LA PARADOJA DE RUSSELL ES UNA IMPOSIBILIDAD LOGICA.

JOSE ALFREDO AMOR

Generalmente se dice que la axiomatización es la solución a todas las famosas paradojas de la teoría de conjuntos, que surgieron poco después de la creación de ésta por Georg Cantor.

Esto no es exacto, ya que se puede mostrar que en particular la paradoja de Russell se resuelve, o mejor dicho, se "disuelve", con la lógica elemental de Primer Orden. Dicha paradoja se puede plantear así: considérese la colección R de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, esto es

$$R = \{y: y \notin y\}$$

Para Russell, dada una propiedad $P(y)$, formulable en el lenguaje de Primer Orden, ésta determina un conjunto, a saber, $\{y: P(y)\}$. Esto es, tener una propiedad y pertenecer a un conjunto era lo mismo para Russell y ésto no lo dudaba; así pues, el conjunto R existe según esta concepción.

Pero entonces $R \in R \Rightarrow R \notin R$ y por lo tanto $R \notin R$; pero si $R \notin R$ entonces $R \in R$;

Ahora bien, resulta ser que hay una fórmula de Primer Orden que es universalmente válida y que niega la concepción anterior: Considérese un lenguaje con un símbolo relacional binario $R(x,y)$, entonces usando los símbolos: $\neg$ para "no es verdad que..." y $\longleftrightarrow$ para "si y sólo si", la fórmula

$* \neg \exists x \, \forall y \, [R(x,y) \longleftrightarrow \neg R(y,y)]$ es universalmente válida. Esta fórmula se interpreta en cualquier realización --

$\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}} \rangle$, del lenguaje de $R(x,y)$, donde $R^{\mathfrak{A}}$ denota la interpretación de R en $\mathfrak{A}$, como: "no hay algún elemento del dominio A de $\mathfrak{A}$ que tenga la relación $R^{\mathfrak{A}}$ con aquellos y sólo aquellos elementos del dominio de $\mathfrak{A}$, que no tengan la relación $R^{\mathfrak{A}}$ consigo mismos".

Es muy sencillo verificar la validez universal de la fórmula $\neg \exists x \, \forall y \, [R(x,y) \longleftrightarrow \neg R(y,y)]$, ya que si ésta fórmula no fuese universalmente válida, habría una realización ----- $\mathfrak{B} = \langle B, R^{\mathfrak{B}} \rangle$ en cuyo dominio existiría un elemento X_0 tal que para todo $y \in B$, X_0 tiene la relación $R^{\mathfrak{B}}$ con y si sólo si y - no tiene la relación $R^{\mathfrak{B}}$ consigo mismo; entonces en particular para $X_0 \in B$, se tiene que X_0 tiene la relación $R^{\mathfrak{B}}$ consigo mismo si solo sí X_0 no tiene la relación $R^{\mathfrak{B}}$ consigo mismo, lo -- cual es absurdo. Así pues, esta fórmula tiene que ser verdadera en cualquier realización del lenguaje de $R(x,y)$.

De lo anterior se sigue que con la interpretación de -- $R(x,y)$ como "$y \in X$" en el dominio de los conjuntos, se tiene la afirmación verdadera, de que no existe el conjunto R de - Russell y por lo tanto la paradoja está disuelta. Además, $\neg(y \in y)$ es un ejemplo de una propiedad formulable en el lenguaje de teoría de conjuntos, que no determina un conjunto, puesto que no hay $X = \{y: y \notin y\}$, según nos dice la fórmula universalmente válida * : "no hay un conjunto X tal que sus elementos sean exactamente aquellos que cumplen la propiedad $P(y) = y \notin y$". Es claro que $y \notin y$ abrevia $\neg(y \in y)$.

Por otro lado, si $R(x,y)$ se interpreta como "X rasura a y" en el dominio de los hombres de Jonesville, o bien si --- $R(x,y)$ significa "X cataloga a Y" en el dominio de los catálogos, etc., se tienen todas las versiones populares de dicha paradoja.

Otra observación importante al respecto de la paradoja de Russell, es que se llegó a pensar (Kamke, 1951) que el --

problema residía en el concepto de pertenencia a sí mismo, es decir, en el hecho de que pudiera haber conjuntos y tales que $y \in y$; tal hecho se consideraba contradictorio, sin embargo esto es falso, ya que el axioma de regularidad ó de Fundación en Z.F., que prohibe tales conjuntos, es independiente del resto de los axiomas y por lo tanto es posible considerar un modelo de conjuntos donde haya conjuntos que se pertenecen a sí mismos como elementos y por tanto la colección de los que no cumplen esa propiedad, no es todo el modelo. Sin embargo, según vimos, por razones puramente lógicas, no existirá ahí un conjunto que tenga como elementos exactamente a los que no cumplen tal propiedad.

PROF. JOSE ALFREDO AMOR M.
Depto. de Matemáticas
Facultad de Ciencias
U.N.A.M.