Notas históricas sobre el método de Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales

Martín García Olivo
Depto. de Auditoría y Control de Procesos Educativos
Ministerio de Educación de la República Dominicana
Calle Guarocuya No. 16, Brisas del Norte,
Guaricanos, CP 11301,
Santo Domingo Norte, República Dominicana
martin.garcia@minerd.gob.do

José M. Gutiérrez
Depto. de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
Luis de Ulloa, S/N CP 26004
Logroño, España
jmguti@unirioja.es

Resumen

En este trabajo profundizamos en la polémica existente sobre la autoría de un conocido proceso iterativo para resolver ecuaciones algebraicas. Se trata de un método que algunos autores lo atribuyen al matemático ruso P. L. Chebyshev, mientras que otros se lo atribuyen a L. Euler. En nuestro estudio, hacemos una revisión de las fuentes históricas donde aparece el método por primera vez y analizamos las aportaciones realizadas por estos y otros autores.

1. ¿El método de Chebyshev?

A lo largo de todo este trabajo nos referiremos al método de Chebyshev como el proceso iterativo para resolver una ecuación no lineal

$$f(x) = 0, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

definido de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

Bajo condiciones adecuadas para el punto de partida x_0 y para la función $f(x)$, se sabe que la sucesión (2) converge a una solución α de la ecuación (1).

Desde una perspectiva histórica, el método de Chebyshev (2) aparece dentro de una familia de procesos iterativos de la forma $x_{n+1} = E_m(x_n)$ donde

$$E_m(x) = x + \sum_{\nu=1}^{m-1}(-1)^\nu \frac{f(x)^\nu}{\nu!}(f^{-1})^{(\nu)}(f(x)), \tag{3}$$

y f^{-1} es la inversa de f. La familia de métodos definidos en (3) se conoce como métodos de Schröder de primer tipo y es conocido que el orden de convergencia de cada método E_m definido en (3) es m. Nótese que para $m = 2$ se obtiene el *método de Newton* y que para $m = 3$ se obtiene el método de Chebyshev.

Pero el objetivo de estas notas no es el analizar las condiciones de convergencia, ni las propiedades numéricas del método de Chebyshev. Más bien pretendemos profundizar en sus raíces históricas, con el objetivo de comprobar hasta qué punto es correcto «bautizar» al proceso definido en (2) como método de Chebyshev. O mejor aún, teniendo en cuenta que el método de Chebyshev es uno de los métodos incluídos en la familia (3), la pregunta es: ¿A quién o quiénes se debe la deducción de los métodos de la familia (3)?

La controversia existente acerca de la autoría de (2) (o de (3)) no es nueva. En efecto, en el conocido libro de J. F. Traub [**20**, p. 81] sobre métodos iterativos para resolver ecuaciones algebraicas se afirma que la familia E_m se atribuye tanto a Euler como a Chebyshev. En consecuencia, Traub usa ambos nombres de forma conjunta para referirse a la familia E_m.

La duda sobre a quién atribuir el método (2) es compartida por otros autores, como por ejemplo M. S. Petković, L. D. Petković y D.

Herceg [**11**, p. 1759], quienes advierten que en la literatura rusa la secuencia E_m definida en (3) se atribuye a un trabajo de Chebyshev escrito en 1837 o 1838 y hacen referencia a la cita anterior de Traub sobre este aspecto. Sin embargo, también indican que otros autores como E. Bodewig [**1**] o S. Smale y M. Shub [**15**] adjudican E_m a Euler y en concreto, a su *Opera Omnia*, Ser. I, Vol. X.

En este trabajo pretendemos resolver la disyuntiva surgida en cuanto a la autoría del método de Chebyshev, analizando los textos históricos en los que el método pudo ser desarrollado por primera vez. Así, en la sección 2 analizamos la citada obra de Euler y en la sección 3 hacemos un resumen comentado de la obra *Cálculo de las raíces de ecuaciones* de Chebyshev, que data de 1838. La traducción de dicha obra, del ruso al español, puede verse en [**4**]. En la sección 4 analizamos otras posibles influencias que pudo tener Chebyshev a la hora de redactar su artículo. Finalmente, en la sección 5 mostramos trabajos posteriores a Chebyshev en los que de una manera más o menos directa se vuelve a «redescubrir» el método (2).

2. El uso del cálculo diferencial para resolver ecuaciones de Euler

Es bien conocido que Leonhard Euler (1707–1783) es uno de los autores más prolíficos de la historia de las matemáticas. Entre los temas en los que trabajó se encuentran la teoría de números, las series infinitas o las ecuaciones diferenciales. Afortunadamente, en la actualidad la gran mayoría de sus trabajos son accesibles desde sitios tales como *The Euler archive* [**5**].

Euler también trabajó en la resolución numérica de ecuaciones algebraicas, fundamentalmente polinómicas. En el capítulo 17 de su obra *Introductio in analysin infinitorum* (véase *Opera Omnia*, Serie I volúmenes 8 y 9, [**5**]) Euler desarrolló un método, basado en el uso de series recurrentes, para encontrar las raíces de una ecuación. En dicho trabajo, Euler usaba algunos resultados de De Moivre para obtener el desarrollo en serie de una función racional. Una versión comentada y escrita con notación actual de este trabajo puede verse en [**13**].

La serie I, volumen X de la *Opera Omnia* [**5**] es un texto sobre cálculo diferencial titulado *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*[1]. Se trata de un libro escrito en

[1]Fundamentos de cálculo diferencial con aplicaciones al análisis finito y a la teoría de series.

latín y dividido en dos partes, la primera con 9 capítulos y la segunda con 18. Precisamente en el capítulo 9 de la segunda parte, en un artículo titulado *De usu calculi diferentialis in aequationibus resolvendis*[2], encontramos el «germen» de lo que nosotros hemos denominado método de Chebyshev. La referencia concreta a esta publicación es: `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E212sec2ch9.pdf`.

En las páginas 438 y 439 nos encontramos un desarrollo en el que Euler, tal vez de una manera poco rigurosa, indica una forma de aproximar la raíz de una ecuación. Con la notación actual, es como sigue:

Si α es la solución de la ecuación $f(x)=0$, entonces, el desarrollo de Taylor de $f(\alpha)$ en torno a un valor x da lugar a

$$0=f(\alpha)=f(x)+f'(x)(\alpha-x)+\frac{f''(x)}{2}(\alpha-x)^2+\frac{f'''(x)}{6}(\alpha-x)^3+\cdots$$

Sin embargo, en el trabajo de Euler la solución de la ecuación aparece escrita como

$$0=y+zp+\frac{z^2q}{2}+\frac{z^3r}{6}+\frac{z^4s}{24}+\frac{z^5t}{120}+\&c,$$

donde $\&c$ representa los términos restantes de la serie. La simbología utilizada en el citado artículo, junto con sus equivalentes actuales son: $f(x)=y$, $f'(x)=p$, $f''(x)=q$, $f'''(x)=r$, $f^{(IV)}(x)=s$ y $f^{(V)}(x)=t$, y la expresión de la raíz buscada es $\alpha=x+z$, donde

$$\begin{aligned} z = \; & -\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(x)^2f''(x)}{2f'(x)^2}-\frac{f(x)^3f''(x)^2}{2f'(x)^3}+\frac{f(x)^3f'''(x)}{6f'(x)^4} \\ & -\frac{5f(x)^4f''(x)^3}{8f'(x)^7}+\frac{5f(x)^4f''(x)f'''(x)}{12f'(x)^6}-\frac{f(x)^4f^{(IV)}(x)}{24f'(x)^5}-\&c, \end{aligned} \tag{4}$$

o, de otra forma,

$$\begin{aligned} \alpha = \; & x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(x)^2f''(x)}{2f'(x)^2}-\frac{f(x)^3f''(x)^2}{2f'(x)^3}+\frac{f(x)^3f'''(x)}{6f'(x)^4} \\ & -\frac{5f(x)^4f''(x)^3}{8f'(x)^7}+\frac{5f(x)^4f''(x)f'''(x)}{12f'(x)^6}-\frac{f(x)^4f^{(IV)}(x)}{24f'(x)^5}-\&c. \end{aligned}$$

Para determinar el valor de la solución α, Euler parte de un valor aproximado x. A partir de aquí, teniendo en cuenta la fórmula (4),

[2] Uso del cálculo diferencial para resolver ecuaciones.

Euler obtiene un término corrector z, de manera que $x + z$ sea una mejor aproximación de α.

A continuación Euler expresa z como una serie convergente

$$z = A + B + C + D + E + \&c,$$

pero sin precisar nada acerca de la naturaleza de los términos A, B, C, ... Luego de una cantidad de cálculos, sustituciones y reagrupación de términos, que parece interminable, podemos escribir los términos de dicha serie como:

$$\begin{array}{rllllll}
y = & y & & & & & \\
pz = & Ap & +Bp & +Cp & +Dp & +Ep & +\&c \\
\frac{1}{2}qz^2 = & & +\frac{1}{2}A^2q & +ABq & +ACq & +ADq & +\&c \\
 & & & & +\frac{1}{2}B^2q & +BCq & +\&c \\
\frac{1}{6}rz^3 = & & & \frac{1}{6}A^3r & +\frac{1}{2}A^2Br & +\frac{1}{2}A^2Cr & +\&c \\
 & & & & & +\frac{1}{2}AB^2r & +\&c \\
\frac{1}{24}sz^4 = & & & & \frac{1}{24}A^4s & +\frac{1}{6}A^3Bs & +\&c \\
\frac{1}{120}tz^5 = & & & & & \frac{1}{120}A^5t & +\&c.
\end{array}$$

Notemos que hemos definido

$$\begin{aligned}
A &= -\tfrac{y}{p} \\
B &= -\tfrac{y^2q}{2p^2} \\
C &= -\tfrac{y^3q^2}{2p^5} + \tfrac{y^3r}{6p^4} \\
D &= -\tfrac{5y^4q^3}{8p^7} + \tfrac{5y^4qr}{12p^6} - \tfrac{y^4s}{24p^5}.
\end{aligned}$$

Ahora, Euler agrupa los términos de la manera siguiente, sin especificar el criterio que usa para dicha agrupación. Para ser más exactos, Euler lo resume como sigue:

$$\begin{aligned}
A = &\quad -\frac{f(x)}{f'(x)} \\
B = &\quad -\frac{f(x)^2f''(x)}{2f'(x)^2} \\
C = &\quad -\frac{f(x)^3f''(x)^2}{2f'(x)^3} + \frac{f(x)^3f'''(x)}{6f'(x)^4} \\
D = &\quad -\frac{5f(x)^4f''(x)^3}{8f'(x)^7} + \frac{5f(x)^4f''(x)f'''(x)}{12f'(x)^6} - \frac{f(x)^4f^{(IV)}(x)}{24f'(x)^5}.
\end{aligned}$$

Como puede observarse, la familia de métodos que se obtiene contiene el método de Newton, para $z = A$. Otro método que extraemos de esta histórica familia es el método de Chebyshev, concretamente cuando $z = A + B$.

En la misma obra de Euler, se utiliza el método anterior para resolver la ecuación $x^5 + 2x - 2 = 0$. En este caso,

$$p = f'(x) = 5x^4 + 2, \quad q = f''(x) = 20x^3,$$

$$r = f'''(x) = 60x^2, \quad s = f^{(IV)}(x) = 120x.$$

Tomando como primera aproximación $x = 1$, se obtiene como segunda aproximación

$$\begin{aligned} z &= A + B + C + D + E \\ &= -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5 \times 1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5} \\ &= -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} + \frac{1745}{7^7} \\ &= -0.18. \end{aligned}$$

Para Euler, la solución buscada es $\alpha = x + z = 1 - 0.18 = 0.82$.

Como $\alpha = x - z$, entonces $\alpha = 1 - 0.18 = 0.82$, que es muy buena aproximación. Euler acaba de emplear un método de quinto orden de convergencia.

Esperamos que al igual que los autores, puedan identificar el espíritu del método de Chebyshev, a pesar de que Euler no truncó su serie en el segundo término, como sí lo hace Chebyshev. Probablemente Euler no se detuvo a pensar que por truncamiento de esa serie, podía obtener métodos con distinto orden de convergencia. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, Chebyshev sí que se dio cuenta de este matiz.

3. El cálculo de las raíces de ecuaciones de Chebyshev

En el mismo libro de Traub citado anteriormente, [**20**], se afirma que la familia de procesos iterativos E_m definida en (3) aparece en un trabajo que escribió Chebyshev cuando era estudiante, en 1837 o 1838. Por ese trabajo, titulado *Cálculo de las raíces de ecuaciones*, Chebyshev fue premiado con una medalla de plata por el segundo departamento filosófico (departamento de física y matemáticas) de la Universidad de Moscú, donde se encontraba estudiando. El trabajo, originalmente escrito en ruso, aparece publicado en el quinto tomo de las obras completas de Chebyshev [**3**]. La traducción al español puede encontrarse en [**4**].

Butzer y Jongmans en su artículo biográfico sobre Chebyshev corroboran esta afirmación, aunque con un ligero desajuste en las fechas. En concreto, en [**2**, p. 116] escriben:

> Algunos de los primeros trabajos de Chebyshev, escritos en ruso, no fueron enviados a revistas científicas en su tiempo, pero fueron publicados después de su muerte, principalmente en la obra recopilatoria [**10**]. Su primer artículo, escrito cuando era estudiante en 1840/41 y premiado con una medalla de plata, trata sobre la aproximación de las raíces reales de una ecuación; se trata de una versión más refinada de la fórmula de Newton-Raphson a la cual añade un término corrector.

Como bien dicen Butzer y Jongmans, algunos de sus primeros trabajos fueron publicados en la recopilación de Markoff y Sonin [**10**] de 1899. Pero otros no. En la contraportada de la reedición de [**10**] en 1952 encontramos la siguiente aclaración:

> El presente trabajo es una reimpresión de la recopilación de las obras de P. L. Chebyshev publicadas en dos volúmenes en San Petersburgo. Contiene todos los escritos matemáticos postdoctorales de Chebyshev. Una tesis doctoral, publicada en alemán con el título *Theorie der congruenzen* (San Petersburgo, 1849), pudo ser publicada como un volumen independiente.

Entre los textos no publicados en [**10**] nos encontramos, además de la citada tesis doctoral, otra tesis para optar al grado de magister, titulada *Essai d'analyse élementaire de la theorie des probabilités* y publicada en Moscú en 1845 y el trabajo en el que estamos interesados, el *Cálculo de las raíces de ecuaciones*. Hubo que esperar más de 50 años para que este trabajo viera la luz en las obras completas que se publicaron (en ruso) entre 1946 y 1951 (véase [**3**]). Y fue en el quinto volumen, publicado en 1951, dedicado a otros trabajos, donde aparece publicado el *Cálculo de las raíces de una ecuación*.

Llegados a este punto, nos gustaría destacar que el tema tratado en el *Cálculo de las raíces de una ecuación* podría considerarse como una rareza dentro del extenso campo conceptual en el que se movió Chebyshev, del que se conocen más de 80 publicaciones en temas tan diversos como la teoría de números, la probabilidad, la teoría de aproximación, el análisis o la construcción de mecanismos, aspecto este último del cual se sentía muy orgulloso (véase el artículo de Luquín [**9**] para profundizar en esta línea). Como se aprecia en sus obras completas, tanto en su tesis doctoral como en sus trabajos postdoctorales, Chebyshev no volvió a publicar nada en el campo de la resolución numérica de ecuaciones algebraicas.

Hasta donde nosotros conocemos, la única edición existente del *Cálculo de las raíces de ecuaciones* es la que aparece en ruso en el Capítulo 5 de las obras completas de Chebyshev [**3**]. El propio Traub reconoce en [**20**, p. 81] que no pudo disponer del trabajo original de Chebyshev. Nosotros mismos damos fe de la dificultad en conseguir tanto las obras completas de Chebyshev como el apartado donde aparece el *Cálculo de las raíces de ecuaciones*. Ahora bien, gracias a la colaboración de A. P. Pozhidaov (Univ. Novosibirsk) y de I. Shestakov (Univ. de Sao Paulo), pudimos hacernos con una copia del trabajo original de Chebyhsev publicado en el Tomo V de sus obras completas [**3**].

Chebyshev trata la solución de una ecuación algebraica

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{5}$$

considerándola como *la última operación del álgebra*, siguiendo el esquema: adición-sustracción; multiplicación-división; elevación a una potencia-extracción de una raíz; evaluación de un polinomio $P(x)$ o equivalentemente resolución de una ecuación de la forma (5).

En la sección I de su trabajo Chebyshev formula el objetivo de la investigación: dar un método general de búsqueda de las raíces de la ecuación (5), que incluya como casos particulares «tantos métodos conocidos como sea posible».

El autor lleva esto a cabo en la sección II. Su idea se basa en el uso de series de potencias. En concreto, dado un desarrollo de la forma

$$Y = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu X^\nu,$$

indica un procedimiento para calcular el desarrollo en serie de potencia de

$$X = \sum_{\nu=1} d_\nu Y^\nu.$$

A diferencia de Euler, Chebyshev se preocupa por especificar las regiones de convergencia. En concreto, los coeficientes d_ν se expresan fácilmente en función de c_ν:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{c_1}\\
d_2 &= -\frac{c_2}{c_1^3}\\
d_3 &= \frac{2c_2^2 - c_1c_3}{c_1^5}\\
d_4 &= \frac{-5c_2^3 + 5c_1c_2c_3 - c_1^2c_4}{c_1^7}.
\end{aligned}
$$

Esta misma idea es usada para obtener el desarrollo en serie de la función inversa, así

$$y = f(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-\alpha)^\nu, \tag{6}$$

donde

$$c_0 = \beta = f(\alpha), \quad c_\nu = \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} \qquad (\nu \geq 1),$$

de esta manera,

$$x = f^{-1}(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu (y-\beta)^\nu. \tag{7}$$

En lugar de hacer $y = 0$ en la fórmula (6) y resolver la ecuación obtenida con respecto a x, se puede sustituir $y = 0$ en la fórmula (7), entonces la solución de dichas ecuaciones se expresa explícitamente como la serie

$$x = \alpha + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu d_\nu \beta^\nu.$$

Partimos de una aproximación α a la solución de $f(x) = 0$. Sea

$$y = f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^\nu(\alpha)}{\nu} (x-\alpha)^\nu$$

y de este modo

$$x = f^{-1}(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu (y-\beta)^\nu,$$

donde $\beta = f(\alpha)$. La idea subyacente en el trabajo de Chebyshev es que encontrar x tal que $f(x) = 0$, es lo mismo que encontrar $f^{-1}(0)$ como

$$f^{-1}(0) = \alpha + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu d_\nu \beta j,$$

partiendo de este hecho, se obtiene el desarrollo

$$
\begin{aligned}
x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3 \left(\frac{f''(\alpha)^2}{2f'(\alpha)^2} - \frac{f''(\alpha)}{6f'(\alpha)}\right) \\
- \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^4 \left(\frac{5f''(\alpha)^2}{8f'(\alpha)^3} - \frac{5f''(\alpha)f'''(\alpha)}{12f'(\alpha)^2} + \frac{f^{(iv)}(\alpha)}{24f'(\alpha)}\right) + \dots .
\end{aligned}
\tag{8}
$$

En la sección III, Chebyshev obtiene el *método de las tangentes* de Newton. En la sección IV Chebyshev da una expresión del error a partir del desarrollo en fracción continua de x,

$$
x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \dots,}}
$$

al expresarla como la convergencia de una fracción finita.

En la sección V se aplica la fórmula (8) para obtener un *método de segundo orden*. En (8) se sustituye $f(x)$ por el polinomio de segundo grado $f_1(x)$ que cumple las condiciones

$$
f_1(\alpha) = f(\alpha),\ f_1'(\alpha) = f'(\alpha),\ f_1''(\alpha) = f''(\alpha).
$$

Como valor aproximado de x se toma una raíz del polinomio $f_1(x)$

$$
\begin{aligned}
x &\approx \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{6}\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3 \frac{3f''(\alpha)^2}{f'(\alpha)^2}, - \dots \\
&= \alpha + \frac{-f'(\alpha) + \sqrt{f^2(x) - 2f(\alpha)f''(\alpha)}}{f'(\alpha)}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

La expresión del error

$$
\frac{1}{6}\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{1}{24}\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^4 \frac{8f''(\alpha)f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} + \dots ,
$$

se reduce solo al primer término de tercer grado con respecto a $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$. Para esto se supone, además, que las derivadas f', f'' y f''' no son idénticamente nulas en ningún intervalo de α a α_1 que contenga la raíz x.

En la sección VI Chebyshev toma los tres primeros términos en la fórmula (8) y obtiene la expresión aproximada

$$
x \approx \alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)},
$$

con la estimación del error

$$|x - \alpha_1| \leq \text{máx} \left| f(\alpha)^3 \left(\frac{f'(\alpha)^2}{6f(\alpha)^2} - \frac{f''(\alpha)}{6f(\alpha)^2} \right) \right|.$$

Chebyshev demuestra, por ejemplo, operando con fracciones de 50 cifras, la rapidez de las sucesivas aproximaciones a x mediante este método.

Para mostrar la importancia de este método lo aplicaremos a la conocida ecuación de Newton

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Al sustituir 2 y 2.1 en dicha función y sus derivadas, encontramos las siguientes líneas de signos:

	$f(\alpha)$	$f'(\alpha)$	$f''(\alpha)$	$f'''(\alpha)$
	$-$	$+$	$+$	$+$
2	1	10	12	6
	$+$	$+$	$+$	$+$
2.1	0.061	11.23	12.6	6

Se observa que la raíz se encuentra entre 2 y 2.1. La expresión

$$\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha \ldots \alpha_1)} \right)^3 \left[\frac{(f''(\alpha \ldots \alpha_1))^2}{2(f'(\alpha \ldots \alpha_1))^2} - \frac{f'''(\alpha \ldots \alpha_1)}{6f'(\alpha \ldots \alpha_1)} \right],$$

con el mayor valor es igual a

$$\begin{aligned} (0.0061)^3 \left[\frac{(12.6)^2}{2(102)} - \frac{6}{6(11.23)} \right] &= (0.0061)^3 \left(\frac{(1.26)^2}{2} - \frac{1}{11.23} \right) \\ &< (0.000000216)(0.85 - 0.09) < 0.00000023. \end{aligned}$$

Partiendo de este hecho, el nuevo valor aproximado de la raíz se diferencia del verdadero en menos que 0.0000003, y por consiguiente, por lo menos las seis primeras cifras decimales del valor encontrado de la raíz son correctas.

Así, calculando hasta las cienmillonésimas partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \\ &= 2.1 - \frac{0.061}{11.23} - \left(\frac{0.061}{11.23} \right)^2 \frac{12.6}{2(11.23)} \\ &= 2.10000000 - 0.00543187 - 0.00001654 \\ &= 2.09455159. \end{aligned}$$

$\Delta_1 = x - \alpha_1$ es un valor negativo, luego $\alpha_1 = 2.09455159$ es mayor que la raíz, pero su diferencia con el valor verdadero es menor que 0.0000003, por consiguiente, 2.0945512 es el límite menor, y en 2.094551 todas las cifras son correctas.

Al repetir este método una vez más, encontramos 16 cifras correctas; α_1 será igual a 2.0945514815423265, y la diferencia entre este valor y el verdadero es menor que 0.00000000000000001. Luego, sustituyendo 2.0945514815423265 en nuestra fórmula en vez de α_1, encontramos el tercer valor aproximado a x, es decir

$$
\begin{aligned}
&2.0945514815423265 - \frac{f(2.0945514815423265)}{f'(2.0945514815423265)} \\
&- \left\{ \frac{f(2.094551\ldots)}{f'(2.094551\ldots)} \right\}^2 \frac{f''(2.0945514\ldots)}{2f'(2.0945514\ldots)} \\
&= 2.0945514815423265 \\
&+ \frac{0.0000000000000000102107496044367954543249518586537 5}{11.161437726493464726445633 09780675} \\
&- \left\{ \frac{0.000000000000000102\ldots}{11.161437\ldots} \right\}^2 \frac{12.5673088892539590}{2 \times 11.161437726493464726445633 0} \\
&= 2.09455148154232650000000000000000000000000000000000 \\
&+ 0.00000000000000009148238654057930767544341990572422 \\
&- 000000000000000000000000000000000470158602419672514 \\
&= 2.09455148154232659148238654057930397385739570899908.
\end{aligned}
$$

Hemos visto que el máximo valor de

$$
\frac{(f''(\alpha \ldots \alpha_1))^2}{2(f'(\alpha \ldots \alpha_1))^2} - \frac{f'''(\alpha \ldots \alpha_1)}{6f'(\alpha \ldots \alpha_1)}
$$

es 0.76. Ahora, hace falta calcular $\left\{ \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha \ldots \alpha')} \right\}^3$ y de nuevo es menor que

$$
\begin{aligned}
&0.0000000000000000092^3 \\
&\quad < 0.000000000000000000000000000000000000000000000000000008.
\end{aligned}
$$

De manera que, el tercer valor aproximado de la raíz se diferencia del verdadero en menos que

$$
0.000000000000000000000000000000000000000000000000000007,
$$

es decir

$$
< \frac{1}{100000000000000000000000000000000000000000000000000000}.
$$

Este ejemplo nos muestra la importancia del método que utilizamos para el cálculo de raíces. Fourier resuelve esta ecuación según su método y ha obtenido después de cinco operaciones solo 32 cifras correctas, nosotros en tres operaciones hemos encontrado 48. Como sabemos, en la práctica lo más usual es conformarse con 5, 6, ... cifras correctas. Nosotros obtenemos esta precisión con una sola iteración.

La aproximación al verdadero valor de la raíz será aun más rápida, si escogemos para su cálculo 5, 6 o más términos de la serie (9). Sin duda, el cálculo del nuevo valor de la raíz no sería tan fácil como lo hemos visto en el ejemplo anterior, pero con todo lo que se puede suponer, es bastante más simple que la aproximación de tercer o cuarto orden. Así, si aproximamos el verdadero valor de la raíz por la fórmula,

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha')}\right)^2 \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} - \left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3 \left[\frac{f''(\alpha)^2}{2f'(\alpha)^2} - \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right],$$

el número de cifras correctas, en general, va a incrementarse sucesivamente en 4 veces.

Las aplicaciones de la serie (9) a las fracciones continuas también dan multitud de métodos particulares de cálculo de raíces.

4. Influencias en el trabajo de Chebyshev

Después de lo desarrollado en las secciones 2 y 3 parece claro que Chebyshev conocía la obra de Euler. El hecho de haber trabajado, bajo la supervisión de Bunyakovsky, en la edición completa de las obras de Euler sobre teoría de números, no parece tener relevancia en este aspecto, ya que fue realizado con posterioridad (en 1849) a que escribiera su *Cálculo de las raíces de ecuaciones*. No obstante, la carrera académica de Chebyshev se desarrolló bajo el legado que Euler dejó en San Petersburgo, donde pasó una buena parte de su vida (de 1727 a 1741 y de 1766 a 1783) y donde dejó un gran número de discípulos. Es más, citando de nuevo a Butzer y Jongmans [**2**, pp. 133–134] destacamos que:

> Chebyshev y Euler tenían mucho en común como matemáticos. Ambos estaban interesados en una gran variedad de problemas, desde la teoría de números a la ingeniería. Ambos eran plenamente conscientes de lo necesaria que era la comunicación entre la teoría y las aplicaciones. Ambos buscaron la solución más eficiente para los problemas, con el descubrimiento de algoritmos que o bien dieran una solución numérica exacta o, al menos, una buena aproximación.

Aunque, en nuestra opinión, está claro que Chebyshev estuvo influenciado por la obra de Euler, no encontramos en el *Cálculo de las raíces de una ecuación* ninguna referencia explícita a Euler. Podemos disculpar a Chebyshev ya que el citado trabajo no es ningún artículo de investigación y como ya hemos comentado, se trata de un trabajo realizado durante su etapa de estudiante. No obstante, sí que encontramos citas explícitas a otros importantes matemáticos de la época. En concreto a Sir Isaac Newton (1642–1727), J. L. Lagrange (1736–1813), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), Jacques Charles Francois Sturm (1803–1855) y Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky (1801–1862).

Una de las múltiples maneras en que Chebyshev justifica la búsqueda de su método, es comparándolo con los métodos conocidos en su época. Las referencias a Fourier son las más numerosas. De entrada, inicia su artículo con la siguiente cita de Fourier:

> Si existe un método general para la resolución de ecuaciones, este debe ser análogo a las operaciones, las cuales no serían más que casos particulares de dicho método.

Con esta cita de Fourier, Chebyshev deja marcadas sus pretensiones en cuanto a la búsqueda de un método general para resolver ecuaciones algebraicas, que es el objetivo fundamental de su trabajo. De este modo, una y otra vez encontraremos en su escrito, comentarios como el siguiente:

> Indiscutiblemente no se puede perder la esperanza de encontrar un método más cómodo que el de Fourier y así hacer más sencillo el encontrar la solución de una ecuación.

Nos gustaría destacar que en la sección III, Chebyshev habla de los *métodos de Newton y Fourier*. Pero cuando Chebyshev habla del método que se dice de Fourier, realmente se está refiriendo al mismo método que actualmente conocemos como método de Newton, pero al que se le ha aportado una cota del error. Entre las aportaciones de Chebyshev está la de mejorar dicha estimación del error:

> Es evidente la ventaja de nuestro método ante el método de Fourier. De una operación él obtenía solo dos cifras correctas, sin embargo nosotros cuatro. Y si repetimos nuestro método, como lo hizo Fourier, unas cuatro veces más, entonces hubiéramos obtenido por lo menos 64 cifras correctas mientras que él no pudo encontrar más que 32.

Por otra parte, en la sección IV del *Cálculo de las raíces de ecuaciones* Chebyshev se dedica a analizar en profundidad lo que él denomina como *método de Lagrange*. Por dicho método se refiere al aparecido en el texto *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, publicado por primera vez por Lagrange en 1798 [**7**]. La citada obra es un compendio de trabajos sobre la teoría de ecuaciones algebraicas en el que aparecen, entre otros, métodos para separar las raíces reales de una ecuación algebraica o métodos de aproximación de raíces mediante fracciones continuas (para más información sobre la obra de Lagrange, se pueden consultar las referencias [**8**], [**12**]).

La referencia de Chebyshev al texto de Lagrange no es directa. Lo hace de manera indirecta, a través de las *Lecciones de análisis algebraico y trascendente* de Ostrogadsky. En concreto, hace una comparativa entre el método de fracciones continuas de Lagrange y su método para resolver la ecuación $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Ahora, recogemos la siguiente cita de Chebyshev que aparece al final de la sección IV:

> Del mismo modo, según este método es fácil determinar cuantos denominadores tenemos que encontrar de antemano, aplicando el método general de fracciones continuas, para que el método de *Lagrange* tenga éxito.
>
> Parando el desarrollo (8) en un término cualquiera, nuestro método, estima la aproximación obtenida mediante la forma de Lagrange del resto de la serie de Taylor. Este impecable razonamiento permite evitar la cuestión de la convergencia, que en aquel tiempo difícilmente se podía afrontar.

Curiosamente Chebyshev conocía en profundidad la utilidad del método de Sturm, constancia que puede identificarse en esta cita textual:

> En este apartado no entraremos en los detalles aplicados en las técnicas de separación de raíces, las cuales son operaciones fácilmente realizables según los métodos de Sturm.

Como se pone de manifiesto en [**17**], Sturm era discípulo de Fourier y por tanto, buen conocedor de su obra. La obra de Sturm tuvo gran repercusión en los ambientes científicos de la época. Su teorema fue presentado a la *Académie Royale des Sciences* de París en 1829 y obtuvo el premio de dicha academia en 1834, aunque no se publicó hasta seis años más tarde, en 1835. También es conocido que Sturm colaboró activamente con otros científicos de la época, en especial con Joseph Liouville.

Curiosamente, Liouville fue a su vez amigo personal de Chebyshev, con el cual coincidía en varias ocasiones en sus visitas a Francia.

El conocido como *teorema de Sturm* trata sobre el cálculo de las raíces reales de una ecuación numérica. En concreto (véase [**16**] por ejemplo), establece un procedimiento para determinar el número de raíces reales de una ecuación $f(x) = 0$ entre dos valores a y b, en función del número de cambios de signo de la sucesión de funciones auxiliares de Sturm

$$f(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{k-1}(x), f_k(x)$$

evaluadas en $x = b$ y en $x = a$.

Este método es utilizado para aislar las raíces reales de una ecuación polinómica $f(x)$. Si la raíz no se encuentra directamente, se debe utilizar algún método de aproximación en los intervalos donde se encuentren las raíces. Este hecho pone en evidencia que, en ocasiones este método puede resultar un tanto laborioso.

En la sección V, es donde Chebyshev menciona algunos errores cometidos en trabajos similares de la autoría de Ostrogradsky, específicamente donde dice:

> Sin duda alguna, todas estas conclusiones se deducen fácilmente de nuestra fórmula, por lo que este estudio tan detallado es casi innecesario; pero yo lo hice únicamente para refutar la falsa opinión sobre aproximación de segundo orden de nuestro académico Ostrogradsky o tal vez solo del redactor a sus lecciones. La última me parece la más probable y por eso a partir de aquí me refiero a G. Burachek y además en lo siguiente él mismo se lo atribuye a sí mismo.

Según las Lección IV de Ostrogradsky, sobre lecciones de análisis algebraico y trascendente, resolver una ecuación significa, además, de qué modo hay que realizar las operaciones. Esta acción se divide en dos pasos: el primer paso es la separación de raíces. El siguiente, después de separar las raíces, es hallar concretamente la solución de la ecuación.

Ostrogradsky fue profesor para los cadetes de la Marina, en el Instituto de Ingenieros y en la Escuela de Artillería de San Petersburgo. Su obra más importante consiste en el desarrolló de un método para calcular la integral de una función racional cuando el denominador tiene raíces múltiples. Este método permite separar la parte racional de la integral sin necesidad de descomponer el integrando en fracciones simples.

5. El método de Chebyshev «redescubierto»

La familia de procesos iterativos definida en (3) ha sido descubierta de forma independiente por muchos autores. En [**19**] podemos encontrar una serie de referencias y notas históricas que justifican esta afirmación.

De entre estos trabajos podemos destacar, sin duda, los de E. Schröder [**14**], [**18**] y J. König [**6**]. El propio Traub afirma en [**19**] que el trabajo de Schröder es una «mina de oro de información sobre procesos iterativos». En efecto, Schröder distingue dos familias de métodos iterativos para resolver ecuaciones algebraicas. En ellas podemos encontrar la mayor parte de los métodos iterativos más conocidos (Newton, Halley, Chebyshev, etc.). Stewart [**18**], traductor al inglés del trabajo original de Schröder, citaba palabras de Householder para poner de manifiesto la importancia de la obra de Schröder:

> A. S. Householder solía afirmar que se puede evaluar un trabajo sobre cálculo de raíces de ecuaciones algebraicas buscando una cita de Schröder en el artículo. Si falta dicha cita, es que, probablemente, el autor ha redescubierto algo ya conocido por Schröder. Esta observación puede parecer un poco exagerada, puesto que se han hecho muchas cosas con posterioridad al trabajo de Schröder; sin embargo, se puede afirmar sin género de dudas que el artículo de Schröder contiene, por primera vez, una descripción general y el análisis sistemático de los algoritmos para resolver ecuaciones.

Otro artículo, más reciente, en el que se pone de manifiesto la importancia de la obra de Schröder es el de Petković et al. [**11**]. En él ponen de manifiesto que los métodos de Schröder han sido redescubiertos por diferentes autores y expresados de diferentes formas durante los últimos 130 años. Además, en este mismo artículo los autores prueban la equivalencia entre las familias de métodos de primer y segundo tipo desarrollados por Schröder.

De forma resumida y con una notación actualizada, la técnica de Schröder para desarrollar su familia de métodos de primer tipo es la siguiente. Sea α una raíz simple de una función $f(x)$ y a su vez un punto fijo de una cierta función de iteración $F(x)$, es decir, $f(\alpha) = 0$ y $F(\alpha) = \alpha$. La técnica de Schröder se apoya en el hecho de que si

$$F'(\alpha) = F''(\alpha) = \cdots = F^{(p-1)}(\alpha) \text{ y } F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

entonces la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$ converge a α con orden de convergencia p.

Si se supone que $F(x)$ es de la forma $F(x) = x - \varphi(x)$, entonces α es un punto fijo de $F(x)$ si y solo si $\varphi(\alpha) = 0$, es decir, α es una raíz de $f(x)$ y de $\varphi(x)$. Por lo tanto, podemos suponer que $\varphi(x) = f(x)\varphi_1(x)$ y, en consecuencia, $F(x) = x - f(x)\varphi_1(x)$.

Si se busca ahora un algoritmo con convergencia cuadrática, se deberá cumplir que $F'(\alpha) = 0$, o equivalentemente, $f'(\alpha)\varphi_1(\alpha) = 1$. La idea de Schröder es asumir que

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{f'(x)} + f(x)\varphi_2(x).$$

Por lo tanto,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - f(x)^2\varphi_2(x).$$

Nos podemos preguntar ahora por cómo debería ser la función $\varphi_2(x)$ para que el método $x_{n+1} = F(x_n)$ tenga convergencia cúbica, es decir, $F''(\alpha) = 0$, lo cual es cierto si

$$\varphi_2(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)^3}.$$

Esta ecuación sugiere tomar como

$$\varphi_2(x) = \frac{f''(x)}{2f'(x)^3} + f(x)\varphi_3(x)$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)^2 f''(x)}{2f'(x)^3} - f(x)^3\varphi_3(x) \\ &= x - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x)\right)\frac{f(x)}{f'(x)} - f(x)^3\varphi_3(x). \end{aligned}$$

Nótese que tomando $\varphi_3(x)$ constantemente igual a cero, obtenemos el método de Chebyshev. Si seguimos repitiendo el proceso, buscando ahora una función $\varphi_3(x)$ para que se cumpla $F'''(\alpha) = 0$ y así sucesivamente, se va obteniendo una familia de procesos iterativos en los que se va incrementando el orden de convergencia. En concreto, Schröder deduce los conocidos como métodos de primer tipo [**11**], [**18**]:

$$E_p(x) = x + \sum_{\nu=1}^{p-1} (-1)^\nu \frac{f(x)^\nu}{\nu!}(f^{-1})^{(\nu)}(f(x)),$$

donde f^{-1} es la inversa de f. Schröder afirma que la sucesión $x_{n+1} = E_p(x_n)$ converge a α con orden de convergencia p.

Siendo un poco más riguroso, respecto a la deducción de la familia obtenida por Schröder, este punto precisa la inclusión de los aportes de König, debido a que hoy día, el desarrollo natural de los resultados de Schröder, tienen detrás el teorema de König [**6**].

El teorema de König establece que si una función analítica tiene un polo simple en el radio de convergencia de su serie de potencia, entonces la razón de los coeficientes de su serie de potencias converge hacia el polo. La aplicación de este importante resultado para determinar raíces, es como sigue: la función

$$\frac{1}{f(x-\epsilon)} = \mathcal{A}_0^{(0)}(x) + \mathcal{A}_1^{(0)}(x)\epsilon + \mathcal{A}_2^{(0)}(x)\epsilon^2 + \cdots$$

tiene un polo en $\epsilon = x - \alpha$, donde α es una raíz de $f(x) = 0$, que es más cercana a x. Si α es única y simple, entonces por el teorema de König

$$\frac{\mathcal{A}_{\omega-1}^{(0)}(x)}{\mathcal{A}_\omega^{(0)}(x)} \to x - \alpha.$$

Ahora, consideremos la expansión relacionada

$$\frac{x-\epsilon}{f(x-\epsilon)} = \mathcal{A}_0^{(1)}(x) + \mathcal{A}_1^{(1)}(x)\epsilon + \mathcal{A}_2^{(1)}(x)\epsilon^2 + \cdots .$$

Es muy fácil verificar que

$$\mathcal{A}_\omega^{(1)}(x) = x\mathcal{A}_\omega^{(0)}(x) - \mathcal{A}_{\omega-1}^{(0)}(x).$$

Por consiguiente, si nos fijamos

$$F_\omega(x) = \frac{\mathcal{A}_\omega^{(1)}(x)}{\mathcal{A}_\omega^{(0)}(x)} = x - \frac{\mathcal{A}_{\omega-1}^{(0)}(x)}{\mathcal{A}_\omega^{(0)}(x)},$$

se deduce que

$$\lim_{\omega\to\infty} F_\omega(x) = \alpha,$$

el cual según la terminología de Schröder, es un método del segundo grupo. Además, se puede demostrar que la iteración $x' = F_\omega(x)$ es localmente ω-convergente. Este es el desarrollo de Schröder, con la particularidad de que solo se limitó a funciones racionales $f(x)$ cuyas raíces son $\alpha, x_2, \ldots, x_n$.

Para finalizar, queremos resaltar que debido a que en la literatura matemática aparecen múltiples referencias, en las que se atribuye la expresión (2) a varios autores, como hemos citado en párrafos anteriores, no hemos tenido otra alternativa que, acudir a las obras originales de varios de los autores a los cuales se les atribuye. Todo esto, con la intención de verificar si efectivamente, entre sus trabajos se encuentra o se puede deducir la existencia de la expresión en cuestión.

Curiosamente, en las obras completas de Euler (véase, [**5**]), específicamente en La serie I, volumen X de la *Opera Omnia* (detallamos este hecho en la sección 2), aparece un libro escrito en latín y dividido en dos partes, en el capítulo 9 de la segunda parte encontramos lo que hemos convenido en nombrar como el «germen» de lo que nosotros hemos denominado método de Chebyshev. Sin embargo, a pesar de que la expresión del método de Chebyshev resulta ser un caso particular de la familia (3), Euler no se detuvo a entrar en detalles tan puntuales como las regiones de convergencia, el orden de convergencia, ni menciona la existencia de métodos de orden superior en la familia de métodos que describe en (3), no obstante estos hechos sí quedan bastante claros en el trabajo de Chebyshev.

Bibliografía

1. E. Bodewig, «On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation», *Quart. Appl. Math.*, vol. 7, 1949, 325–333.
2. P. Butzer y F. Jongmans, «P. L. Chebyshev (1821–1894). A guide to his life and work», *J. Approx. Theory*, vol. 96, 1999, 111–138.
3. P. L. Chebyshev, «Complete collected works», Izdatel'stvo Akad. Nauk SSR, Moscow/Leningrad 1946/1951 [Vol. I (1946), 342 pp. Vol. II (1947), 520 pp. Vol. III (1948), 414 pp. Vol. IV (1948), 255 pp. Vol. V, other works, biographical materials (1951), 474 pp.].
4. M. García-Olivo y J. M. Gutiérrez, *La obra «El cálculo de las raíces de una ecuación» de P. L. Chebyshev*, Editorial Académica Española, LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG., Alemania, 2012.
5. D. Klyve, L. Stemkoski y E. Tou, «The Euler archive», The works of Leonhard Euler online. `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/`.
6. J. König, «Über eine eigenschaft der potenzreihen», *Math. Ann.*, vol. 23, 1884, 447–449.
7. J. L. Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Oeuvres de Lagrange éd.*, tomo 3, Gauthier-Villars, París, 1808.
8. R. Laubenbacher, G. McGrath y D. Pengelley, «Lagrange and the solution of numerical equations», *Historia Math.*, vol. 28, núm. 3, 2001, 220–231.

9. F. Luquín, «Sobre dos no-descubrimientos matemáticos de P. L. Chebyshev», *La Gaceta de la RSME*, vol. 11, núm. 2, 2008, 279–289.
10. A. Markoff y N. Sonin, *Oeuvres de P. L. Tchebychef, 2 Vols.*, St. Petersbourg, 1899/1907, New York, 1952.
11. M. S. Petković, L. D. Petković y D. Herceg, «On Schröder's families of root-finding methods», *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 233, 2010, 1755–1762.
12. F. M. Rodríguez-Vásquez, «Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico», Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca, 2010.
13. E. Sandifier, «Ed Sandifier's how Euler did it. The Mathematical Association of America, `http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html`».
14. E. Schröder, «Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen», *Math. Ann.*, vol. 2, 1870, 317–365.
15. M. Shub y S. Smale, «Computation complexity: O the geometry of polynomilas and a theory of cost, I.», *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, vol. 18, 1985, 107–142.
16. H. B. Sinaceur, «Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de Ch F Sturm», *Rev. Histoire Sci.*, vol. 41, núm. 2, 1988, 99–132.
17. ———, *L'Oeuvre algébrique de Charles François Sturm, en Collected Works of Charles François Sturm*, 13–24, Birkhäuser Verlag, Basilea, 2009.
18. G. W. Stewart, «On Infinitely Many Algorithms for Solving Equations (traducción al inglés del artículo original de Schröder). *College Park, University of Maryland, Institute for Advanced Computer Studies, Department of Computer Science* (1993)», Accesible por ftp anónimo desde `http://www.thales.cs.umd.edu` en el directorio `http://www.pub/reports`.
19. J. F. Traub, «On a class of iteration formulas and some historical notes», *Comm. ACM*, vol. 4, núm. 3, 1961, 276–278.
20. ———, *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, 1964.