Redondeando Raíces Cúbicas

Alejandro López-Ortiz
Faculty of Computer Science,
University of New Brunswick,
Fredericton, N.B., Canada N3B 4A3,
alopezo@unb.ca*

Luke O'Connor
IBM Zurich Research Laboratory,
Saumerstrasse 4,
CH-8803 Rueschlikon/Switzerland,
oco@zurich.ibm.com*

1 Introducción.

La introducción en 1988 de Mathematica, un paquete de cómputo simbólico, tomó al mundo matemático por sorpresa. El programa fue calificado como *revolucionario*, *sin precedentes* y otro sinnúmero de halagos. Actualmente dicho programa o alguno de sus cercanos competidores, como lo son Maple, Derive, Cayley o Macsyma, son usados por cientos, si no es que miles de matemáticos para los propósitos de experimentación, verificación de conjeturas y graficación de datos.

Una aparente contradicción es que, según los expertos en el área de cómputo simbólico, ninguno de dichos programas, incluyendo Mathematica, es o fue, al momento de su introducción, revolucionario. Dicha diferencia de opiniones se debe pues a la falta de difusión de los avances del cómputo simbólico entre la comunidad científica en general.

En este artículo, usamos un problema del *Monthly* para ilustrar la capacidad de resolución de problemas de Maple. El *American Mathe-*

*Trabajo realizado en: Department of Computer Science, Faculty of Mathematics, University of Waterloo.

matical Monthly, publicado por la *Mathematical Association of America*, contiene una selección mensual de problemas matemáticos. Dichos problemas son considerados como un reto aún para avezados estudiantes del último año de la carrera. Incluso en algunas universidades los problemas son atacados en grupo, con mayor o menor éxito.

El siguiente problema, propuesto por Seung-Jin Bang ilustra tanto las capacidades del sistema Maple, como la naturaleza híbrida del trabajo matemático asistido por computadora. En éste, la computadora y el matemático alternan avances en el problema, hasta encontrar una solución.

Una vez que ésta ha sido hallada, en general es posible, si así se desea, recrear una prueba que no hace uso de la computadora.

2 Redondeado de raíces cúbicas.

Problema 10212. *Propuesto por Seung-Jin Bang, Seúl, Corea.* [1]
Sea $a(n)$ el entero mas cercano a $n^{1/3}$. Evalúe:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a(n)^4}.$$

Solución. Primero observamos que la función de redondeo es una función escalera, con discontinuidades en puntos de la forma $n + 1/2$, para n entero. Es decir, $a(n)$ tiene el mismo valor para toda $n \in [\lceil (m-1/2)^3 \rceil, \lceil (m+1/2)^3 \rceil - 1)$. Esto nos permite reescribir la suma como:

```
T:= m -> Sum(m^(-4),n=ceil((m-1/2)^3)..ceil((m+1/2)^3)-1);
```

$$T(m) := \sum_{n=\lceil (m-1/2)^3 \rceil}^{\lceil (m+1/2)^3 \rceil - 1} m^{-4} = \left(\lceil (m+1/2)^3 \rceil - \lceil (m-1/2)^3 \rceil \right) m^{-4}$$

```
S=sum(T(m),m=1..infinity);
```

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} T(m)$$

Maple no supone que m es un entero, así que se lo hacemos saber explícitamente. Así mismo, le sugerimos que expanda el argumento de la función *menor entero mayor o igual a* (`ceil` ó $\lceil\rceil$).

```
assume(m,integer); lm:=expand((m-1/2)^3):
um:=expand((m+1/2)^3):
S=sum(sum(1/m^4,n=ceil(lm)..ceil(um)-1),m=1..infinity);
```

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left\lceil m^3+\frac{3\,m^2}{2}+\frac{3\,m}{4}-\frac{7}{8}\right\rceil+1-\left\lceil m^3-\frac{3\,m^2}{2}+\frac{3\,m}{4}-\frac{1}{8}\right\rceil\right)m^{-4}$$

Una vez más, Maple necesita ayuda para continuar. Le indicaremos que separe la sumatoria anterior en cuatro series, las que se obtienen al sumar cada cuarto término de la serie original. Para esto es útil descomponer m en la forma $m = 4k + r$ con $1 \leq r \leq 4$ y llamar $\alpha(k, r)$ al sumando correspondiente a m con esta variable escrita en términos de k y r.

```
assume(k,integer): assume(r,integer):
alpha := (k,r) -> subs(m=4*k+r,sum(1/m^4,n=ceil(lm)...
ceil(um)-1)):
S = sum(Sum('alpha(k,r)',k=0..infinity),r=1..4);
```

$$S=\sum_{r=1}^{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha(k,r)\right)$$

o bien, si pedimos que se efectúe la suma de índice r

```
S = sum(Sum(''alpha(k,r)'',k=0..infinity),'r'=1..4);
```

$$S \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\alpha(k,1)+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha(k,2)+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha(k,3)+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha(k,4)$$

Podemos instruir a Maple para que detalle un poco:

```
S=sum(Sum('simplify(alpha(k,r))',k=0..infinity),'r'=1..4);
```

$$S \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}3\frac{1}{(4k+1)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{4}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}3\frac{1}{(4k+3)^2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{256}\frac{48k^2+96k+49}{(k+1)^4}$$

Ahora sí, pedimos que Maple evalúe, y obtenemos

```
S=eval(subs(Sum=sum,op(2,")));
```

$$S = \frac{\pi^4}{23040} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{3\,\Psi(1,1/4)}{16} + \frac{3\,\Psi(1,3/4)}{16}$$

Donde los dos últimos sumandos de esta igualdad corresponden a la primera y tercera series de la igualdad precedente y los primeros dos sumandos dan la suma de las otras dos series.

Claramente esta expresión es un avance significativo. Luego entonces, quedan dos preguntas por resolver, ¿qué función es Ψ y cómo la podemos evaluar en $(1,1/4)$ y $(3/4)$?

El manual de Maple reporta que Ψ es la función poligama (sin acento en la i) definida como $\Psi(x) = d/dx\ ln(\Gamma(x)) = (d/dx\ \Gamma(x))/\Gamma(x)$, y $\Psi(1,x) = d/dx\ \Psi(x)$. Una visita a la biblioteca nos podrá dar mas información.

3 La función gama.

La función Gama de Euler tiene varias propiedades interesantes en el intervalo $(0,1)$. En particular tenemos la fórmula de reflexión de Euler:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

Maple conoce este teorema, como puede ser verificado con el comando:

```
ReflFrml:=GAMMA(z)*GAMMA(1-z)=simplify(GAMMA(z)*GAMMA(1-z));
```

Diferenciando dos veces ambos lados de esta fórmula obtenemos después de una simple cancelación:

```
d1:=simplify(subs(z=1/4,diff(ReflFrml,z))):
d2:= simplify(subs(z=1/4,diff(ReflFrml,z\$2))):
d1:=expand(op(1,d1)^2=op(2,d1)^2):
expand((d2-d1/(Pi*sqrt(2)))/(Pi*sqrt(2)));
```

$$\Psi(1,1/4) + \Psi(1,3/4) = 2\,\pi^2.$$

Con esto hemos obtenido una solución cerrada a la serie original, a saber:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)^{-4} = \pi^4/23040 + \pi^2/2.$$

Sólo resta por verificar dicho resultado, lo cual haremos en la próxima sección.

4 Verificación.

Existen al menos dos formas de verificar un resultado. Una de ellas consiste en revisar con detalle los pasos efectuados; otra es obtener confirmación independiente del resultado. Tradicionalmente la verificación de teoremas se ha hecho usando el método de revisión de pasos. En cambio, las pruebas por computadora, dada su longitud, tienden a ser demostradas usando métodos independientes que confirmen el resultado[1].

Una forma de obtener pruebas independientes es calcular el valor de la serie para los primeros k términos, p.ej. $k = 50$, y compararlo con la solución calculada.

```
evalf(Sum(T(m),m = 1..50)) = evalf(Pi^4/23040+Pi^2/2);
```

$$4.879625361 = 4.939030027$$

Nada satisfactorio. Aún para $k = 10000$, la aproximación deja que desear, dado el valor tan grande de k.

$$4.938730041 = 4.939030027$$

Como la serie no parece converger rápidamente, esto nos obliga a tener que demostrar la convergencia de la serie y a estimar el error. Veamos el tamaño del término de error. Claramente:

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{\lceil (m+1/2)^3 \rceil - \lceil (m-1/2)^3 \rceil}{m^4} \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{(m+1)^3 - (m-1)^3}{m^4}$$

Expandemos los binomios del lado derecho, y como $1/m^4 \leq 1/m^2$ para $m \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{(m+1)^3 - (m-1)^3}{m^4} &= 2 \sum_{m=k+1}^{\infty} \left(\frac{3}{m^2} + \frac{1}{m^4} \right) \\ &\leq 8 \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \\ &\leq 8 \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \end{aligned}$$

[1] Estrictamente hablando ninguno de los dos métodos garantiza la ausencia de errores, pues es ciertamente posible que todos los árbitros de un artículo se convenzan del mismo error que el autor del teorema. Dado que la experiencia ha mostrado que las probabilidades de tal suceso son relativamente bajas, en general consideramos como válidas las pruebas de revisión por colegas.

esto es,

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{\lceil (m+1/2)^3 \rceil - \lceil (m-1/2)^3 \rceil}{m^4} \leq \frac{8}{k}.$$

Una vez calculada esta cota tenemos, para $k = 10000$, que,

$$S = 4.938730041 + \epsilon$$

donde $0 < \epsilon < 8/10000$; lo que implica que el valor numérico de la serie está acotado por arriba por 4.939530, un valor tan sólo 0.0005 mas grande del valor exacto calculado. Esto nos da evidencia independiente de que la serie converge, aunque lentamente, a la solución exacta calculada.

En efecto, la serie puede ser escrita como una suma de cuatro series de segundo órden (ver ec. 2). De ahí se sigue que la velocidad de convergencia en términos de dígitos de exactitud es proporcional a $\log_{10} k$, lo cual coincide con nuestros resultados experimentales.

5 Conclusiones.

Este problema fue resuelto por los autores por primera vez en 1992. Es interesante enfatizar que desde entonces con cada nueva versión de Maple, el trabajo requerido de éstos ha decrecido de forma constante y gradual, reflejando el avance típico en computación simbólica.

En 1996 por primera vez una computadora resolvió un problema de matemáticas tradicionales de relativa importancia a partir de un programa general. Dicha conjetura, conocida como el problema de Robbins, había sido planteado a varios matemáticos de renombre, sin éxito alguno (ver [2] donde se detalla la prueba). La solución de dicho problema representa un avance más en el uso de computadoras para el enriquecimiento del acervo matemático universal.

6 Agradecimientos.

Los autores agradecen las comentarios de un árbitro anónimo, cuyas sugerencias contribuyeron a una clara presentación de este tema.

Referencias

[1] Seung-Jin Bang. Problem 10212, *American Mathematical Monthly*, Volume 9, Number 4, 1992. p.361.

[2] William McCune, Solution to the Robbins Problem, en consideración para publicación en *Journal of Automated Reasoning*, 1997. También disponible en `http://www.mcs.anl.gov/home/mccune/ar/robbins/`.