepcionales para las matemáticas, obteniendo en 1872 el primer lugar en el concurso nacional de 'Matemáticas elementales', en el que competían todos los liceos del país. Su participación en este concurso no obedecía a ningún deseo de ostentación por parte del joven Poincaré, lo hacía solo para complacer a su maestro de matemáticas. Al año siguiente se inscribe en el curso de 'Matemáticas especiales', donde conocerá a su amigo de toda la vida, Paul Appell[9], y en cuyos concursos anuales también obtuvo el primer lugar, tanto en el de París como en el que incluía a los demás departamentos del territorio francés.

En el verano de 1873, tanto Poincaré como su amigo Appell se presentaron al concurso para ingresar a la Escuela Normal, una de las dos instituciones de élite del país, la otra siendo la Escuela Politécnica. Ambos fueron aceptados en la primera, con Appell ocupando el segundo lugar de entre todos los aspirantes mientras que Poincaré ocupó solo el quinto. Sin embargo, mientras su amigo se inscribió en la Normal, el joven Henry siguió el consejo de un tío y se decidió por la Politécnica, en donde llegaría a ser una de sus luminarias más deslumbrantes.

Nos ha llegado una descripción —debida a Appell— de su paso por la Escuela Politécnica y que se ha convertido en un ícono de la personalidad y forma de trabajar de Poincaré:

> ... Poincaré no tomaba notas y escuchaba (al maestro) con los brazos cruzados y no estudiaba las notas (redactadas por el profesor); sin embargo, sus preguntas lo colocaban en el primer sitio (de aprovechamiento). En algunas ocasiones, durante el recreo, se paseaba por los patios de la escuela,

[9]Paul Appell (1855–1930), autor de varios tratados de matemáticas y de física, fue miembro de la Academia de Ciencias Francesa, Decano de la Facultad de Ciencias de la Universidad de París (1903–1929) y Rector de esta última de 1920 a 1925. La serie de Appell, que es una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss, es llamada así en su honor. Formuló una presentación alternativa de la mecánica analítica basada en la ecuación de movimiento de Appell.

> del brazo de dos de sus camaradas, sin participar en las conversaciones entre éstos,... en otras ocasiones se paseaba en solitario, haciendo girar sobre su dedo de la mano derecha el aro con las llaves que portaba consigo,... así era como que paseándose, fuera en las salas de estudio o en los pasillos, que él repasaba las lecciones escuchadas y los artículos leídos...

Con maestros de la talla de Charles Hermite[10] y Edmond Laguerre[11], el talento matemático de Poincaré pronto dio sus primeros frutos, y aún antes de graduarse de la Escuela Politécnica, a los 20 años, logró publicar su primer artículo. En 1874 se graduó como segundo de su generación en cuanto a notas, debido en gran medida a una mala calificación en estereotomía, causada por una dificultad personal para dibujar o trazar diagramas, por sencillos que éstos fuesen. En 1875 ingresó a la Escuela de Minas y se graduó tres años más tarde, siendo clasificado como el tercero en su clase. Pero al mismo tiempo que se preparaba para ser un buen ingeniero, Poincaré seguía sumergiéndose en el mundo de las matemáticas, y en 1876 obtuvo su licenciatura en ciencias matemáticas, a raíz de lo cual publicó una *Mémoire sur les propiétés des fonctions définies par des équations différentielles*, la cual apareció en 1878 en el *Journal de l'École Polytechnique.*

Con mucha audacia, y seguramente basado en una plena conciencia de sus capacidades intelectuales, desde sus inicios como navegante en los vastos océanos que ofrecían las nuevas vertientes matemáticas de fines del siglo XIX, Poincaré apuntó hacia las problemáticas más difíciles del momento, las más elevadas y generales, y esto le llevaría a abordar problemas que desbordaban el círculo de las matemáticas puras y penetraban tanto en el ámbito de los problemas de la mecánica analítica como los que eventualmente le llevarían de la electrodinámica a la futura teoría de la relatividad. Ello explica que cuando en 1878 presentó su

[10]Charles Hermite (1822–1901), matemático polifacético, incursionó en la teoría de números y en álgebra, estudió polinomios ortogonales, funciones elípticas y en su honor se bautizaron varios elementos matemáticos, como lo polinomios de Hermite, los operadores de Hermite, la interpolación de Hermite, etc. Fue quien primero demostró que e, la base de los logaritmos naturales, es un número trascendente, e inspirado en sus métodos Ferdinand von Lindeman demostró que π también es un número trascendente. Profesor en la Escuela Normal Superior y de la Politécnica, a los 70 años de edad fue nombrado miembro de la Legión de Honor de Francia.

[11]Edmond Laguerre (1834–1886) tuvo como áreas de interés la geometría y el análisis complejo, pero su fama se justifica por los polinomios que llevan su nombre y que son soluciones de una ecuación que aparece en la mecánica cuántica, en la parte radial de la solución de la ecuación de Schrödinger para un átomo con un solo electrón.

defensa de la tesis de doctorado que le confería la Universidad de París, el tema era una cuestión con un alto grado de dificultad: la integración de ecuaciones con derivadas parciales con un número cualquiera de variables independientes.

Ya doctorado y por unos cuantos meses, Poincaré ejerció su profesión de Ingeniero de Minas, y lo hizo con tanta devoción como más tarde lo haría con las matemáticas. Con una sangre fría que impresionó a sus colegas, y desafiando el peligro que entrañaba, en una ocasión descendió al pozo de una mina para establecer el procedimiento que se debía seguir para las labores de rescate de una sección donde los gases habían provocado una explosión que costó la vida de 16 mineros. Sin embargo, a 6 meses de haberse doctorado, su vocación le llevó a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Caen para hacerse cargo del curso de *Análisis matemático*. Por esos mismos días sus amigos Paul Appell y Emile Picard ocupaban, respectivamente, las cátedras de *Mecánica racional* en la Universidad de Dijon y de la de *Cálculo infinitesimal* en la de Toulouse. Pero la suerte actuaba en su favor, y a los pocos meses los tres brillantes matemáticos se volvían a reunir, pero ahora todos en la Facultad de Ciencias en París. Para el año escolar 1881–1882, Poincaré ya ostentaba el puesto de Maestro de Conferencias de Análisis, cuatro años más tarde se ocupaba del Curso de *Mecánica física y experimental*, y en 1886 sustituía a Gabriel Lippmann[12] —quien se iba a la Sorbona— en la cátedra de *Física matemática y cálculo de probabilidades*.

Con este nuevo encargo su atención se dirigió hacia problemas relacionados con la mecánica analítica celeste y la mecánica celeste, a las cuales aportaría, con el tiempo, resultados impresionantes. Esto no significó, sin embargo, que dejara de lado sus intereses en la teoría de números y la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. Sobre este último tópico fue que había realizado lo que muchos consideraron fueron sus trabajos con mayor impacto hasta esa etapa de su vida, cuando aún no alcanzaba los 27 años de edad, y que giraron en torno del tipo de funciones que él llamó fuchsianas a unas y kleinianas a las otras. Las condiciones bajo las que esto sucedió han sido recogidas por la historia no solo por el mero hecho de que registran los eventos que dieron pie a una serie de descubrimientos matemáticos de primera importancia, sino

[12]Gabriel Lippmann (1845–1921). Físico en sus orígenes, mostró un gran interés en la solución de problemas de índole práctica, fuera en el campo de la electricidad, la óptica, la termodinámica o la fotoquímica. Miembro de la Academia de Ciencias, de la Royal Society de Londres, en 1908 obtuvo el Premio Nobel de Física por su método basado en la interferencia de la luz, para reproducir con una alta calidad los colores que se plasmarían en papel fotográfico.

por lo que además nos revelan respecto de los procesos de generación de ideas de un matemático —un científico— en acción, y por el valor que a estos relatos le dieron los psicólogos y quienes se han ocupado de analizar los procesos cognitivos en sus formas más sofisticadas. Vale la pena recordar algunas de las anécdotas más reveladoras de cómo se fueron gestando en su mente ciertas ideas, entre ellas las que describe en su libro de corte filosófico *Science et Méthode* (1908). Pero como antecedente tomemos el relato que Appell recogió de otro colega, Léon Lecornu[13], sobre una cena de fin de año que tuvo lugar en 1879:

> . . . Poincaré, como nunca antes, parecía estar siempre distraído, . . . (y en esa noche, cenando con la familia de Lecornu) se mostraba ausente, no escuchaba lo que se le decía y respondía apenas a lo que se le comentaba, y habiendo pasado la medianoche hube de recordarle con suavidad que ya estábamos en 1880. En ese momento pareció regresar a la Tierra y concedernos su atención. Algunas horas más tarde, al encontrarlo en las calles de Caen, me dijo, sin mucho énfasis, 'ya sé cómo integrar todas las ecuaciones diferenciales'. Esto marcaba el nacimiento de las ecuaciones fuchsianas, y me dí cuenta entonces de lo que ocupaba su ensoñación durante el paso de 1879 a 1880 . . .

Y relacionado con lo anterior no se puede olvidar la famosa anécdota sobre cómo su mente hizo, de manera totalmente inconsciente para él[14], los enlaces necesarios para llevarle a intuir la existencia de ciertas funciones que, a partir de la serie hipergeométrica, generalizaban a las funciones trigonométricas (periódicas) y a las funciones elípticas (doblemente periódicas), y a las que hoy se conoce como *funciones automorfas*, y que en el lenguaje actual se dice que «retoman sus valores bajo la acción de un grupo discreto de sustituciones homográficas. La correspondiente teselación del plano complejo, hecha por rectángulos para funciones elípticas, es remplazada por figuras curvilíneas acotadas por curvas que Poincaré identificó con las líneas rectas en un nuevo modelo de la geometría de Lobatchevsky»[**17**, p. 1038]. Estos resultados los

[13]Léon Lecornu (1854–1940). Distinguido matemático francés que en 1900 recibió el Premio Poncelet por sus contribuciones a las matemáticas aplicadas. También ocupó el cargo de Presidente de la Sociedad Matemática Francesa en 1899.

[14]Esta anécdota la relata en la sección III del capítulo I de *Science et méthode* (1908). Esta sección, en inglés, aparece titulada, según la edición que se tenga a la mano, como *Mathematical Creation* o como *Mathematical Discovery*, y ha sido utilizada en múltiples ocasiones por filósofos, psicólogos y quienes se dedican a las ciencias cognitivas, pues ofrece un relato de primera mano sobre un proceso de creación en el ámbito de las matemáticas.

había deducido gracias a no haber seguido los directrices de Hermite, quien evitaba en lo posible los razonamientos de carácter geométrico. Mientras tanto, en Gotinga, presionado por competir con Poincaré en el intento de resolver el problema propuesto por la Academia de Ciencias Francesa para otorgar el Gran Premio de la Academia correspondiente al año 1880 —y que consistía en «Perfeccionar, en alguna cuestión importante, la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales»—, Felix Klein[15] profundizaba en el estudio de las relaciones entre álgebra y geometría, y gracias a ello encontró una representación explícita de una superficie de Riemann que lleva su nombre. Pocos años más tarde, y posiblemente por el agotamiento que le producía su competencia con Poincaré, Klein sufrió un colapso nervioso del que nunca se recuperaría, acotando así su labor como investigador de altos vuelos. Habiéndose enterado del reclamo de Klein por haber bautizado como *fuchsianas* a las funciones que Henri descubrió a partir de la inspiración que le produjo la lectura de un artículo de L. Fuchs[16], el sentido del humor de Poincaré le condujo a bautizar como *kleinianas* al siguiente tipo de funciones que identificó. A pesar de que estos resultados de Poincaré hayan sido considerados en el pasado como su contribución más importante a las matemáticas, éstos no le hicieron merecedor, a juicio del jurado de la Academia, al Gran Premio, mismo que le fue otorgado a George Halpen, quien presentó un trabajo no tan innovador como el de Poincaré, pero sí al menos mejor ordenado y con una presentación clara de las ideas matemáticas. Lejos estaba el jurado de imaginar que en la serie de memorias que Poincaré les había remitido estaba la simiente de poderosísimos métodos de análisis del comportamiento cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales que fructificarían en las últimas décadas del siglo XX, cuando ya se contó con los instrumentos —la tecnología— adecuados para el análisis de las trayectorias en términos de

[15]Felix Klein fue uno de los matemáticos alemanes más influyentes de su tiempo. En 1872 formuló el famoso Programa de Erlangen mediante el cual proponía realizar una síntesis del pensamiento geométrico como el estudio de las propiedades del espacio que resultan invariantes bajo un grupo dado de transformaciones. Mientras Klein profundizaba en el estudio de las relaciones entre álgebra y geometría encontró una representación explícita de una superficie de Riemann que lleva su nombre. Producto de estas inquietudes sobre el espacio es el objeto denominado *botella de Klein*, que es una superficie cerrada, con un solo lado, y que no está inmersa en el espacio tridimensional, aunque sí puede existir en uno de cuatro dimensiones. Sobre su vida se puede consultar el libro de Mumford *et al.* (2002), *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein.*

[16]Lazarus Fuchs (1833–1902) llevó a cabo un trabajo importante en el campo de las ecuaciones diferenciales lineales, y en particular aquéllas con una singularidad regular que ahora llevan su nombre. Ver Gray (1984).

los puntos singulares, de la existencia o no de ciclos límite, de soluciones periódicas para algunos casos del problema de los tres cuerpos, bifurcaciones, estabilidad de un sistema y demás conceptos que para mostrar su fecundidad requerían de una capacidad de cálculo inimaginable en los tiempos de Poincaré.

Como lo hace notar Darboux[17] en su *Elogio a Poincaré*[18], «la introducción de las funciones *fuchsianas* y *kleinianas* le hubieran bastado para hacerse merecedor de una fama deslumbrante, y bien pudieron ser el producto de una cohorte de matemáticos trabajando en equipo, y sin embargo esto solo constituye una parte relativamente pequeña de sus contribuciones a la ciencia en general y a la filosofía.» Muchas sesiones harían falta para describir las contribuciones de Poincaré a las múltiples ramas del conocimiento hasta entonces reconocidas, y otras a las que él contribuyó en su gestación: en la física–matemática, la mecánica celeste, teoría de números, en la teoría de las funciones homogéneas y la regla de los signos de Descartes, su demostración, en colaboración con Picard, del célebre teorema de Riemann sobre las funciones uniformes de n variables y con periodo $2n$ ...sobre los determinantes de orden infinito..., sobre la reducción de integrales abelianas, ..., etc.

Para 1881, y con motivo de la muerte del distinguido matemático e historiador de las matemáticas Michel Chasles, su nombre fue mencionado entre los candidatos a sustituirle en el puesto vacante. En ese mismo año contrae matrimonio con Mlle. Louise Poulain d'Andecy, descendiente de Geoffroy Saint–Hilaire, célebre naturalista francés, colega de Jean–Baptiste Lamarck, y defensor acérrimo de la teoría de la evolución presentada por éste último. Con ella tuvo tres hijas, Jeanne, Yvonne, Henriette, y un hijo, Léon.

En el inicio de esa década era notorio que la matemática francesa poseía tres intelectos de primer orden, y curiosamente todos estaban de una u otra manera vinculados con Hermite, dos de ellos por razones familiares: Appell estaba casado con una sobrina de Joseph Bertrand,

[17]Jean–Gaston Darboux fue uno de los más importantes matemáticos franceses de fines del siglo XIX y principios del XX. Sus contribuciones más relevantes fueron en geometría diferencial y en análisis matemático, en particular en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales. Alumno de Michel Chasles, contó entre sus discípulos a Elie Cartan y Émile Borel. Miembro de la Academia Francesa de Ciencias, desde 1884, en 1900 fue nombrado Secretario Permanente de la misma. En 1902 ingresó a la Royal Society de Inglaterra y en 1916 recibió la medalla Sylvester que le otorgó dicha Sociedad por sus contribuciones a las matemáticas.

[18]Darboux (1914). "Éloge historique d'Henri Poincaré". Este Elogio fue leído por su autor en la sesión pública de la Academia de Ciencias el día 15 de diciembre de 1913. Publicado al año siguiente (consultar la bibliografía), las referencias a las páginas están hechas a partir del documento que aparece en internet.

cuñado de Hermite y reputado como uno de los matemáticos con mayor influencia en los círculos académicos. El segundo era Émile Picard, ahijado de Hermite y ya famoso por su teorema sobre funciones enteras. Esta situación provocó que en lo referente a impulsar con entusiasmo las carreras académicas de unos o de otros, se generara una especie de tensión en la mente de Hermite, pues por un lado su esposa apoyaba a Picard, mientras que su cuñado hacía lo propio con Appell. Y sin embargo el favorito del viejo profesor Hermite era Poincaré. En una nota muy discreta le escribió a Mittag–Leffler[19], discípulo de Weierstrass, que «…con temor de que se entere la Sra. Hermite, le confieso que de las tres estrellas matemáticas, me parece que Poincaré es la más brillante. Además, es de la región de Lorena, al igual que yo, es un gran tipo y muy cercano a mi familia». A final de cuentas Hermite logró acomodar a sus tres «recomendados», a Appell en la cátedra de Mecánica, a Picard en la de Cálculo y a Poincaré, como se dijo líneas antes, en la de física-matemática y probabilidades. Y como si el destino pareciera querer mantenerlos unidos, los tres fueron electos para ingresar a la Academia de Ciencias, Poincaré en 1887, Picard dos años más tarde y Appell en 1892. Para entonces Poincaré ya había sido elegido miembro de la Real Academia de Ciencias de Gotinga (1884) y de la de Uppsala (1885), en el mismo año en que se le otorgaba el *Premio Poncelet* por sus contribuciones a las matemáticas.

En 1885 ocurrió un suceso inusitado: Oscar II, rey de Suecia y de Noruega, convocó a la comunidad matemática a un concurso cuyo ganador sería anunciado cuatro años más tarde, el 21 de enero de 1889, fecha en la que el rey cumplía 60 años. Era así como el rey, y he aquí lo inusitado, hacía un reconocimiento al gusto que había adquirido por las matemáticas durante sus años de estudiante. La convocatoria, aparecida en la revista *Nature* y otras más, señalaba que «…deseoso de mostrar su interés por el avance de las ciencias matemáticas…», el rey Oscar asignará un premio de una medalla valuada en 1000 francos

[19]M.- Gustaf Mittag–Leffler (1846–1927). Sueco de nacimiento, su influencia como matemático se hizo sentir en toda la región escandinava al haber ocupado puestos en varias universidades de esa zona, incluido el que fuera Rector de la Universidad de Estocolmo y haber fundado el *Acta Mathematica*. Se considera que junto con David Hilbert y Henri Poincaré, fue uno de los tres matemáticos más destacados en los 25 años que se centran en el cambio de siglo. Se dice que la razón por la que Alfredo Nobel no instituyó el Premio que lleva su nombre en el área de matemáticas se debió a una vieja rivalidad que sostuvo con Mittag–Leffler por una dama italiana. De haberlo hecho, era casi imposible evitar que el premio no le fuera concedido, eventualmente, a su odiado rival. Su estatura matemática le llevó a pertenecer a más de 30 sociedades científicas y a recibir varios doctorados *honoris causa*, uno de ellos concedido por la Universidad de Oxford.

así como una suma de 2500 coronas a quien presente «el descubrimiento más importante en el área del análisis matemático superior» [**4**, p. 42]. Una comisión que incluyó a Hermite, Weierstrass y Mittag–Leffler formuló los problemas que deberían abordar quienes participaran en el concurso, y vale la pena mencionar uno de ellos con el fin de mostrar lo que se consideraba entonces relevante resolver: el problema abordaba la cuestión de los n cuerpos y se formuló así: «Dado un sistema compuesto por un número cualesquiera de puntos materiales que se atraen mutuamente según la ley de Newton, se propone, bajo el supuesto de que nunca ocurre una colisión entre dos de los puntos, representar las coordenadas de cada punto bajo la forma de una serie compuesta de funciones del tiempo conocidas y que para cualquier valor de la variable real converjan uniformemente.» Esta propuesta venía seguida de algunos comentarios sobre la importancia de la misma y de su origen, el cual atribuían al hecho de que poco antes de morir, Dirichlet comentó a un geómetra amigo suyo que había descubierto un método para la integración de las ecuaciones diferenciales de la mecánica celeste, y que gracias a ello podía demostrar, sin temor a equivocarse, la estabilidad de nuestro sistema planetario. Añadían que seguramente este método estaría basado en una idea simple que podría ser recuperada si alguien con la preparación y la inteligencia apropiada le dedicara el tiempo suficiente.

Con sus estudios sobre el problema, Poincaré a la vez desbordó los alcances planteados por la pregunta y restringió, focalizándolo, el objeto de estudio. Así es como se puede caracterizar el que haya desarrollado una Memoria sobre las ecuaciones de la dinámica y luego se haya limitado al análisis del caso particular que más llamaba la atención del problema de los tres cuerpos, el que resultaba de mayor interés para la astronomía. La Memoria que Poincaré presentó para el concurso llevaba el epígrafe *Nunquam praescriptos transibunt sidéra fines*[20], colocado al frente del sobre sellado que contenía el escrito, y con lo cual se aseguraba el anonimato del autor, quien a su vez lo hacía acompañar por otro sobre con el epígrafe y su identidad. El escrito llevaba por título *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* [**2**], y aunque no resolvía completamente el problema planteado por el jurado del concurso, sí podía ser —como lo afirmó Mittag–Leffler en una carta a Weierstrass— considerada como una guía hacia una nueva era en la historia de la Mecánica Celeste[21]. El trabajo de Poincaré se dis-

[20]«Los astros nunca rebasarán los límites que les han sido prescritos». Con ello Poincaré tal vez enfatizaba que la guía y acotamiento de su trabajo eran los fenómenos que le ofrecía la naturaleza.

[21]Esta memoria sobre el problema de los tres cuerpos contenía un error que fue

tinguía de entre los demás por ser «la obra profunda y original de un genio matemático cuyo lugar está asegurado entre los grandes geómetras del siglo», por lo que el jurado no dudó en declararlo ganador del certamen. Se dice que al abrir el sobre que identificaba al autor nadie se sorprendió al saber que se trataba de Poincaré. El mismo jurado acordó otorgar una medalla de oro a M. Appell, por «su bella y erudita contribución que mostraba la obra de un geómetra de primer orden y que representaba, a la par de lo hecho por Poincaré, un gran honor para la ciencia francesa» [**4**, p. 49]. El gobierno francés se hizo eco de las elogiosas palabras que la Academia de Ciencias dispensaba para sus dos eminentes matemáticos y a ambos les concedió la distinción de nombrarlos caballeros de la Legión de Honor.

A partir de entonces la Francia entera, y con esto se quiere decir, el gran público, supo de la existencia y los logros maravillosos de este gran sabio del que la patria estaba orgullosa. Y Poincaré no iba a decepcionar a quienes lo admiraban: sus estudiantes, ansiosos de seguir los cursos de quienes abrían derroteros novedosos para la ciencia, en particular los que se presentaban en los cursos sobre física–matemática del ya famoso maestro, decidieron compartir —con quienes no tenían la fortuna de asistir a sus clases— los beneficios de sus enseñanzas, y tomando notas, ordenándolas y llevando a cabo cuidadosos trabajos de edición, publicaron las siguientes obras: *Potencial y Mecánica de fluidos; Teoría matemática de la luz; Termodinámica; Electricidad y óptica; Lecciones sobre la teoría de la capilaridad; Las oscilaciones eléctricas; Teoría analítica de la propagación del calor; Cálculo de probabilidades; Teoría del potencial newtoniano* y la que a poco menos de un siglo después volvería a convocar los reflectores sobre su persona: *La teoría de los vórtices.* Y sobre esta labor hay que ser muy claros: lo que se publicaba no eran los textos redactados por Poincaré, sino por sus alumnos, aunque es casi seguro que el maestro los leía y corregía antes de su publicación, además de añadirles prefacios que iluminaban los contenidos que precedían.[22]

La labor académica de Poincaré no se limitó a la Sorbona, y de 1904

descubierto hasta el momento de su publicación. Los trabajos posteriores de Poincaré para salvar este error llevarían, eventualmente, a sentar las premisas de lo que hoy se conoce como 'teoría del caos'. Para enmendar su equívoco Poincaré pagó de su bolsillo la cantidad de 3000 coronas para la impresión de una versión corregida de su artículo original.

[22]Si bien no era una obligación, la mayor parte de los profesores de la Sorbona y escuelas como la Normal Superior y la Politécnica escribían los textos de sus cursos, por lo que dichos escritos alcanzaban un alto nivel en cuanto a su concepción y desarrollo.

a 1908 enseñó también en la École Polytechnique, empalmando estos cursos con los que de 1904 a 1910 impartió en la École Professionelle de Postes et Télégraphes. Contrario a lo que muchos pensaban sobre los enfoques que adoptaban los diferentes cursos según el sitio donde se impartieran, lo más usual era que en las universidades se enseñara la ciencia ya establecida, la que constituía el contenido de los textos —por nuevos que fueran—, y que en instituciones como el Collège de France o el Muséum se enseñara la ciencia aplicada, la que estaba aún en formación, lo cierto es que la mayor parte de los académicos, y junto con ellos Poincaré, lo que enseñaban era tanto la ciencia que ya formaba parte de los textos y artículos publicados como aquella que incluía hasta resultados recientes de quien atendía el curso y los de sus colegas que les habían hecho partícipes de sus últimos resultados y nuevos enfoques sobre alguna determinada rama científica. Pareciera ser que la distinción a la que se hace referencia al inicio de este párrafo respondía a la idea de que hay una física-matemática —una ciencia aplicada— y una matemática pura.

Al respecto, para refutar la validez de la disyuntiva anterior, se preguntaba Darboux, ¿no es cierto que los éxitos más notorios de los matemáticos tienen su origen en los problemas que les plantea la experiencia? Y para reforzar su convicción cita a Joseph Fourier: «el estudio meticuloso y profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos. Este estudio, al ofrecer un propósito determinado ofrece también la ventaja de excluir las preguntas vagas y los cálculos sin sentido. . . es un método seguro de configurar el Análisis y de descubrir qué es lo que más importa conocer y que esta ciencia debe siempre conservar. . . » Y nadie ha rebasado a Poincaré —continúa Darboux— «en cuanto a apertura de espíritu y a su disposición de enfrentar y discutir las ideas novedosas, (impulsado por el) deseo de entresacar lo que en ellas hay de verdad, la utilidad que puedan tener en el desarrollo del conocimiento».

Como un ejemplo de su interés por resolver problemas teóricos con una aplicación casi inmediata están las conferencias impartidas en la École de Télégraphie, donde a partir de la 'ecuación de la telegrafía' que describe la ley de propagación de una perturbación eléctrica a lo largo de un cable, muestra, integrando la ecuación siguiendo un método diseñado por él mismo, que los resultados varían según las características del receptor en la línea, lo que matemáticamente se traduce como un cambio en las ecuaciones en los puntos extremos. En una segunda serie de conferencias destacó el papel del receptor, en particular el efecto de las corrientes de Foucault sobre el imán situado junto al receptor.

En una tercera serie de pláticas se ocupó de problemas de la telegrafía que se refieren a fenómenos de emisión, difracción, presencia de campos eléctricos o magnéticos cercanos a los puntos de emisión o recepción, etc.

Sus inquietudes le llevaron a abordar problemas que urgían en diversos ámbitos de la investigación científica, algunos de los cuales se convirtieron en la base de las teorías físicas que establecen la diferencia entre la ciencia clásica y la contemporánea. Tal es el caso de la teoría de los quanta y de la relatividad especial. Sobre la primera, parece ser según lo cuenta Louis de Broglie [**7**] —uno de los primeros en presentar una formulación coherente de la mecánica cuántica— que Poincaré no había puesto mucha atención antes de 1911, más allá de haber hecho algunos comentarios dispersos. Pero una vez que estuvo presente en la primera reunión convocada por E. Solvay, sobre la cual volveremos más adelante, su atención recayó sobre esta nueva posibilidad de dar cuenta de fenómenos hasta entonces inexplicados, la radiación de cuerpo y el efecto fotoeléctrico en particular.

Antes de 1910 solo unos pocos físicos parecían darle visos de credibilidad a la posibilidad de que la radiación, y por ende la materia, estuviera cuantificada, entre ellos Planck, Einstein, Lorentz y Wien. La hipótesis de Planck de que el espectro de radiación de un cuerpo negro solo parecía ser explicable si se aceptaba la existencia de «cantidades elementales [es decir, discretas] de la acción».[23] Esta posibilidad llevó a Poincaré a expresar que si Planck tenía razón, «los fenómenos físicos cesarían de obedecer leyes expresables en términos de ecuaciones diferenciales, y esto sería, sin duda, la revolución más grande y la más profunda que haya afectado a la filosofía natural desde los trabajos de Newton» [**35**, p. 85].

Como era de esperarse, el problema atrajo su atención, y después de publicar algunos resultados parciales, finalmente, seis meses después de la reunión Solvay, logró establecer, mediante complicados cálculos de carácter probabilístico, que una cierta función de probabilidad relacionada con las cantidades de energía emitidas por un cuerpo negro revelaba que estas emisiones debían tener un carácter discreto. Poco después, Paul Langevin, refiriéndose a este resultado de Poincaré, muestra su admiración porque a solo unos meses de abordar el problema había

[23] La «acción» de un sistema compuesto de varias partículas se define como la integral del lagrangiano del sistema tomada entre dos instantes de tiempo. El 'principio de mínima acción' establece que la variación de la 'acción' es cero, siendo ésta una de las leyes más establecidas de la física a principios del siglo XX y la base de algunas formulaciones de la mecánica clásica, la cuántica, la relatividad y la teoría de campo cuántica.

superado las dificultades que aparecían al intentar utilizar métodos estadísticos para describir fenómenos electromagnéticos —hasta entonces descritos mediante ecuaciones diferenciales parciales— y mostrado «en la última de sus Memorias de físico–matemáticas, con una claridad maravillosa la agudeza del conflicto entre las teorías ... y el hecho de que los fenómenos electromagnéticos de carácter atómico no pueden ser representados por ecuaciones diferenciales». Y agrega, como si hubiera algún tipo de conexión entre ambos hechos, que a solo 6 meses de que le sorprendiera la muerte, Poincaré anunciaba el fin de ese periodo de tres siglos en el que se construyó ese admirable instrumento que es el cálculo infinitesimal, y con él la esperanza de expresar las leyes del mundo bajo sus premisas de continuidad. «Sabemos hoy —dice Langevin, refiriéndose al cálculo infinitesimal— que ya no basta [este aparato matemático] para penetrar en el misterio de los átomos y describir las leyes que rigen este nuevo universo y cuya conquista será la gran obra que nos espera...»[24]

La participación de Poincaré en la formulación de las ideas que constituyen la Teoría de la relatividad restringida, o especial, se remonta a varios años antes de que acabara el siglo XIX, y culmina hasta 1905. En un artículo sobre la teoría de Lorentz y el principio de reacción, Poincaré examinó las consecuencias de esta teoría, en particular que sus resultados eran incompatibles con el principio de la igualdad de la acción y la reacción, y señaló que convendría modificar este último principio para que no colisionara con la teoría de Lorentz. Como apoyo a Lorentz, Poincaré publicó una —hoy famosa— memoria sobre la dinámica del electrón, en los *Rendiconti* de Palermo[25], donde logró dar a la teoría de Lorentz una coherencia perfecta, descartando una a una las dificultades que presentaba el trabajo de Lorentz. Esta línea de investigación fructificaría, eventualmente, en la teoría de la relatividad restringida que usualmente se considera obra de Albert Einstein. Sin embargo, la historia de esta teoría es bastante más complicada. Inicia en 1887, cuando Woldemar Voigt (1850–1919) se interesa en el efecto Doppler y analiza las ecuaciones diferenciales que describen oscilaciones en un medio. Para ello toma la ecuación de d'Alembert, ecuación de onda para un campo escalar, en una dimensión y dependiente del tiempo, que es válida para un medio en reposo e isotrópico. Si se le aplica una transformación galileana a sus coordenadas la ecuación de onda deja de ser satisfecha por las nuevas coordenadas. Lo que entonces

[24] *Ibid.*, p. 87. Langevin (1913), *La revue du mois.* Tomo 16.

[25] La presentación de la plática se realizó el 23 de julio de 1905, aunque el texto se publicó hasta el siguiente año. Ver *Rendiconti* (1906) en la bibliografía.

hace Voigt es buscar una transformación lineal que deje invariante a la ecuación de onda y, para su fortuna, aunque no para la historia que adjudica prioridades en los descubrimientos, encuentra la transformación que, gracias a Poincaré, llevará el nombre de transformación de Lorentz.

Como antecedente a lo anterior estaban los trabajos sobre electromagnetismo de James Clerk Maxwell y de M. Michelson sobre la independencia de la velocidad de la luz respecto del sistema de referencia tomado en cuenta. Esto inducía a pensar que las ecuaciones que describían su comportamiento deberían conservar su forma sin importar el estado de movimiento del sistema de referencia utilizado. Todo dependía, según lo explica el mismo Lorentz en su escrito sobre las contribuciones de Poincaré al tema[26], de encontrar las fórmulas de transformación adecuadas para las variables x, y, z, t y para las magnitudes físicas —velocidad, fuerza, etc.— y de mostrar la invariancia de las ecuaciones bajo estas transformaciones. Era claro que había más aspectos que considerar, tales como existencia del éter, la noción de contracción del tiempo y el problema de la simultaneidad, los planteamientos de Faraday que revelaban relaciones estrechas entre la luz y los campos electromagnéticos, etc. Muchas de las respuestas a estas problemáticas las aportó el mismo Lorentz con su noción de contracción del tiempo: dos fenómenos que ocurren en diferentes localidades pueden parecer que ocurren simultáneamente, aunque no sea así.

Poincaré contribuyó a aclarar esta situación y a replantear la contribución de Lorentz en su memoria de los *Rendiconti*, donde explica que «las transformaciones de Lorentz y las rotaciones del espacio forman una estructura matemática llamada *grupo de Lie*».[27] A este grupo Poincaré lo bautizó como *grupo de Lorentz*. En particular demostró que el grupo mantiene la invariancia de las cantidades de la forma $(kdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$, al igual que el grupo de traslaciones —transformaciones conocidas como *galileanas*— y rotaciones en el espacio euclidiano mantienen la invariancia de cantidades de la forma $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. La consecuencia de ello sería que si dos observa-

[26] Lorentz, Hendrik (1853–1928), en (1928), *Deux mémoires d'Henri Poincaré…* Acta Mahematica. Lorentz recibió el Premio Nobel de Física en 1902, junto con P. Zeeman, por sus contribuciones al llamado 'efecto Zeeman'.

[27] Sophus Lie , célebre matemático noruego cuya aportación más importante a las matemáticas fue el estudio de los grupos de transformaciones continuas llamados 'grupos de Lie' y de donde derivan sus generadores, que resultan ser campos vectoriales. Estos conceptos están ligados con las llamadas 'álgebras de Lie'. Los grupos de Lie juegan un papel fundamental en una de las representaciones de la mecánica cuántica.

dores se mueven con velocidades constantes en el éter, cada uno en un sistema de referencia, los fenómenos que ambos observan dan lugar a medidas de tiempo y posición ligadas de un sistema a otro mediante las transformaciones de Lorentz. Esto siempre y cuando los relojes en ambos sistemas hayan estado sincronizados entre sí de manera que en $t = 0$ los orígenes de ambos sistemas coincidan y los movimientos de dichos sistemas sean tales que los ejes de las x's se muevan uno sobre otro con velocidad relativa constante. Es así como Poincaré demostraba que las ecuaciones de Lorentz satisfacían el Principio de Relatividad (restringida), mismo que establece que las ecuaciones que describen las leyes de la física tengan la misma forma en todos los sistemas de referencia.

Lo anterior adquiría más fortaleza debido a que los trabajos de Poincaré coincidían con los resultados obtenidos por H. Minkowsky para la dupla espacio–tiempo en el sentido de que una transformación de Lorentz que permita pasar de un sistema de referencia inercial a otro es equivalente a una rotación de ejes ortogonales en un espacio euclidiano que permite pasar de un sistema cartesiano a otro. Esto, más una serie de afirmaciones que aparecen en el capítulo sobre mecánica en *La Science et l'hypothèse (1902)*,[28] llevaron a muchos a sostener que la paternidad de la Teoría de la Relatividad Restringida debería ser compartida por Lorentz, Poincaré y Einstein, y no solo otorgarle el mérito a este último. Veamos el tipo de afirmaciones de Poincaré a las que se acaba de hacer referencia:

1. No existe un espacio absoluto y por ello solo observamos movimientos relativos...

2. No existe un tiempo absoluto: decir que dos periodos son iguales es una afirmación sin sentido...

3. No existe una intuición directa de la simultaneidad de dos eventos que se producen en lugares diferentes

4. Nuestra geometría euclidiana no es más que una convención del lenguaje. Podríamos enunciar hechos mecánicos refiriéndolos a un espacio no-euclidiano ... y sería tan legítimo como hacerlo respecto a nuestro espacio ordinario.

El debate sobre quién o quiénes merecen ser tenidos como los autores de esta teoría que vino a revolucionar la ciencia, y como consecuencia nuestro mundo, ha sido el tema de muchas polémicas, por lo general de muy alto nivel, y quedan fuera del alcance de este breve recuento de la

[28] "La Mécanique classique" es el capítulo VI de *La Science et l'hypothèse* (1902).

vida de Poincaré, pero la bibliografía sobre este asunto está al alcance de quienes se interesen por consultarla.[29]

Como muestra de los ingredientes de este debate, dado que exhibe, a mi juicio, una gran claridad al respecto, está la pregunta que Peter Galison plantea en *Einstein's Clocks*, *Poincaré's Maps* (2002): «¿Es que Einstein realmente descubrió la relatividad?, ¿o ya estaba planteada por Poincaré? Estas viejas preguntas se han vuelto tan tediosas como carentes de utilidad. Esto debido a que dependen de cuáles son las partes de la (teoría de la) Relatividad que uno considera esenciales: el rechazo a la existencia del éter, la transformación de Lorentz, la naturaleza del espacio y del tiempo o la predicción de resultados experimentales... tal vez lo importante es considerar que ambos se preocuparon por el problema de la sincronización de los relojes, y que por ello ambos desarrollaron un nuevo sentido operacional para la noción de simultaneidad. Sin embargo, mientras Poincaré seguía un enfoque constructivo, como suponer la existencia de un éter en reposo y reconocer una diferencia entre tiempo 'verdadero' y tiempo 'aparente', en contraste Einstein abandonaba la noción de éter, y por lo tanto todos los intervalos de tiempo en cualquier sistema de referencia inercial eran igualmente válidos». Esto no significaba —para Galison— que Poincaré mostrara un carácter conservador, pues con frecuencia hacía mención de lo revolucionario de la 'nueva mecánica' de Lorentz. En efecto, en 1904 Poincaré impartió una conferencia sobre «El estado actual y el futuro de la física–matemática» en el Congress of Arts and Science, en Saint Louis (Estados Unidos), donde afirmaba que:

> ... De estos resultados, si son confirmados (por experimentos), surgiría una mecánica completamente nueva, que estaría caracterizada por el hecho de que ninguna velocidad (alcanzada por un objeto) podría rebasar la velocidad de la luz, y ninguna temperatura podría descender más allá del cero absoluto, porque los cuerpos opondrían una inercia creciente a las causas que tenderían a acelerarlos en su movimiento, y esta inercia se convertiría en infinita al momento de acercarse a la velocidad de la luz.[30]

Esto muestra que la mecánica no había dejado de estar en el foco de sus intereses, desde que en los años 90 publicara los dos prime-

[29] Para el efecto se puede consultar el magnífico artículo que aparece en la siguiente dirección electrónica: `http://en.wikipedia.org/wiki/Relativity_priority_dispute`.

[30] Poincaré (1905), "The principles of mathematical physics". La conferencia tuvo lugar en 1904 pero el texto se publicó hasta el año siguiente.

ros volúmenes de su extraordinaria obra *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*[31]. Estos libros fueron consecuencia directa de haber sido invitado, o mejor sería decir, presionado, por Gaston Darboux para ocupar, en 1896, la Cátedra de Astronomía Matemática de la Sorbona (Facultad de Ciencias de París). Para 1899, mientras publicaba el tercer volumen de la serie arriba mencionada, ya había iniciado la escritura de otra más, relacionada con la anterior pero con un carácter más práctico: las Leçons de Mécanique Céleste, en tres volúmenes publicados en el periodo 1905–1910. Según el ya maduro Henri, el verdadero propósito de la mecánica celeste no era el cálculo de efemérides, pues para esto podría uno estar satisfecho con una previsión a corto plazo, sino de reconocer si la ley de Newton bastaba para explicar todos los fenómenos. En 1890, a propósito de la posibilidad de explicar el comportamiento a largo plazo de un sistema de tres cuerpos, Poincaré escribió:

> No he logrado resolver rigurosa y completamente el problema de la estabilidad del sistema solar, entendiendo esto de modo estrictamente matemático. Sin embargo, el empleo de invariantes integrales me ha permitido obtener ciertos resultados parciales, válidos sobretodo para el problema llamado 'restringido' en el que dos cuerpos principales giran en órbitas sin excentricidad en tanto que el cuerpo perturbado posee una masa despreciable. En este caso, si deja uno de lado ciertas trayectorias excepcionales, cuya aparición es infinitamente poco probable, podemos demostrar que el sistema pasará una infinitud de veces tan cerca como se desee de su posición inicial. Es a esto que he llamado estabilidad *à la Poisson*.[32]

Algunos años después, en *Science et méthode*, volverá sobre el tema, añadiendo que:

> Una causa muy pequeña, tanto que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos dejar de observar, y entonces decimos que este efecto se debe al azar. Si conociéramos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el instante inicial, podríamos predecir la situación de este mismo universo en un instante ulterior. Sin embargo, aun si las leyes naturales no tuvieran ningún secreto para nosotros, de cualquier manera no podríamos

[31] Publicados en 1892 y 1893, respectivamente.

[32] En Poincaré (1890), *Acta Mathematica*, 1–270. Citado en Samuels (2005), *H. Poincaré*, p. 34.

> conocer la situación inicial mas que aproximadamente. Si esto nos permite predecir la situación ulterior con el mismo grado de aproximación. . . diríamos que el fenómeno ha sido previsto y que se somete a las leyes. . . pero no siempre es así, puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales generarán (diferencias) muy grandes en los estados finales de los procesos; un pequeño error en las primeras producirá un gran error en las últimas. La predicción se vuelve imposible y tenemos entonces un fenómeno calificado como fortuito [**24**, p. 68.].

Esta descripción pareciera haber sido extraída del libro de D. Ruelle sobre el caos y el azar [**34**, cap. 11] o de los comentarios de Gleick sobre el *efecto mariposa* [**11**, pp. 9–32], y el fenómeno es hoy conocido como *caos determinista*, explicándose el comportamiento aparentemente azaroso de un sistema como el resultado de ecuaciones diferenciales nolineales que gobiernan el comportamiento del sistema y una marcada sensibilidad a las condiciones iniciales que hacen imposible determinar la evolución de dicho sistema. Recibe el tan atractivo como afortunado nombre de «caos determinista» debido a que si se repite el fenómeno a partir de las mismas condiciones iniciales se observará el mismo comportamiento. Sin embargo, en la naturaleza es prácticamente imposible conocer todas las variables que participan en el fenómeno y repetir una experiencia a partir de exactamente las mismas condiciones, lo que requeriría una precisión infinita.

Como ejemplo de un fenómeno de tal tipo Poincaré toma un tifón [**24**, pp. 69 y 91], algo muy cercano al ya mencionado «efecto mariposa». Este término fue acuñado por A. N. Lorentz al utilizarlo durante una plática de la American Association for the Advancement of Science en diciembre de 1972, y preguntarse: «Es que el movimiento de las alas de una mariposa en Brasil puede provocar un tornado en Texas» [**14**, p. 425]. Con el tiempo el problema del determinismo en Poincaré adquirió dimensiones filosóficas, e hizo del determinismo casi un sinónimo de la ciencia. En el último libro que estaba escribiendo, y que dejó inacabado, aunque se publicó póstumamente, afirmaba que:

> Estamos en presencia de un hecho: la ciencia, para bien o para mal, es determinista; por dondequiera que se presente lleva con ella el determinismo. Tanto que no importa si se trata de algún asunto de física o de biología, poco importa eso. El campo de la conciencia permanecerá inviolado; ¿qué sucederá el día que la moral pase a ser objeto de la

> ciencia? Necesariamente se impregnará de determinismo y sin duda eso será su ruina [**27**, p. 245].

4. Poincaré, la divulgación de la ciencia y algo de filosofía

Poincaré vivió en una época en la que el público en general aún no se interesaba o leía noticias sobre la ciencia y sus avances. Sin embargo, gracias a personas como él y a sus esfuerzos como pionero en el campo de la divulgación de la ciencia, es que hoy los estantes —o tal vez mejor sería decir, las páginas de internet— de muchas librerías incluyen numerosos títulos dedicados a dar a conocer temas científicos a públicos no especializados. Armado de su talento para expresar y discutir de manera sencilla e interesante los tópicos más recientes de la ciencia de su época y sus consecuencias, tanto para la filosofía como para la sociedad que se vería transformada como consecuencia de los avances en el conocimiento, Poincaré escribió varios textos, algunos ya considerados como clásicos de la literatura científica y filosófica. Cito algunos, tal vez los más importantes, de los que escribió dentro de este género: *La science et l'hypothèse* (1902) —el que haya sido traducido a más de 23 idiomas nos da una idea de su impacto—, *La valeur de la science* (1905), *Science et méthode* (1908), *L'hypothèse des quanta* (1912), y *L'espace et le temps* (1912). Estas publicaciones le otorgarían a Poincaré una fama ni siquiera alcanzada por Cauchy, Hermite o cualquier otro matemático francés. Cabe dudar si estos ensayos de divulgación hayan sido entendidos por todos sus lectores, pues para captar el pensamiento de su autor hacía falta poseer un cierto nivel de conocimientos científicos, pero la autoridad que había alcanzado hacía que aun así fuera leído.

Su popularidad le llevó a ser invitado de honor en múltiples reuniones y celebraciones, en algunas de las cuales era el principal orador. Como tal no se limitaba a temas con carácter estrictamente científico, y lo mismo hablaba de política, reclamando mayores apoyos a la ciencia por parte del estado (¿suena conocida esta situación en nuestro México?), que de moral. En 1908, convocado a presidir un banquete de la Association Générale des Étudiants, elaboró un discurso sobre la verdad científica y la verdad moral, y en 1910 regresó sobre el tema con una conferencia titulada «La morale et la science». Un año más tarde, con motivo de la idea de uno de sus colegas de fundar una liga o sociedad para promover la cultura francesa, Poincaré respondió con entusiasmo, no solo adhiriéndose a este grupo sino que además escribió un texto en el que defendía la cultura literaria y la educación clásica, es decir, aquélla en la que se enseñan los textos y las ideas de los autores clásicos.

Con todos estos compromisos en su agenda, Poincaré no abandonó sus investigaciones sobre los temas que le apasionaban, y en 1900, con motivo de la Exposición Universal que se llevó a cabo en París, presentó tres conferencias en el lapso de dos semanas:[33] una sobre «El papel de la intuición y la lógica en matemáticas» (Congreso Internacional de Matemáticos) , otra «Acerca de los principios de la Mecánica» (Congreso Internacional de Filosofía) y una más sobre «Las relaciones de la Física experimental y la Física matemática» (Congreso Internacional de Física).

5. La gloria de sus últimos años

Sus investigaciones abarcaron un arco de tal amplitud que fue el primer científico en la historia de la Academia de Ciencias de París —con membresía desde 1886— en ser electo para formar parte de las cinco secciones que la conformaban: geometría, mecánica, física, geografía y navegación. En 1906 es nombrado Presidente de la susodicha Academia de Ciencias y en 1908 ingresó a la Academia Francesa, en sustitución de Sully Prudhomme[34]. Fue por esos años que el gobierno francés encargó a la Academia de Ciencias que se ocupara de organizar una misión para llevar a cabo una medición más exacta del meridiano terrestre que pasa por Quito, Ecuador. Se nombró para dicha tarea una comisión de la que Poincaré fue el alma, según lo atestiguaron otros miembros de la misma. Y fue también sobre él que recayó la responsabilidad de actuar como Presidente de la Comisión Interministerial para coordinar la implantación en Francia de las aplicaciones de la telegrafía inalámbrica.

[33]Hay que subrayar que las conferencias que ofrecía Poincaré, las más de las veces eran trabajos realizados ex profeso para el evento al que había sido invitado, es decir, no se presentaba a repetir pláticas ofrecidas en otros eventos.

[34]Sully Prudhomme (1839–1907), poeta y ensayista francés. Un tanto olvidado hoy, fue miembro distinguido del movimiento del parnasianismo, inspirado en la obra de Théophile Gautier y en la filosofía de A. Schopenhauer. Defensores de «el arte por el arte mismo», se alejaban de consideraciones de tipo social y del romanticismo que les precedió. Fundaron una revista, *Le Parnasse contemporain*, y en ella escribieron, como parte del movimiento, hombres de la talla de Charles Leconte de Lisle, Stéphane Mallarmé, Paul Verlaine, y entre sus seguidores en el extranjero se cuenta con Alfred Lord Tennyson, quien ostentó el título de 'poeta laureado de Inglaterra'. Prudhomme fue a quien se le otorgó el primer Premio Nobel de Literatura de la historia.

Ofrecer varias conferencias en periodos cortos de tiempo se volvió algo común para él, en unas tocando un tema y en otras uno radicalmente alejado de los anteriores. Y con el mismo arrojo tomaba sus riesgos presentándolas en ocasiones en los idiomas locales, sin la protección que da el hablar en la lengua materna. Así, en 1909, con motivo de una invitación de la Real Sociedad de Ciencias de Gotinga, ofreció seis conferencias en la Universidad de dicha ciudad, cinco de ellas, de carácter técnico, fueron presentadas en alemán; la última, sobre la nueva mecánica de Lorentz, en francés. Con frecuencia asistía a reuniones foráneas como delegado de la Universidad de París. Con dicho carácter participó en las celebraciones del Aniversario 76 de la fundación de la Universidad Libre de Bruselas, donde habló de la libertad de pensamiento en materia científica, y en 1910 llevó a cabo la misma misión en el centenario de la Universidad de Berlín, donde se le otorgó un Doctorado Honoris Causa en Medicina y Cirugía (sic). Aprovechó su estancia en dicho sitio para dar una conferencia sobre las ondas hertzianas.

En 1908, estando en Roma para impartir la conferencia (en el Congreso Internacional de Matemáticas) sobre el Futuro de las Matemáticas [**23**], sufrió de una hipertrofia de la próstata y fue operado de emergencia, siendo un éxito el resultado de la intervención. A su regreso a París continuó con sus actividades habituales.

En 1911 tuvo lugar una reunión que se convirtió en leyenda. Un acaudalado industrial, Ernest Solvay, decidió actuar como mecenas de la ciencia, y bajo su patrocinio convocó a los físicos más destacados del momento para que acudieran a Bruselas con el fin de discutir a fondo las ideas más novedosas sobre el tema de la Mecánica. Ahí estuvieron presentes, en el llamado Conseil Solvay, las mentes más lúcidas en su momento, científicos cuyos nombres forman parte del selecto grupo que inició la ciencia contemporánea, la de los quanta y la relatividad. Ahí estuvieron W. Nernst, M. Brillouin, H. Lorentz, E. Warburg, J. Perrin, W. Wien, M. Skłodowska–Curie, y H. Poincaré, R. Goldschmidt, M. Planck, H. Rubens, A. Sommerfeld, F. Lindemann, M. de Broglie, M. Knudsen, F. Hasenöhrl, G. Hostelet, E. Herzen, J.H. Jeans, E. Rutherford, H. Kamerlingh Onnes, A. Einstein y P. Langevin. Fueron ellos y sus discípulos quienes gestionaron las primeras etapas de la nueva física del siglo XX.

El año 1912 parecía ser el de mayor actividad de su vida en cuanto a viajes y conferencias: estuvo en la Universidad de Londres para impartir varias pláticas sobre la teoría de la radiación, luego acudió a Viena para defender la enseñanza de las humanidades; acto seguido volvió a Bruselas para otra reunión convocada por Ernest Solvay, en esta ocasión para discutir los contrastes entre la física clásica y la mecánica cuántica. De vuelta en París se presentó ante la Liga Francesa para la Educación Moral[35] ... era el 26 de junio de 1912, y las molestias vinculadas con la operación previa en su próstata parecían regresar. Los médicos aconsejaron llevar a cabo otra intervención quirúrgica y fijaron como fecha para ella el martes 8 de julio. El jueves previo Poincaré presidió el Consejo de Observatorios (Astronómicos), del cual era miembro desde 1907. El sábado se presentó a una reunión de su Facultad de Ciencias, donde habló con sus colegas sobre algunas cuestiones de la teoría de grupos de sustitución y de sus planes para acudir a Hamburgo como representante del gobierno francés en las celebraciones de la Asociación Geodésica Internacional.

Tal y como fue planeada, la operación tuvo lugar el 8 de julio, y parecía haberse realizado con éxito. En los días que siguieron su recuperación fue paulatina y la familia confiaba en su recuperación total. Sin embargo, sorpresivamente, el jueves 17 una embolia provocó su muerte. Al igual de cómo él describiera los sentimientos que surgieron a raíz de la muerte de Pierre Curie, parecía que no solo era un francés más el que había muerto, «no había un francés, por ignorante que fuera, que no albergara una intuición, por confusa que fuera, del tipo de fuerza que la Patria y la Humanidad acababan de perder...» [**6**, p. 67].

Paul Painlevé lo describió como «el verdadero cerebro ... de las ciencias racionales: matemáticas, astronomía, física, cosmogonía, geodesia, fueron todas por él cultivadas, ... y en todas lo hizo con profundidad. Inventor incomparable, no se limitó a seguir sus aspiraciones, a abrir vías inesperadas, a descubrir en el universo abstracto de las matemáticas tierras para muchos aún desconocidas. Dondequiera que un hombre se haya deslizado, por sutiles o erizados que hayan sido estos caminos, fuera la telegrafía inalámbrica, fenómenos radiológicos o de la formación de la Tierra, Henri Poincaré se ha colocado cerca de él para ayudarlo y extender sus investigaciones, seguir el precioso filón...»[36]

En su participación como orador en el funeral de Poincaré, M. Guist'hau, Ministro de Instrucción Pública del gobierno francés, intentó expresar los sentimientos de una nación:

> La muerte de Henri Poincaré, si bien ha conjugado en un solo lamento los pensamientos de la élite intelectual de todos los países, es para nosotros una cuestión de duelo público. El Gobierno se convierte en el intérprete de la nación entera que se siente dolorosamente afligida. Y aunque los trabajos

[35] Esta plática aparece reproducida en [**37**, cap. 12].

[36] Ibid.

> del matemático estén al alcance del entendimientos de solo unos cuantos, todos saben que Henri Poincaré representó lo que de excelsitud posee el genio de Francia, ... su pureza, ausencia de intereses (personales), en fin, lo mejor.[37]

Una de las mejores descripciones del hombre, la proporcionó Paul Appell, su viejo amigo, escribiendo a casi 12 años de la muerte de Henri: «La vida de Poincaré fue una intensa e ininterrumpida meditación, enfocada hacia el trabajo científico y la familia. Permanecerá por siempre como un sujeto de admiración y un ejemplo para la juventud francesa» [**1**]. Podríamos caer en la tentación de comparar su figura con la de los científicos de los últimos ciento cincuenta años. Richard Feynman, haciendo alarde de agudeza, solía calificar a algunos de sus colegas como «big shot» y a otros como «small shot» [**37**, p. 100]. ¿Dónde situar a Poincaré en esta 'escala'? En esta clasificación, con toda certeza, no cabe Poincaré: él era, por sí mismo, una clase aparte.

Una biografía sobre Henri Poincaré, para hacerle justicia, requeriría de varios volúmenes, y por ello esto es solo un intento para recrear algunos pasajes de su vida y de sus contribuciones a la ciencia, con algunos esbozos de sus implicaciones en la filosofía de la ciencia y el desarrollo de la nuevas áreas que conformarían las matemáticas y la física del siglo XX y lo que será el XXI. Acaba de aparecer un excelente recuento de estos aspectos en la obra de Verhulst (2012), y está por ser publicada una 'biografía científica' (prometida para el 25 de noviembre de este año) cuyo volumen —616 páginas— y la calidad del autor, que en este caso es Jeremy Gray, permiten asegurar que harán justicia a la memoria de Poincaré. Mientras tanto nos quedamos con las palabras de Tobias Dantzig:

> Con la muerte del gran matemático francés ha desaparecido el único hombre cuyo pensamiento podría englobar todos los demás pensamientos, la mente única que, a través de una especie de redescubrimientos, podía penetrar hasta lo más profundo del conocimiento que la mente humana puede alcanzar ... [**5**, p. 9].

Bibliografía

1. P. Appell, *Henri Poincaré*, Paris, Plon, 1925.
2. J. Barrow, *Poincaré and the Three Body Problem*, AMS, Providence, 1997.

[37] Ibid.

3. A. Berger, *L'ouvre scientifique de Henri Poincaré*, Le Figaro, 1912.
4. H. Bottazzini, *Poincaré. Philosophe et mathématicien*, Paris, Belin, 2002.
5. T. Dantzig, *Henri Poincaré. Critic of Crisis. Reflections on his Universe of Discourse*, New York, Greenwood Press Pub., 1968.
6. J.-G. Darboux, «Éloge historique d'Henri Poincaré», *Paris: Mémoires de l'Académie des Sciences*, vol. 52, 1914, 81–148, En internet: `http://www.academie-sciences.fr/activite/archive/dossiers/Poincare/Poincare_pdf/Poincare_eloge.pdf`.
7. L. de Broglie, *Henri Poincaré et les theories de la physique*, Paris, Albin Michel, 1956, en Savants et decouverts.
8. P. Galison, *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps*, New York, W. W. Norton.Gessen, 2002.
9. M. Gessen, *Perfect Rigor: A Genius and the Mathematical Breakthrough of the Century*, New York, Houghton Mifflin Harcourt, 2009.
10. C. Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography*, tomo 11, New York, Charles Scribner's Sons., 1981, 8 vols.
11. J. Gleick, *Chaos: The Making of a New Science*, New York, Viking, 1988.
12. J. Gray, «Fuchs and the theory of differential equations», *Bulletin AMS (New Series)*, vol. 10, núm. 1, 1984, 1–26.
13. ———, *Henri Poincaré: A Scientific Biography*, Princeton, Princeton University Press, 2012, por aparecer en noviembre de 2012.
14. R. Hilborn, «Seagulls, butterflies, and grasshoppers: A brief history of the butterfly effect in nonlinear dynamics», *Am. J. Phys.*, vol. 72, núm. 4, 2004.
15. S. G. Krantz, *An Episodic History of Mathematics. Mathematical Culture Through Problem Solving*, Washington D. C., The American Association of America, 2010.
16. H. Lorentz, «Deux mémoires d'Henri Poincaré sur la Physique Mathématique», *Acta Mathematica*, vol. 38, 1928, 293–308.
17. J. Mawhin, «Henri Poincacé. A Life in the Service of Science», *Notices of the AMS*, vol. 52, núm. 9, 2005, 1036–1044.
18. D. Mumford, C. Series y D. Wright, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Camb., Cambridge Univ. Press, 2002.
19. M. J. Nye, «The Boutroux Circle and Poincaré's Conventionalism», *Journal of the History of Ideas*, vol. 40, núm. 1, 1979, 107–120.
20. D. O'Shea, *The Poincaré Conjecture: In Search of the Shape of the Universe*, New York, Walker & Co, 2007.
21. H. Poincaré, «The principles of mathematical physics», *The Monist*, vol. 15, núm. 1, 1905, 1–24.
22. ———, *Sur la dynamique de l'électron*, tomo XXI, Rendiconti del circolo matemático di Palermo, 1906.
23. ———, *L'avenir des Mathématiques. Revue generale des Sciences pu-*

res et appliquées, Paris, 19vième année, No. 23, Decembre, 1908, Versión en inglés en internet `http://portail.mathdoc.fr/BIBLIOS/PDF/Poincare.pdf`.
24. ______, *Science et méthode*, Paris, Flammarion, 1908, y varias ediciones más.
25. ______, «L'espace et le temps», *Scientia (Rivista di Scienza)*, vol. 12, 1912, 159–171.
26. ______, «L'hypothèse des quanta», *Revue scientifique, 4ème. série*, 1912, 225–242.
27. ______, *Dernières pensées*, Paris, Edition Ernest Flammarion, 1913.
28. ______, *Oeuvres de Henri Poincaré publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, vols. 1-12*, Paris, Gauthier-Villars, 1916.
29. ______, *El valor de la ciencia*, Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1946 y 1964.
30. ______, *Ciencia y método*, Madrid, Espasa-Calpe, 1965.
31. ______, *Ciencia e hipótesis*, Buenos Aires, Espasa-Calpe, 2002.
32. ______, *Science and method:* Translated by Francis Maitland. With a pref. by the Hon. Bertrand Russell, Cornell, Cornell University Press, 2009.
33. ______, *Papers on topology, Analysis Situs and its five supplements. Trans. to English by J. Stilwell.*, AMS and London Mathematical Society. History of Mathematics, Vol. 37, 2010.
34. D. Ruelle, *Hazard et Chaos*, Paris, Odile Jacob, 1991.
35. J.-J. Samueli y J.-C. Boudenot, *H. Poincaré (1854–1912) Physicien*, Paris, Ellipses, 2005.
36. G. Szpiro, *La conjecture de Poincaré : Comment Grigori Perelman a résolu l'une des plus grandes énigmes mathématiques*, Paris, J. C. Lattès, 2007.
37. F. Verhulst, *Henri Poincaré. Impatient Genius*, New York, Springer, 2012.
38. Wikipedia, «`http://en.wikipedia.org/wiki/Relativity_priority_dispute`».