

Códices texcocanos y polígonos irregulares

C. E. Garza-Hume

Instituto de Investigaciones en Matemáticas
Aplicadas y en Sistemas

Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México, México

clara@mym.iimas.unam.mx,

M. C. Jorge

Instituto de Investigaciones en Matemáticas
Aplicadas y en Sistemas

Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México, México

y
A. Olvera

Instituto de Investigaciones en Matemáticas
Aplicadas y en Sistemas

Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México, México

Introducción

Esta historia se sitúa en el ex Reino de Texcoco del siglo dieciséis, pero no incluye armas, guerras o sacrificios humanos sino catastros y geometría. Los códices de Santa María Asunción [16] y Vergara [1], provenientes de Tepetlaoztoc, Texcoco, son los únicos documentos prehispánicos conocidos hasta el momento que contienen registros de terrenos agrícolas con las medidas de sus lados y sus correspondientes áreas. Son un ejemplo de catastro prehispánico cuya información es mucho más completa que los catastros españoles de la época (véase [13]). El estudio de la agrimensura acolhua (texcocana) ha sido un campo fértil para la aplicación de la geometría y esta, a su vez, ha confirmado la interpretación de la pictografía contenida en los códices.

Cabe aclarar que ni los códices, ni ningún otro documento del que tengamos conocimiento, contienen información acerca de los métodos utilizados para obtener los datos de longitudes y áreas. Por este motivo,

nuestro propósito es analizar la factibilidad y exactitud de dichos datos desde el punto de vista de la matemática actual.

1. Antecedentes

La historia comienza cerca de 1539 en el Valle de México. Cuando en 1521 cayó el Imperio Azteca, la tierra y sus habitantes fueron divididos por los conquistadores en un sistema llamado *encomienda*. Los nativos se volvieron *encomendados* y los conquistadores *encomenderos*; los primeros debían trabajar y rendir tributos a los segundos. El pueblo de Tepetlaoztoc (véase la figura 1) pasó por varios encomenderos, desde el primero de ellos que fue Hernán Cortés, hasta llegar a Gonzalo de Salazar en la fecha que nos ocupa. Este fue un encomendero particularmente cruel y demandaba de sus encomendados tributos excesivos. Pero, ¿cómo podían probar que estos tributos eran excesivos? Decidieron hacerlo a través de los cauces legales y meter una demanda ante la Audiencia de México presentando los códices Santa María Asunción y Vergara. En ellos mostraban la información no solo de los miembros de la encomienda, los códices también incluían el área cultivable, y más aún, como cada terreno estaba identificado por su tipo de suelo entonces el rendimiento de los terrenos estaba implícitamente incluido.

Lo atractivo para nosotros es que aquí interviene directamente la matemática en una demanda legal, quizá la primera de este tipo en la Nueva España.

Los códices fueron escritos entre 1539 y 1544, durante la era temprana de la conquista. Sin embargo, los estudiosos han concluido que la tipografía, los glifos y la lógica de los códices son prehispánicos, es decir que los códices son copias de documentos anteriores a la conquista y que datan quizá de la época de Nezahualcóyotl.

El deambular de estos códices dos siglos después de su creación es incierto; el Vergara aparece en la colección Boturini (1743) y de allá, inexplicablemente, se vuelve parte de la Biblioteca Nacional de Francia donde permanece hasta hoy. El Santa María Asunción es parte de la colección de libros raros de la Biblioteca Nacional de México localizada en la Ciudad Universitaria de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Como en todas las culturas mesoamericanas, la numeración utiliza base 20; los acolhuas usaron una raya para el número uno, cinco rayas verticales unidas arriba por una horizontal para el número 5 y un punto para el 20. Además utilizaron medidas fraccionarias identificadas por glifos de mano, corazón y flecha como se muestra en la figura 2. La interpretación de las fracciones sigue en discusión porque no se



Figura 1. Lago y región de Texcoco.

han encontrado fuentes históricas que indiquen sus valores precisos. Usualmente la flecha se toma como $1/2$. Nosotros hemos interpretado el corazón como $2/5$ y la mano como $3/5$.

El uso de fracciones en las medidas de los lados de los terrenos muestra una característica más de los acolhuas, su minuciosidad; y sin embargo todas las áreas registradas en los códices son números enteros. La unidad de longitud utilizada por los acolhuas se denomina *tlalcuahuitl*, «vara para medir tierras o heredades» (*T* de ahora en adelante) que equivale a 2.5 metros y se encuentra en la obra de Ixtlilxóchitl cuando describe las medidas del palacio de Nezahualcóyotl en [5].

La figura 3 muestra un ejemplo de las tres secciones de los códices: censo, perímetros y áreas. El glifo de cabeza representa al jefe de la casa y el glifo central de cada terreno es el tipo de suelo. Obsérvese que los registros tienen el mismo glifo de cabeza (llamado onomástico) y el *milcocolli* y el *tlahuelmantli* tienen el mismo número de terrenos, por tanto los registros muestran los terrenos del mismo jefe de casa. El *milcocolli*, la sección de los códices que contiene información sobre los

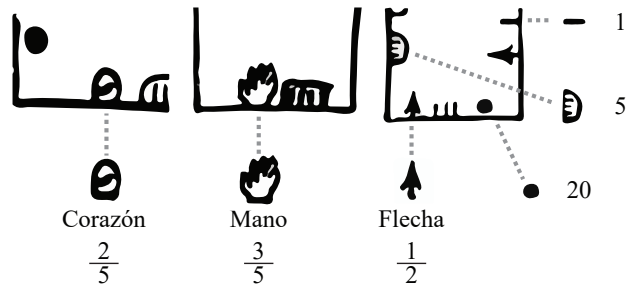


Figura 2. Unidades acolhuas.

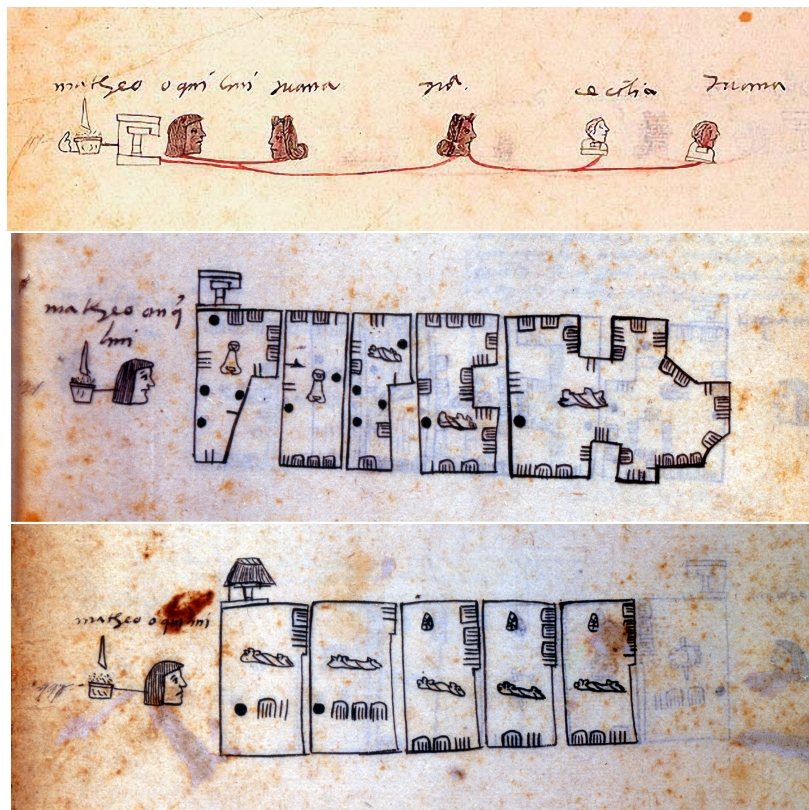


Figura 3. Ejemplos de las tres secciones del códice Santa María Asunción: *Tlancaoyotl* o censos, *milcocolli* o perímetros y *tlahuelmantli* o áreas. Reproducido con permiso de la Biblioteca Nacional de la Universidad Nacional Autónoma de México.

las longitudes de los lados de los terrenos, es fácil de interpretar: cada lado tiene su longitud indicada con la numeración acolhua. Sin embargo la información del *tlahuelmantli* es distinta y fue ignorada durante siglos por no haberse podido descifrar.

Algunos estudiosos extranjeros publicaron resultados de sus investigaciones sobre el código Vergara desde el siglo diecinueve, pero el parteaguas para un estudio matemático de ambos códigos es el trabajo de Herbert Harvey y Barbara Williams publicado en *Science* en 1980. Ellos lograron descifrar la sección del *tlahuelmantli* que nadie había podido interpretar. La clave que permitió a Harvey y Williams leer la sección del *tlahuelmantli* fue la notación *ad hoc* que usaron los acolhuas para escribir los registros de áreas. Todos los registros de áreas están escritos en rectángulos de igual tamaño a veces con una pestaña resaltada en el vértice superior derecho. Los números solo se escriben en tres lugares: en la pestaña, sobre el margen inferior y en el centro del rectángulo, pero cuando hay un registro sobre el margen inferior no lo hay en el centro y viceversa. Además notaron que los números en el margen inferior nunca tienen puntos y los centrales siempre comienzan con un punto. Encontraron que la pestaña es el lugar de las unidades, el margen inferior el de las veintenas y el centro es el de números mayores o iguales a 400. De aquí que la lectura consiste de multiplicar por uno el número de la pestaña, por 20 el del margen inferior y también por 20 el número central solo que como los números centrales siempre tienen un punto (veinte) o más, el producto es mayor o igual a 400.

Así, si se quiere asentar un área de $565 T^2$ en el formato de rectángulo utilizada por los acolhuas, se descompone $565 = 28 \times 20 + 5$ y se escribe 28 en el centro y 5 en la pestaña (véase la figura 4.) Si por otro lado se quiere registrar un área de 348 se descompone como $17 \times 20 + 8$ y se dibuja 17 en la parte inferior y 8 en la pestaña. Harvey y Williams llegaron a esta interpretación gracias a un gran número de terrenos cuadrados de lado $20 T$ cuya representación en el *tlahuelmantli* es un rectángulo con un único punto al centro y cuya lectura arroja un área de $400 T^2$. Asimismo, los terrenos rectangulares de lados 20×10 , en el *tlahuelmantli* se escriben como un rectángulo con únicamente 10 rayas sobre el margen inferior. Los autores le llaman «notación posicional» pero en el sentido estricto de la matemática no es así pues los acolhuas no tenían un cero y no usaron la segunda potencia de 20 en el lugar central que es lo que correspondería. Sin embargo para fines de manejo y control de la tierra y para hacer la información accesible a cualquiera, es una notación muy eficiente. Adicionalmente, cuando el terreno tiene área menor a $400 T^2$, el *tlacuilo* (pintor) dibuja una pequeña mazorca de maíz en el centro del rectángulo, debajo del margen superior; de esta forma es posible identificar rápidamente los terrenos menores a *una medida de tierra* que corresponde a $20 \times 20 T^2$.

De estos resultados, Harvey y Williams concluyeron que el *tlahuelmantli* es la sección del registro de las áreas de los terrenos del *milcocolli*. Lo sorprendente es que la correspondencia de las áreas de cuadrados y

rectángulos con la fórmula **lado por lado** da testimonio de la forma acolhua de medir superficies, análoga a la actual, que consiste en definir la unidad de superficie como el cuadrado de la unidad de longitud. De esta correspondencia se desprende que las áreas del *tlahuelmantli* están dadas en unidades T^2 ; esto es una abstracción de la idea de área mucho más avanzada que la existente en España en el siglo dieciséis, cuando las unidades de superficie para el uso civil, estaban definidas en términos de muy diversos factores (tiempo, caballerías, ganado mayor, peonías, semillas, etc.) y sin valores unificados.

También se han encontrado evidencias de que los acolhuas utilizaron sus fracciones en el cálculo de áreas; estos resultados se encuentran en [20] en donde se describe una aritmética similar a la utilizada en las clases de congruencias para manipular las fracciones en el cálculo de áreas. Otros aspectos del código Vergara fueron también estudiados en [21].

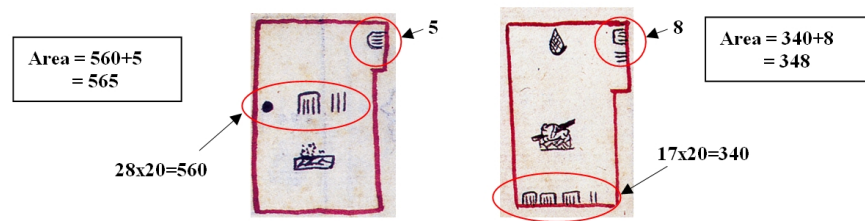


Figura 4. Cómo leer el *tlahuelmantli*.

Las propuestas de interpretación del significado de los números en los registros del *milcocolli* y del *tlahuelmantli* parecen plausibles, pero ¿son correctas?

Para contestar esta y otras preguntas fue necesario acudir a la geometría euclidiana para revisar nuestros conocimientos sobre el cálculo de áreas de las figuras planas. En este proceso surgieron nuevas preguntas y resultados interesantes en la búsqueda de respuestas. Presentamos estos resultados a continuación y su aplicación al estudio de los códigos.

2. Análisis de los códigos desde un punto de vista matemático

El propósito de esta sección es analizar la congruencia de los datos geométricos de los códigos desde el punto de vista de la matemática actual.

Empezamos con un análisis intuitivo de las dificultades que aparecen al calcular áreas. Presentamos algunas herramientas matemáticas que

son útiles para el cálculo de áreas, la determinación de áreas máximas y de las formas de los polígonos. Pueden verse detalles adicionales en [7].

Se analiza la factibilidad de los datos de lados y áreas de los códices y se estudian las posibles formas que podrían tener todos los terrenos. Cabe aclarar que si bien en el *milcocolli* se muestra una representación pictórica de la forma de cada terreno, dichas figuras no están a escala y por lo tanto no pueden tener la forma verdadera.

Para el Códice Vergara ya se habían analizado triángulos y cuadriláteros en [9] y [10]. En este trabajo presentamos un resumen de dichos resultados y hacemos el análisis de estas mismas figuras para el Códice Santa María Asunción y estudiamos para ambos códices el problema de los polígonos de más de cuatro lados que es mucho más complejo.

Geometría experimental

El problema práctico de medir una superficie en el plano en muchas ocasiones resulta todo un reto. Para entender el problema es útil desarrollar un poco de intuición geométrica para lo cual se invita al lector a hacer un poco de geometría experimental.

Tome un agitador de café y divida otro más en dos pedazos, ensárteles utilizando un hilo (de preferencia de nylon) y trate de formar un triángulo. Observará que es imposible. Es claro que solo se puede formar un triángulo si ningún lado es mayor o igual que la suma de los otros dos. Llamamos a esta condición «la regla de consistencia». Lo mismo ocurre con otros polígonos, ningún lado puede ser mayor o igual que la suma de los otros lados.

Esta simple observación permitió verificar si los lados de los terrenos en los códices pueden formar polígonos. De los 1588 terrenos en total, solo hay un caso en el código Vergara y otro en el Santa María Asunción, ambos cuadriláteros, que no satisfacen «la regla de consistencia». El del código Santa María tiene lados 17, 9, 40, 10; el del Vergara tiene lados 43, 9, 24, 5.5. Sin embargo existe la posibilidad de que el *tlacuilo* haya omitido pintar un punto en algún lado y no sería un error de medición sino uno de transcripción. Aún así, esta es una primera muestra de que los datos de los códices parecen correctos.

Tome ahora otros tres pedazos de agitadores que sí puedan formar un triángulo. Note que el área y la forma están fijos y solo dependen de los lados. Ahora tome cuatro pedazos de agitadores de longitud a , ensárteles y forme un cuadrilátero. Observe que puede formar un cuadrado, un rombo e inclusive una línea. ¿Cómo interpreta este hecho? Lo que sucede es que las longitudes de los lados NO determinan la forma

y por tanto tampoco el área de la figura, que varía desde el valor cero para la línea hasta a^2 para el cuadrado. En este último caso los ángulos también son iguales.

Si ahora construye un cuadrilátero con lados desiguales, el efecto del cambio de los ángulos es fácil de observar fijando uno de ellos y moviendo el opuesto como se ilustra en la figura 5. Si se fijan dos ángulos o dos diagonales entonces se fija la forma del cuadrilátero. Aunque no es inmediato, puede verse que hay una sola forma con área máxima y dos posibles para áreas menores a esta. Se ampliará esta idea más adelante.

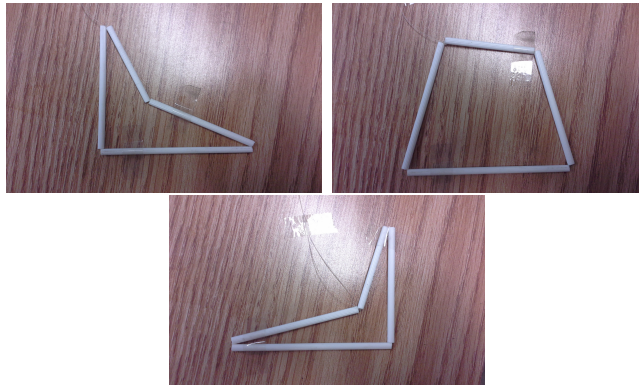


Figura 5. Algunas formas posibles de cuadriláteros con los mismos lados.

Cálculo de áreas

Es fácil calcular áreas de polígonos cuando se conocen las coordenadas de los vértices, solo se aplica la Fórmula del Agrimensor ¹. Dados los vértices $A_0 = (x_0, y_0)$, $A_1 = (x_1, y_1)$, \dots , $A_n = (x_n, y_n)$, la fórmula se puede escribir como (véase [15]):

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |(x_0y_1 + x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_0) - (x_1y_0 + x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_0y_n)|. \quad (1)$$

Pero en los códigos no hay coordenadas. Veremos qué puede hacerse en esta situación empezando con el caso más sencillo: los triángulos.

Podríamos calcular las áreas de los triángulos usando la fórmula que se aprende en la escuela, $(1/2)$ base \times altura. Pero no hay información de las alturas y tampoco las podemos medir porque las figuras no están dibujadas a escala. Lo que sí conocemos son las medidas de los tres

¹Esta fórmula es una aplicación del teorema de Green del cálculo [4], [12].

lados y afortunadamente Herón de Alejandría (siglo I DC) encontró una fórmula para el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados, a, b, c . Lo que se conoce actualmente como fórmula de Herón es $\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde s es el semi-perímetro, $s = (a + b + c)/2$ (véase [18]).

Para un cuadrilátero plano con lados a_1, a_2, a_3, a_4 y ángulos opuestos x, y (véase la figura 6) el área \mathcal{A} está dada por la fórmula de Bretschneider (1842) ([2] o [19]):

$$\mathcal{A} = \sqrt{(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4) - a_1 a_2 a_3 a_4 \cos^2 \left(\frac{x + y}{2} \right)}, \quad (2)$$

donde s es el semi-perímetro, $s = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/2$.

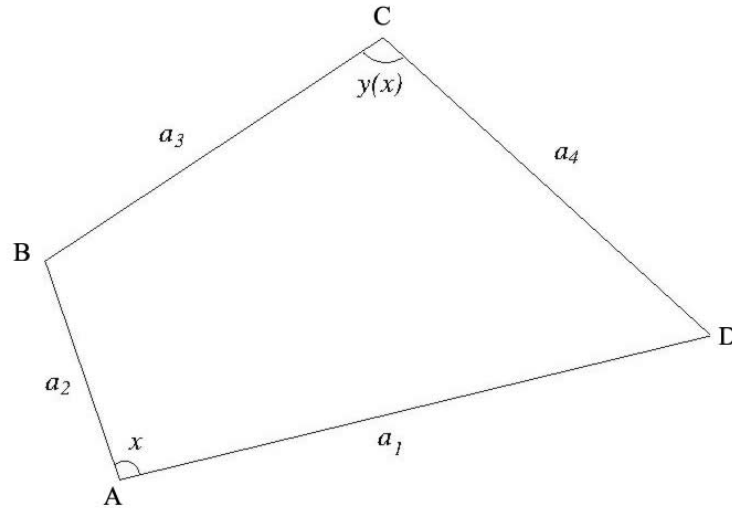


Figura 6. Cuadrilátero

Es curioso que, aunque no se menciona mucho, la fórmula de Bretschneider funciona también para cuadriláteros con autointersecciones como el que se muestra en la figura 7. Sin embargo en este caso el resultado es el valor absoluto del área orientada, que tal vez no sea lo que uno espera.

Para la prueba de (2) el área del cuadrilátero se calcula en [19] como la suma de las áreas de los triángulos ABD y BCD de la figura 6 que están dadas por $(1/2)a_1 a_2 \sin x$ y $(1/2)a_3 a_4 \sin y$ respectivamente. Pero si la configuración es como se muestra en la figura 7, el área del triángulo BCD se vuelve negativa ya que $\sin(-y) = -\sin y$ y por lo tanto se resta del área del triángulo ABD . Los autores completan la prueba de la fórmula (2) usando el cuadrado del área y por lo tanto no importa qué área se resta de cuál.

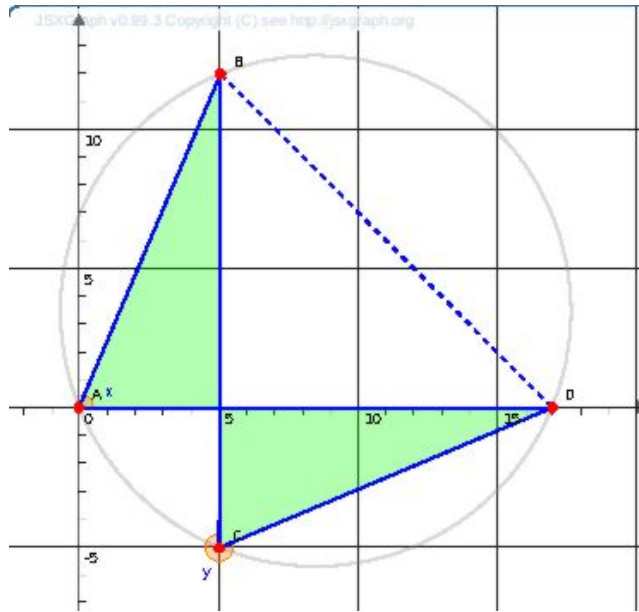


Figura 7. La región sombreada es el cuadrilátero ABCD con autointersecciones y área 0.

Regresando a los códigos, el descifrado del *tlahuelmantli* se logró considerando figuras con cuatro lados iguales que se supusieron cuadradas. Pero ¿será válida la interpretación para otras figuras? Es decir, si suponemos que el terreno es plano (que todas las figuras están sobre el plano), ¿pueden los terrenos con los lados dados en el *milcocolli* producir las áreas correspondientes del *tlahuelmantli*? Vea nuevamente la figura 3.

Si hubiera ángulos en el *milcocolli* podríamos usar la fórmula de Bretschneider para calcular las áreas, pero no los hay. Hay una fórmula similar usando las diagonales, pero el *milcocolli* tampoco las tiene.

Desde luego si las figuras en el *milcocolli* estuvieran dibujadas a escala las podríamos usar para calcular áreas, pero no lo están. Si supiéramos dónde están los terrenos, podríamos medirlos directamente, pero no sabemos. Entonces es imposible saber si los valores de las áreas son correctos.

Sin embargo, una cosa que sí podemos hacer es calcular la máxima área posible, \mathcal{A}_{max} , de un cuadrilátero con lados dados. Dicha área se alcanza cuando $x + y(x) = \pi$ radianes o 180 grados porque el coseno de $\pi/2$ es cero. Cuando esto ocurre, el cuadrilátero es cíclico, es decir, puede inscribirse en un círculo. De hecho, esto es cierto para todos los polígonos; su área máxima se alcanza en la configuración que puede inscribirse en un círculo (véase [6]).

Para un cuadrilátero el área máxima está dada por

$$\mathcal{A}_{max} = \sqrt{(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4)}. \quad (3)$$

Esto depende únicamente de los lados y por lo tanto se puede calcular con la información contenida en los códices.

Si el área registrada en el *tlahuelmantli* es mayor que el área máxima calculada a partir de la fórmula de Bretschneider entonces el cuadrilátero no es realizable en el plano.

Considere el extracto de los códices que se muestra en el cuadro 1, junto con las áreas máximas calculadas con la fórmula de Bretschneider (redondeando al entero más cercano).

Id	Lados	Área registrada	Área máxima
1	20,20,18,20	365	379.525
2	37, 10,36 ,9	340	346
3	52, 6, 49, 23	727	718
4	34, 20, 25, 20	586	575
5	17,22.5,11,20	294	293.34

Cuadro 1. Cuadriláteros.

Los terrenos con Id 1 y 2 son factibles. Los terrenos con Id 3 a 5 no son factibles, pero tienen errores muy pequeños.

Es importante recordar que se supuso geometría euclidiana plana. Como la topografía real está lejos de ser plana, los datos registrados en los códices podrían ser correctos.

La discrepancia también podría deberse a errores de redondeo, o bien el área registrada podría ser una aproximación del área real. No se sabe si los acolhuas calculaban o medían las áreas de sus terrenos.

Una posible forma de aproximar el área de un cuadrilátero con lados a_1, a_2, a_3, a_4 es usar la Regla del Agrimensor:

$$\mathcal{A} \simeq (1/2)(a_1 + a_3) \times (1/2)(a_2 + a_4).$$

Se sabe que los Sumerios utilizaron esta fórmula como la definición de área en el año 2400 antes de nuestra era (véase [14]). Esta regla siempre da un valor mayor o igual al área máxima (véase [10]) y cuando los ángulos del cuadrilátero no son muy agudos es una buena aproximación del área. Curiosamente, numerosas áreas registradas en los códices coinciden con el resultado que se obtiene al aplicar la Regla del Agrimensor. Para el terreno Id 3 esta regla da 732.25; el área máxima posible es 718 y el área registrada es 727. Entonces si los acolhua usaron una fórmula para aproximar el área de este terreno, su fórmula era mejor que la Regla del Agrimensor. En el terreno Id 5 la Regla del Agrimensor da exactamente el área registrada (si no se usa la unidad

fraccionaria). Analizamos todos los cuadriláteros de ambos códigos. Hay 408 en el Vergara y 361 en el Asunción pero algunos no tienen toda la información. Los que sí tienen datos completos son 386 en el Vergara y 310 en el Asunción. En el Vergara hay 137 terrenos no factibles pero solo 38 tienen error mayor al 10%. En el Asunción hay 194 imposibles pero 136 de ellos tienen un error menor al 10% y hay solo 34 con un error mayor al 20%.

Este análisis de los errores parece indicar que el *tlahuelmantli* sí es un registro de las áreas de los terrenos del *milcocolli* y solo unos cuantos valores están demostrablemente mal.

También hay un mínimo valor posible para el área. De la ecuación (2) es claro que el área mínima no puede ser menor que

$$\mathcal{A}_{min} = \sqrt{(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4) - a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

Este valor ocurre si $(x + y)/2 = 0$ ó $(x + y)/2 = \pi$ radianes porque entonces el coseno cuadrado es igual a 1. Pero si $(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4) < a_1 a_2 a_3 a_4$ entonces esa área mínima no se alcanza en los reales y el área mínima es cero.

El argumento de las áreas máximas puede ser relevante para los estudios de los códigos ya que los registros del *milcocolli* y los correspondientes del *tlahuelmantli* no están siempre dibujados en el mismo orden y las cotas de las áreas pueden usarse para determinar la correspondencia correcta entre estas dos secciones. De hecho, en la casa que se muestra en la figura 3 un cálculo del área máxima muestra que el segundo terreno del *milcocolli* no puede corresponder a la segunda figura del *tlahuelmantli*. Las áreas máximas redondeadas de los terrenos del *milcocolli* son, en orden de izquierda a derecha, 594, 293, 337, 444 y 1,399 T^2 respectivamente. Las áreas respectivas registradas en el *tlahuelmantli* son 549, 703, 294, 177 y 296 T^2 . Podemos concluir que el primer terreno del *milcocolli* corresponde al primero del *tlahuelmantli*, el quinto del *milcocolli* corresponde al segundo del *tlahuelmantli* y los otros tres del *milcocolli* podrían corresponder a cualesquiera de los otros tres del *tlahuelmantli*.

Dibujando formas de polígonos

Si ahora suponemos que las áreas son correctas, ¿cuáles son las posibles formas de los terrenos? Los triángulos tienen una única forma posible. Se puede dibujar con regla y compás.

Pero ¿los cuadriláteros? Observe nuevamente la ecuación (2). Hay un coseno cuadrado. Como $\cos \theta = -\cos(\theta + \pi)$ entonces el ángulo $(x + y)/2$ produce un cuadrilátero con la misma área que $(x + y)/2 + \pi$.

Entonces hay un solo cuadrilátero con área máxima pero para áreas entre la mínima y la máxima hay dos. La demostración se puede encontrar en [10].

Veamos los datos de los códigos. Para construir el campo con Id 1 es necesario determinar el ángulo x . Observe nuevamente la ecuación (2), note que si el ángulo x está dado entonces el ángulo y se puede determinar a partir de la regla del coseno. Refiriéndonos a la figura 8:

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos x = \overline{BD}^2 = a_3^2 + a_4^2 - 2a_3a_4 \cos y$$

y por lo tanto

$$y(x) = \arccos \left(\frac{-a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_1a_2 \cos x}{2a_3a_4} \right). \quad (4)$$

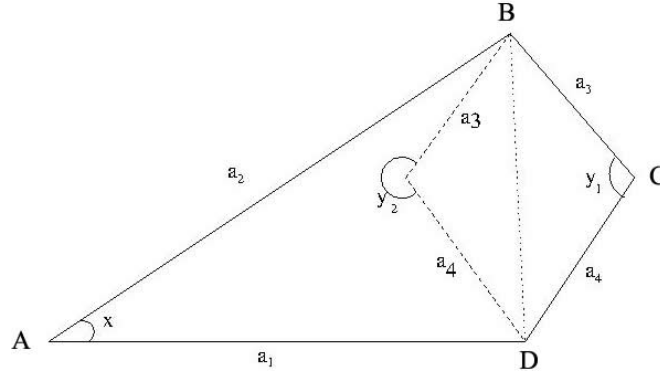


Figura 8. Regla del coseno. Cuando se fija el ángulo x , el ángulo y puede tener dos posibles valores.

Como el coseno inverso tiene dos ramas entre $-\pi$ y π radianes, entonces $y(x)$ en la ecuación (4) tiene dos posibles valores y_1, y_2 en la figura, que producen áreas diferentes.

Renombrando las constantes y usando (4), se puede escribir (2) como:

$$\mathcal{A}(x) = \sqrt{C_1 - C_2 \cos^2 \left(\frac{x + y(x)}{2} \right)}, \quad (5)$$

donde $C_1 = (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)(s - a_4)$, $C_2 = a_1a_2a_3a_4$ y $y(x)$ puede ser cualquiera de los dos valores dados por el coseno inverso.

Los dos valores del ángulo que dan el área registrada están dados por la intersección de la curva $\mathcal{A}(x)$ y la línea punteada horizontal $Area = RA$, donde RA es el área registrada en el *tlahuelmantli*. En la figura 9 mostramos la gráfica ángulo-área que corresponde al primer terreno del cuadro 1. Note que una línea horizontal $Area = constante$ interseca a la curva en dos puntos, P_1 y P_2 en la figura, si la constante es menor que el área máxima pero mayor que la mínima. Los puntos

P_1 y Q_1 en la figura, corresponden a las dos posibles áreas que puede tener el cuadrilátero con mismo ángulo x y los valores del ángulo $y(x)$ que provienen de los dos valores del coseno inverso. Lo mismo sucede con P_2 y Q_2 para un ángulo x diferente.

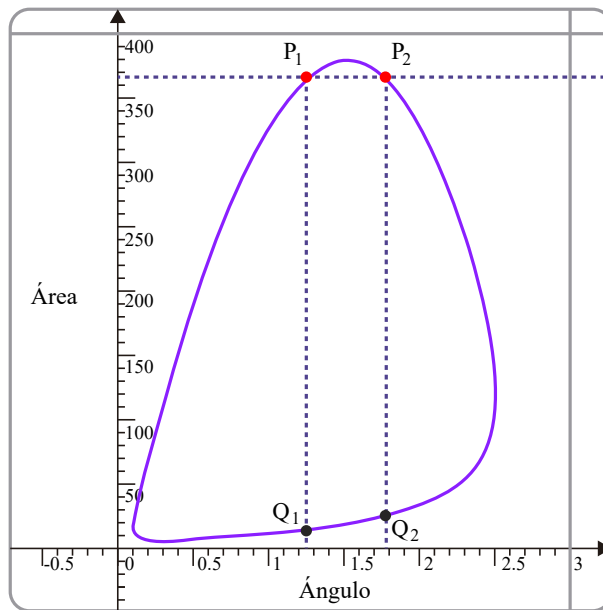


Figura 9. Gráfica ángulo-área para el terreno Id 1.

Los dos cuadriláteros con los lados y área registrados para el terreno Id 1, correspondientes a las intersecciones P_1 y P_2 en la figura 9, se muestran en la figura 10 junto con el terreno tal y como aparece dibujado en el *milcocolli*.

Observe que la figura del *milcocolli* no está a escala. Note que el ángulo x (abajo a la izquierda) en la figura 10 no es un ángulo recto y sin embargo en el *milcocolli* es usual representar al ángulo inferior izquierdo como un ángulo recto, como se ve en la figura 3.

¿Qué se puede decir desde el punto de vista matemático sobre las formas con área mínima?

En algunos casos, por ejemplo cuando la suma de dos lados es igual a la suma de los otros dos, es posible que tanto x como y alcancen el valor cero al mismo tiempo lo cual da un cuadrilátero que degenera en una línea y área cero. Otra posible configuración de área mínima es un cuadrilátero con una auto-intersección inscrito en un círculo como se muestra en la figura 7. Los ángulos x y y subtienden el mismo arco pero uno es un ángulo interno y el otro es un ángulo externo entonces $x + y = 2\pi$ radianes y la fórmula (2) alcanza su mínimo valor.

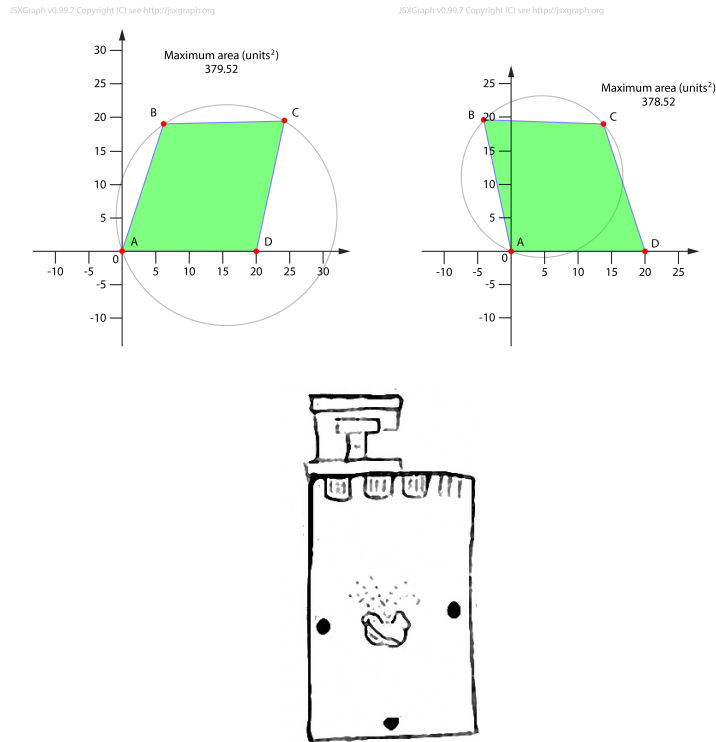


Figura 10. Las dos posibles formas para el terreno Id 1 con lados 20, 20, 18, 20 y la figura del *milcocolli*.

Dependiendo de las longitudes relativas de los lados esta configuración puede no ser realizable.

Para leer más sobre áreas mínimas consulte [3] u [8]. Ninguno de los terrenos de los códigos tienen área cercana a la mínima, como era de esperarse en terrenos agrícolas.

Una gran cantidad de terrenos tienen más de cuatro lados (234 en Asunción y 209 en Vergara).

En los pentágonos se tienen dos ángulos libres, denotados como x y z en la figura 11. Además está el ángulo y que juega el mismo papel que en los cuadriláteros y puede tomar dos valores, denotados por y_1, y_2 en la figura, debido a las dos ramas del coseno inverso. A cada elección de ángulos le corresponde una forma del pentágono y por lo tanto un valor del área. La gráfica ángulos-área es ahora una superficie en \mathbf{R}^3 que muestra el valor del área como función de los ángulos (en radianes) y la intersección de esa superficie con el plano de área constante es una curva cerrada. Esto implica que hay una infinidad de posibles formas para un pentágono con lados dados y área prescrita. La figura 12 muestra una parte de la gráfica ángulo-área con el ángulo y en la rama principal del coseno inverso. Los lados y área fueron tomados del código Vergara

(terreno 05-01-001 [11]), los lados son 16, 11, 14, 22, 14T y el área registrada es $347T^2$. Conjeturamos que la gráfica completa, agregando los valores de y en la otra rama del coseno inverso sería una superficie cerrada.

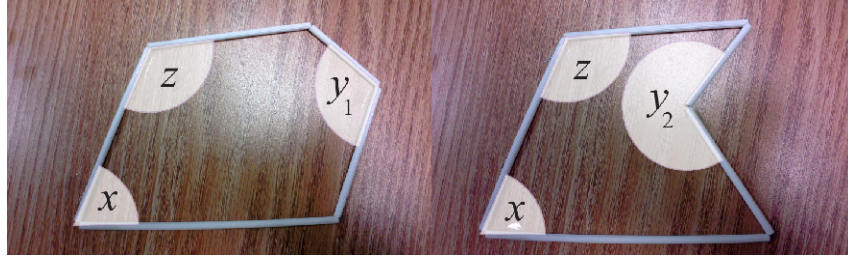


Figura 11. Un pentágono con ángulos x y z fijos y los dos posibles valores del ángulo y .

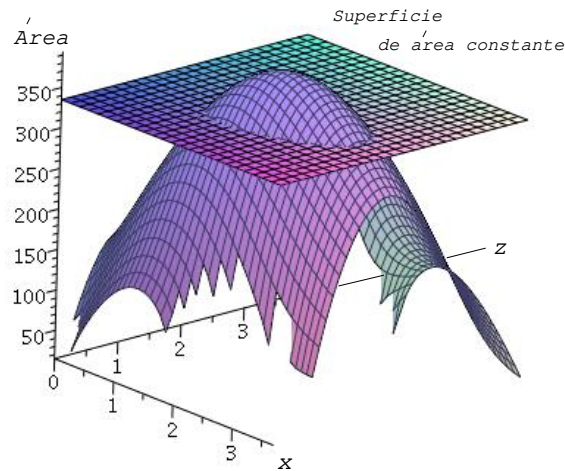


Figura 12. Sección de la gráfica ángulos-área como función de los ángulos x , z para un pentágono y su intersección con el plano Área = constante = área registrada en el código.

Para polígonos con más lados también hay un número infinito de posibles formas con lados y área prescritos. Para seleccionar una forma de la infinidad de opciones, nos basamos en la única información disponible que son los esbozos del *milcocolli*. La figura 13 muestra un ejemplo de un terreno del Códice Asunción como se representa en el *milcocolli* y una posible forma para el terreno, a escala, usando un programa que escribimos y que usa JSXGraph.

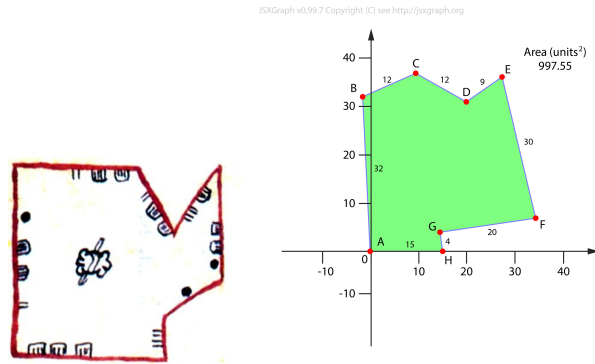


Figura 13. Reconstrucción del terreno con área registrada $997 T^2$.

Debemos agregar que hemos estudiado el conjunto de terrenos hexagonales, que son mayoría entre los terrenos poligonales, para tratar de encontrar algoritmos que reprodujeran las áreas registradas en el tlahuemantli. Seccionando la figura mostrada en el milcocolli en dos cuadriláteros y calculando sus áreas aproximadas se trató de recobrar el área registrada. Desafortunadamente este método solo arrojó resultados favorables en algunos casos y no se puede decir que sean suficientes para aseverar que fuera un método usado para calcular dichas áreas. Hasta ahora solo podemos decir que para los terrenos poligonales es muy probable que las áreas hayan sido medidas *in situ*, utilizando tal vez una cuadrícula del terreno o simplemente dependiendo de la experiencia empírica del agrimensor. Es un problema abierto que merece ser más estudiado.

Conclusiones

En este trabajo, el estudio de dos códigos mexicanos del siglo dieciséis llevó a y se enriqueció con, una serie de preguntas de geometría. También ayudó a confirmar la interpretación del tlahuemantli hecha por los antropólogos como el registro de las áreas del milcocolli.

Conclusiones geométricas

Cualquier polígono en el plano debe satisfacer la condición de que ningún lado sea mayor que la suma de los otros. En los triángulos, la forma y el área solo dependen de los lados. Para más de tres lados, las longitudes de los lados no determinan forma o área. Los polígonos tienen una configuración de área máxima que es aquella que se puede

inscribir en un círculo. Dada un área entre la máxima y la mínima posibles, un conjunto de lados determina una o dos posibles formas para cuadriláteros y un número infinito de formas para polígonos con más de cuatro lados.

Para fijar el área de un cuadrilátero es necesario dar las longitudes de los lados y además dos diagonales, o un ángulo y la rama del coseno inverso del ángulo opuesto. La fórmula de Bretschneider se puede aplicar a cuadriláteros con auto-intersecciones si se introduce el concepto de área con signo.

Si se conocen las coordenadas de los vértices de un polígono entonces se puede usar la Fórmula del Agrimensor (o Fórmula de la Agujeta de Zapato, [15]) para calcular su área. Para un polígono con vértices $A_0 = (x_0, y_0)$, $A_1 = (x_1, y_1), \dots, A_n = (x_n, y_n)$, esta fórmula está dada por la ecuación (1). Esta fórmula se prueba usando el teorema de Green del cálculo integral.

Conclusiones históricas

La información proporcionada por el *milcocolli* solo permite hallar cotas para las áreas; sin embargo esta información proporcionó suficiente evidencia para decir que el *tlahuelmantli* en efecto registra las áreas del *milcocolli*. Es notable que los acolhuas hayan definido su unidad de superficie como un *tlalcuahuitl* cuadrado.

Se calculó la máxima área posible para cuadriláteros y se comparó con las áreas registradas en los códices. En el código Vergara hay 385 cuadriláteros legibles, 136 de ellos no son factibles, su área máxima es ligeramente mayor al área registrada; 81 (59.55 %) de estos tienen un error relativo respecto al área máxima menor que el 5 % y 99 terrenos tienen un error relativo respecto al área máxima menor que el 10 %. Si aceptáramos como razonable un error del 10 %, entonces solo 38 terrenos podrían considerarse incorrectos.

En el Código Vergara hay dos triángulos y 207 polígonos de más de cuatro lados de los cuales 164 son legibles. De estos, 25 no son factibles pero 12 de ellos tienen un error menor al 10 %.

Para el código Santa María Asunción los números son semejante, hay 310 cuadriláteros legibles de los cuales 194 no son factibles; de estos 105 (54.12 %) tienen un error relativo respecto al área máxima menor que el 5 % y 136 de los terrenos tienen un error relativo respecto al área máxima menor que el 10 %. Si aceptáramos como razonable un error del 10 %, entonces solo 58 terrenos podrían considerarse incorrectos.

Este código tiene 234 polígonos de más de cuatro lados, 203 legibles. Hay 35 imposibles pero 14 de ellos tienen error menor al 10 %.

También hay que considerar los errores de redondeo ya que todas las áreas del *tlahuelmantli* son números enteros. Cabe mencionar que si no se utilizan las fracciones de los lados cuando se calcula el área máxima, el número de cuadriláteros no factibles se incrementa. Este es otro indicio de que los acolhuas sí utilizaban las fracciones en el cálculo de áreas como se puede ver con más detalle en [20].

Este análisis no demuestra que las mediciones en los códices estén mal ya que la topografía de los terrenos no fue considerada. Es también posible que las áreas fueran medidas *in situ* y no calculadas de las medidas de los lados. Todo esto muestra que la agrimensura acolhua era muy buena.

Aquí se hizo un análisis con matemáticas actuales de los datos reportado en los códices. Sigue abierto el interesante problema de cómo calculaban áreas los acolhuas. A partir de los códices se hicieron algunas propuestas de algoritmos pero creemos que solo se podrá resolver el problema si se encuentran más documentos de origen acolhua o de otras culturas mesoamericanas que contengan cálculos explícitos de áreas.

El fin de la historia

La demanda de los encomendados fue enviada a España pero no se tuvo una resolución definitiva del caso. Se envió al juez Vergara a oír a los querellantes, concluyó que los tributos efectivamente eran excesivos y ordenó que se disminuyeran. Trágicamente, antes de que se pudiera hacer una nueva tasación, la epidemia de cocoliztli (1545) [17] diezmo la población de Tepetlaoztoc.

Los muertos se muestran con las caritas pintadas de gris de la sección del censo de ambos códices. Una vez reubicada la población sobreviviente, se envió al juez Rodríguez de Quesada a atender la demanda; él pidió ver los libros de los censos dando lugar a una reducción de tributos. Más información sobre este caso se encuentra en el Archivo de Indias en España (Justicia, 151:f. 112r-113r) que aún encierra muchos misterios.

Agradecimientos

Agradecemos el apoyo computacional de Ana Pérez Arteaga y Ramiro Chávez y los comentarios de los revisores.

Bibliografía

- [1] Ex-colecciones de Boturini y Aubin, ed., *Códice Vergara*, Bibliothèque Nationale de France.
- [2] W. H. Beyer, *Standard mathematical tables*, 26.^a ed., CRC, Boca raton, Fla., 1981.

- [3] Böröczky, «The minimum area of a simple polygon with given side lengths», *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 39, núm. 1-3, 2000, 33–49.
- [4] B. Braden, «The surveyor's area formula», *The College Mathematics Journal*, vol. 17, núm. 4, 1986, 326–337.
- [5] A. Chavero, *Ixtlilxóchitl, Fernando de Alva 1952. Obras históricas de Don Fernando de Alva Ixtlilxóchitl*, Editorial Nacional, Ciudad de México, 1952.
- [6] H. Demir, «Maximum area of a region bounded by a closed polygon with given sides», *Mathematics Magazine*, vol. 39, núm. 4, 1966, 228–231.
- [7] C. E. Garza-Hume, M. C. Jorge y Jorge y A. Olvera, «Quadrilaterals and Bretschneider's Formula», *Mathematics Teacher*, vol. 111, núm. 4, 2018, 310–314.
- [8] C. E. Garza-Hume, M. C. Jorge y Jorge y A. Olvera, «Areas and shapes of planar irregular polygons», *Forum Geometricorum*, vol. 18, 2018, 17–36.
- [9] H. R. Harvey y B. J. Williams, «Aztec arithmetic: Positional notation and area calculation», *Science*, vol. 210, 1980, 499–505.
- [10] M. C. Jorge y Jorge, B. Williams, C. E. Garza-Hume y A. Olvera, «Mathematical accuracy of Aztec land surveys assessed from records in the Codex Vergara», *PNAS*, vol. 108, núm. 37, 2011, 15053–15057.
- [11] M. C. Jorge y Jorge, «Agrimensura azteca», <http://agrimensuraazteca.iimas.unam.mx>.
- [12] S. Lang, *Calculus of several variables*, Springer Verlag, 1987.
- [13] M. Melgar García y A. Barrionuevo Dolmos, «Censos de población en España. Una larga tradición», *Revista Índice*, Noviembre 2009, .
- [14] H. J. Nissen, P. Damerow y R. Englund, *Archaic bookkeeping, writing and techniques of economic administration in the ancient near east*, The University of Chicago Press, 1993.
- [15] B. Polster, *The shoelace book*, AMS, 2006.
- [16] Universidad Nacional Autónoma de México, ed., *Códice Asunción*, Colección de libros raros de la Biblioteca Nacional de México, Ciudad Universitaria.
- [17] Á. J. Vågene, A. Herbig, M. Campana y et al., «Salmonella enterica genomes from victims of a major sixteenth-century epidemic in Mexico», *Nat Ecol*, 2018, 520–528.
- [18] E. Weisstein, «Heron formula», <http://mathworld.wolfram.com/HéronsFormula.html>.
- [19] E. W. Weisstein, «Bretschneider's formula», https://proofwiki.org/wiki/Bretschneider's_Formula, Accessed:2018.
- [20] B. J. Williams y M. C. Jorge y Jorge, «Aztec arithmetic revisited: Land area algorithms and Acolhua congruence arithmetic», *Science*, vol. 320, núm. 5872, 4 April 2008, 72–77.
- [21] B. J. Williams y M. C. Jorge y Jorge, «Surface area computation in ancient mexico: Documentary evidence of Acolhua-Aztec proto-geometry», *Symmetry: Culture and Science*, vol. 12, 2001, 1–2.