

Modelo de longevidad Gompertz Makeham

Netzahualcóyotl Castañeda Leyva

Departamento de Estadística
Universidad Autónoma de Aguascalientes
netza.castaneda@edu.uaa.mx, netzacl70gmail.com,

Silvia Rodríguez Narciso

Departamento de Estadística
Universidad Autónoma de Aguascalientes

srodrign@correo.uaa.mx y

Pedro Antonio Martínez Izquierdo

Consultor de Riesgo Financiero
pedroantonioizquierdo@hotmail.com

1. Introducción

En este trabajo se analiza la longevidad de las poblaciones humanas en un contexto de distribuciones de probabilidad e inferencia estadística. Especial énfasis tiene la distribución Gompertz Makeham que, al ser el modelo base de la longevidad de poblaciones humanas, se conocerán sus principales propiedades.

El estudio del fenómeno de la longevidad resulta fundamental para la planeación y el diseño de esquemas masivos de pensiones. Los presupuestos de los gobiernos y de las instituciones de seguridad social deben tomar en cuenta rubros como pensiones y gastos en salud de las personas adultas mayores.

La esperanza de vida de las poblaciones humanas es cada vez mayor, como consecuencia de los avances científicos y tecnológicos en la medicina, así como por una mayor educación en la higiene. Este efecto dinámico en la longevidad es sólo perceptible a mediano y largo plazo. Para simplificar la explicación del fenómeno de la longevidad, en este trabajo se considera que la distribución de la longevidad de la población en estudio es estacionaria en el tiempo.

Las distribuciones de probabilidad que modelan el fenómeno de la longevidad se presentan en términos de la fuerza de mortalidad. De hecho, esta función determina la distribución de una variable aleatoria

continua. Dependiente de la edad, tal función mide el riesgo de fallecer de un individuo.

En el caso de la distribución Gompertz Makeham, la fuerza de mortalidad tiene una forma exponencial creciente. Tendencia que se aprecia empíricamente en poblaciones humanas, desde los 6 o 7 hasta los 99 o 100 años. Otra familia importante de modelos aplicados a la longevidad es la de una fuerza de mortalidad creciente tipo potencia, que corresponde a la distribución Weibull. Aunque este enfoque se asocia principalmente a la distribución del tiempo de vida de artículos industriales y componentes electrónicos, véase [19] y [22].

Como modelo base de la longevidad en poblaciones humanas, este trabajo tiene especial interés en el estudio de la distribución Gompertz Makeham. En [14] Gompertz propone la distribución que lleva su nombre, donde la fuerza de mortalidad es una función exponencial creciente. Actualmente se considera que este modelo explica la mortalidad por causas naturales, como enfermedades. En [20] Makeham agrega una constante a la fuerza de mortalidad Gompertz. Esta componente mide el riesgo de muerte por causas fortuitas, como accidentes u homicidios.

El modelo Gompertz Makeham aplica también a la longevidad de especies animales, véase [31]. Otra aplicación importante de esta distribución se encuentra en el análisis de supervivencia. En esta área se tiene como objetivo conocer la supervivencia y la esperanza de vida residual de individuos que padecen cierta enfermedad y/o están sometidos a algún tratamiento médico. Por ejemplo, en [30] se modela con la distribución Gompertz Makeham el riesgo de muerte arrítmica en pacientes con insuficiencia cardíaca crónica. Con base al análisis estadístico, en dicho trabajo concluyen que el desfibrilador cardioversor implantable (IDC) reduce significativamente el riesgo de muerte.

Para la distribución Gompertz Makeham, las funciones fuerza de mortalidad, de distribución, de supervivencia y de densidad tienen una representación explícita. Sin embargo, en contraste, no se cuenta con representaciones tan explícitas de sus indicadores paramétricos básicos, como: momentos, función generadora de momentos, cuantiles, moda, entre otros.

El fenómeno de la longevidad, así como su impacto social y económico, ha sido poco estudiado en México. En [26] se analiza la esperanza de vida residual de personas adultas mayores de 65 años de los países pertenecientes a la OCDE, entre ellos el nuestro. En [12] estiman la fuerza de mortalidad de la población masculina y femenina de México, con base en el modelo semi paramétrico de Lee Carter [17].

Una contribución de este trabajo es la reparametrización sugerida para la familia de distribuciones Gompertz Makeham, la cual facilita

la representación de las medidas de tendencia central. Otra contribución es la formulación de la función generadora de momentos Gompertz Makeham en términos de la función gamma incompleta. Resultado que generaliza al obtenido para la distribución Gompertz, véase [16]. Se ofrece también una mejora sustancial del cálculo numérico de la función cuantil de la distribución Gompertz Makeham, vía el método de Newton Raphson. Dicha mejora es mucho más precisa que la representación en términos de la función de Lambert, desarrollada en [15]. Con el fin de estimar los parámetros del modelo por el método de máxima verosimilitud, se desarrolló una rutina de cómputo en el software estadístico R. El programa es bastante preciso, así como numéricamente robusto.

Cabe mencionar que la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros del modelo no está exenta de dificultades numéricas, incluso para muestras muy grandes. De hecho, bajo el enfoque de verosimilitud, no hay un software estadístico conocido por los autores que permita la estimación de los parámetros del modelo Gompertz Makeham. Por tal motivo, algunos autores recomiendan métodos alternativos de estimación, como el de mínimos cuadrados, véase [11]. Como recompensa, se obtuvieron resultados satisfactorios en la modelación del fenómeno de longevidad de la población adulta de México. Lo que ilustra el potencial de la rutina para su implementación en otras poblaciones.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se introducen los elementos básicos de la longevidad en el contexto de la probabilidad. Con especial énfasis se presentan los conceptos condicionales vida residual y versión truncada a la izquierda de la longevidad. En términos de la fuerza de mortalidad, se definen tres ejemplos distribucionales relacionados con la longevidad de las poblaciones humanas: exponencial, Gompertz y Gompertz Makeham. Por otro lado, las propiedades básicas de la distribución Gompertz Makeham se muestran en la sección 3. Con la idea de comprender esta distribución, se describen también sus indicadores poblacionales básicos: media, función generadora de momentos, función cuantil y la moda. En la sección 4 se muestra la teoría básica de estimación por máxima verosimilitud de los parámetros del modelo. Así mismo, se describen algunas técnicas estadísticas gráficas de análisis de diagnóstico y bondad de ajuste. Se presenta una aplicación a datos reales de longevidad en México, así como a una muestra simulada. Para los cálculos numéricos se apoyó en el software estadístico R, versión 3.4.0.

2. Longevidad

En el estudio de la longevidad es de interés la distribución de la edad de fallecimiento de los individuos de una población. Por ejemplo, resulta importante conocer alguna característica o indicador poblacional, como la esperanza de vida de una población, la edad en que perecerá un porcentaje establecido de la misma, la probabilidad de que un individuo viva más de una cantidad específica de años, el riesgo de un individuo de fallecer repentinamente a una edad dada, entre otras. Con el fin de atender dichas inquietudes, en esta sección se describe la teoría básica de la longevidad en el contexto de probabilidad.

La *longevidad* o *mortalidad* de un individuo de una población es su edad de fallecimiento X . Se asume que esta es una variable aleatoria positiva absolutamente continua. Lo cual equivale a que sea absolutamente continua su *función de distribución*

$$F(x) \doteq P(X \leq x), \quad \text{para } x \geq 0.$$

En este caso, la función $F(x)$ es derivable en $(0, \infty)$; casi en todas partes. Aunque informal, se omite la palabra «absolutamente» en la alusión a una variable aleatoria absolutamente continua, o a su función de distribución absolutamente continua. Así mismo, se omite la frase «casi en todas partes».

La función de distribución $F(x)$ determina la distribución de la variable aleatoria X . Así que esta función tiene toda la información en términos de la probabilidad de eventos asociados a la variable aleatoria X . En el contexto de la longevidad, resulta de mayor interés la *función de supervivencia*

$$S(x) \doteq P(X > x) = 1 - F(x), \quad x \geq 0.$$

Esta es una función continua y decreciente, con

$$S(0) = 1 \quad \text{y} \quad S(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 0.$$

La correspondiente *función de densidad* se define como

$$f(x) \doteq \frac{d}{dx}F(x) = -\frac{d}{dx}S(x), \quad x > 0.$$

Esta es la única función integrable no negativa que satisface

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \geq 0$$

o equivalentemente

$$S(x) = \int_x^\infty f(t) dt, \quad x \geq 0.$$

La *fuerza de mortalidad* o *función de riesgo*¹ de la variable aleatoria X se define como

$$\mu(x) \doteq \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \quad x > 0. \quad (1)$$

En la teoría de longevidad, el concepto de fuerza de mortalidad tiene una gran relevancia respecto de otras áreas de la probabilidad. Su directa modelación permite comprender y comparar la longevidad de las poblaciones humanas. Dicha función es un indicador del riesgo de fallecimiento de un individuo en cortos períodos de tiempo. Para un individuo de edad $x \geq 0$, la probabilidad de fallecer en un corto período de tiempo de longitud $\Delta > 0$, satisface la aproximación

$$P(x < X \leq x + \Delta \mid X > x) \approx \Delta \cdot \mu(x).$$

A mayor valor de la fuerza $\mu(x)$, mayor será la probabilidad de morir en el período de tiempo $(x, x + \Delta]$. Tal aproximación se debe al teorema del valor medio para integrales:

$$\begin{aligned} P(x < X \leq x + \Delta \mid X > x) &= \frac{P(x < X \leq x + \Delta, X > x)}{P(X > x)} \\ &= \frac{P(x < X \leq x + \Delta)}{S(x)} \\ &= \frac{1}{S(x)} \int_x^{x+\Delta} f(t) dt \approx \frac{1}{S(x)} \cdot \Delta f(x) \\ &= \Delta \cdot \mu(x). \end{aligned}$$

Se concluye además

$$\mu(x) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(x < X \leq x + \Delta \mid X > x), \quad x > 0.$$

Al igual que con las funciones $F(x)$, $S(x)$ o $f(x)$, la distribución de una variable aleatoria continua positiva X se determina por su fuerza de mortalidad $\mu(x)$. Esta afirmación se verifica con la formulación de cualquiera de las primeras funciones en términos de $\mu(x)$. De hecho, al considerar el teorema fundamental del cálculo y

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{1}{S(x)} \frac{d}{dx} S(x) = -\frac{d}{dx} \log S(x), \quad (2)$$

se tiene

$$-\int_0^x \mu(t) dt = \int_0^x \frac{d}{dt} \log S(t) dt = \log S(x) - \log S(0) = \log S(x).$$

¹Este concepto se identifica en inglés como *force of mortality*, *hazard function*, *hazard rate* o *failure rate*.

Así que

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt}, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Por otro lado, la fuerza de mortalidad $\mu(x)$ se caracteriza por dos propiedades:

$$\mu(x) \geq 0, \quad \text{para } x > 0, \quad (4)$$

y es integrable, con

$$\int_0^\infty \mu(x) dx = \infty. \quad (5)$$

La propiedad (4) es una consecuencia de la definición de fuerza de mortalidad (1). Así mismo, se satisface (5). De lo contrario, la variable X perdería el estatus de aleatoria:

$$P(X = \infty) = S(\infty) = e^{-\int_0^\infty \mu(t)dt} > 0.$$

Recíprocamente, cualquier función real integrable $\mu(x)$ definida en $(0, \infty)$, que satisfaga (4)-(5), corresponde a la fuerza de mortalidad de una única variable aleatoria continua positiva X , con función de supervivencia (3). La unicidad es *en distribución*.

Una función alternativa para la medición del riesgo de longevidad es la *tasa de mortalidad central*

$$m(x) = \frac{\int_0^1 f(x+t) dt}{\int_0^1 S(x+t) dt} = \frac{S(x) - S(x+1)}{\int_0^1 S(x+t) dt}, \quad x > 0;$$

véase [5].

Ahora se presentan tres ejemplos de distribuciones de probabilidad asociadas a la longevidad de las poblaciones humanas: exponencial, Gompertz y Gompertz Makeham. Estas distribuciones se definirán en términos de su fuerza de mortalidad.

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución *exponencial* si su fuerza de mortalidad es constante:

$$\mu(x) = C > 0, \quad x > 0. \quad (6)$$

Con una fuerza constante, el riesgo es el mismo para cualquier edad $x > 0$. Por la expresión (3), la función de supervivencia es

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt} = e^{-\int_0^x C dt} = e^{-Cx}, \quad x \geq 0. \quad (7)$$

La correspondiente función de densidad queda como

$$f(x) = -\frac{d}{dx}S(x) = Ce^{-Cx}, \quad x > 0,$$

donde C es el parámetro de *tasa* mientras que $1/C$ lo es de *escala*, así como la media de X .

Por otro lado, propuesto en [14], un modelo clásico de longevidad de las poblaciones humanas es la distribución *Gompertz*. Su fuerza de mortalidad se define como

$$\mu(x) = Be^{ax}, \quad x > 0; \quad \text{con } a, B > 0. \quad (8)$$

El parámetro a es de *tasa* mientras que el valor inicial $\mu(0) = B$ resulta la mínima fuerza de mortalidad de la población. Note que la distribución exponencial es un caso asintótico de la distribución Gompertz, cuando $B > 0$ es fijo y $a \downarrow 0$.

Otro modelo clásico de la longevidad es la distribución *Gompertz Makeham*, cuya fuerza de mortalidad es

$$\mu(x) = Be^{ax} + C, \quad x > 0; \quad \text{con } a, B > 0, \quad C \geq 0. \quad (9)$$

El caso particular $C = 0$ corresponde al modelo Gompertz (8). Makeham [20] incorpora el término constante de (9). En este modelo, la fuerza tiene también una tendencia de crecimiento exponencial, con fuerza inicial $\mu(0) = B + C$. Entre otras propiedades, en la siguiente sección se muestran las funciones de densidad y de supervivencia de la distribución Gompertz Makeham.

La longevidad de un individuo se debe a diversas causas de fallecimiento. El riesgo de fallecer es la suma de los riesgos de cada una de tales causas, siempre que estas sean independientes. Por lo que la fuerza de mortalidad de dos o más causas de muerte independientes resulta la suma de cada una de dichas fuerzas, como lo afirma el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sean X_1, \dots, X_k , $k \geq 2$ variables aleatorias continuas positivas independientes, con respectivas fuerzas de mortalidad $\mu_1(x), \dots, \mu_k(x)$. Entonces*

$$\mu(x) = \mu_1(x) + \dots + \mu_k(x), \quad x > 0,$$

es la fuerza de mortalidad del mínimo $X = X_1 \wedge \dots \wedge X_k$.

Demostración. Por inducción, es suficiente verificar este resultado para $k = 2$. Denote como $S_1(x)$, $S_2(x)$ y $S(x)$ a las funciones de supervivencia de las variables aleatorias X_1 , X_2 y $X = X_1 \wedge X_2$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} S(x) &= P(X > x) = P(X_1 \wedge X_2 > x) \\ &= P(X_1 > x, X_2 > x) = P(X_1 > x) P(X_2 > x) \\ &= S_1(x) S_2(x). \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se debe a la independencia entre X_1 y X_2 . Así que

$$\log S(x) = \log [S_1(x) S_2(x)] = \log S_1(x) + \log S_2(x).$$

Por la expresión (2), resulta

$$\begin{aligned}\mu(x) &= -\frac{d}{dx} \log S(x) = -\frac{d}{dx} \log S_1(x) - \frac{d}{dx} \log S_2(x) \\ &= \mu_1(x) + \mu_2(x).\end{aligned}\quad \square$$

Como consecuencia del teorema anterior, se muestran tres ejemplos relacionados con la mortalidad y el riesgo de longevidad de las poblaciones humanas.

Ejemplo 2.1. 1. Considere X_1, \dots, X_k , $k \geq 2$ variables aleatorias independientes, de distribución exponencial de tasas $C_1, \dots, C_k > 0$, respectivamente. Entonces, $X = X_1 \wedge \dots \wedge X_k$ tiene distribución exponencial de tasa $C = C_1 + \dots + C_k > 0$. Este resultado es una consecuencia del teorema 2.1, en donde la fuerza de mortalidad de la variable aleatoria X es la suma finita de fuerzas constantes:

$$\mu(x) = \mu_1(x) + \dots + \mu_k(x) = C_1 + \dots + C_k = C, \quad x > 0.$$

Este ejemplo aplica al riesgo de longevidad por causas de muerte fortuitas, como accidentes u homicidios. Si hay $k \geq 2$ diferentes causas de muerte de tipo fortuito, independientes y de distribución exponencial cada una, entonces el mínimo de tales variables aleatorias tiene también una distribución exponencial $\exp(\text{tasa} = C)$. En este sentido, la constante C integra la fuerza de mortalidad de todas las causas de muerte fortuitas.

2. La fuerza de mortalidad Gompertz Makeham (9) es la suma de las fuerzas de mortalidad de una distribución Gompertz (8) y una exponencial (6). Así, el fallecimiento X de un individuo ocurre a la edad

$$X = X_1 \wedge X_2,$$

donde X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes, de distribución Gompertz $G(a, B)$ y exponencial $\exp(\text{tasa} = C)$; respectivamente. El término exponencial en la fuerza de mortalidad (9) se entiende como la fuerza por causas naturales mientras que el término constante integra a la fuerza de las causas fortuitas.

3. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes de distribución Gompertz Makeham $GM(a, B_1, C_1)$ y $GM(a, B_2, C_2)$, respectivamente. Entonces, su mínimo $X = X_1 \wedge X_2$ tiene también distribución Gompertz Makeham $GM(a, B_1 + B_2, C_1 + C_2)$. Note que el parámetro tasa a es común. Este resultado tiene aplicación en el riesgo de longevidad de un seguro colectivo, para dos o más individuos de la misma población. Su deducción se deja al lector.

2.1 Vida residual y truncamiento a la izquierda

En esta subsección se definen las variables aleatorias condicionales: vida residual y versión truncada a la izquierda, para una variable aleatoria continua positiva. Se muestra también la relación que guardan entre sí las respectivas funciones condicionales de supervivencia, así como con su contraparte, función de supervivencia incondicional. Análogamente, se presenta la relación entre las respectivas funciones de densidad, así como entre las fuerzas de mortalidad. Tales conceptos condicionales tienen como objeto medir el riesgo de mortalidad de una población sobreviviente a un umbral de edad dado.

Sea X una variable aleatoria continua positiva, con fuerza de mortalidad $\mu(x)$. Dado $X > x \geq 0$, la *vida residual* es $Y \doteq X - x > 0$. Bajo el mismo condicionamiento, la variable $Y + x$ es la versión *truncada a la izquierda* de X , en el nivel x . Si bien son conceptualmente diferentes, hay una dualidad entre la versión truncada y la vida residual. De hecho, salvo por la constante de traslación x , estas variables aleatorias son esencialmente iguales. Las formas de sus funciones condicionales de supervivencia son similares entre sí, así como similares a la forma de la cola derecha de la función de supervivencia incondicional. Un resultado análogo se obtiene con las respectivas funciones de densidad. A continuación, se validarán a detalle tales afirmaciones.

El conjunto de valores posibles de la versión truncada se restringe a edades a partir del valor dado x . Su función de supervivencia condicional $S(x + y | x)$ adquiere la forma de la cola derecha de la respectiva función de supervivencia incondicional $S(x + y)$, a partir de x :

$$\begin{aligned} S(x + y | x) &\doteq P(X > x + y | X > x) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} \\ &= \frac{S(x + y)}{S(x)}, \quad \text{para } x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Una situación similar aplica entre las funciones de densidad de la versión truncada $f(x + y | x)$ y su contraparte incondicional $f(x + y)$, pues

$$f(x + y | x) \doteq -\frac{\partial}{\partial y} S(x + y | x) = \frac{f(x + y)}{S(x)}, \quad \text{para } x, y \geq 0. \quad (10)$$

Además, salvo por la mencionada restricción del dominio, la fuerza de mortalidad condicional es invariante:

$$\begin{aligned} \mu(x + y | x) &\doteq \frac{f(x + y | x)}{S(x + y | x)} = \frac{f(x + y) / S(x)}{S(x + y) / S(x)} \\ &= \frac{f(x + y)}{S(x + y)} = \mu(x + y), \end{aligned}$$

para $x, y \geq 0$.

Por otro lado, el conjunto de valores posibles de la vida residual coincide con el de la variable aleatoria incondicional. La función de supervivencia condicional es

$${}_y p_x \doteq S(y | x) \doteq P(X > x + y | X > x) = \frac{S(x + y)}{S(x)},$$

para $x, y \geq 0$.

La respectiva función de densidad condicional es

$$f(y | x) \doteq -\frac{\partial}{\partial y} S(y | x) = \frac{f(x + y)}{S(x)}. \quad (11)$$

Compare (11) con (10). Cabe mencionar que la fuerza de mortalidad condicional no es invariante, pues

$$\mu(y | x) \doteq \frac{f(y | x)}{S(y | x)} = \frac{f(x + y) / S(x)}{S(x + y) / S(x)} = \frac{f(x + y)}{S(x + y)} = \mu(x + y),$$

para $x, y \geq 0$.

En longevidad, la fuerza de mortalidad de la vida residual es regularmente mayor o igual que su contraparte incondicional:

$$\mu(y | x) = \mu(x + y) \geq \mu(y), \quad x, y \geq 0.$$

Esto significa que los adultos mayores son más propensos a fallecer que los jóvenes. En consecuencia, la supervivencia condicional de la vida residual es menor o igual que su contraparte incondicional:

$$S(y | x) \leq S(y), \quad \text{para } x, y \geq 0. \quad (12)$$

La última relación se conoce como *nuevo es mejor que usado (NBU)*, véase [21]. La distribución Gompertz Makeham satisface tal propiedad, ver la expresión (20) más adelante. Además, la distribución exponencial es la única distribución continua, con valores posibles en $(0, \infty)$, que satisface la expresión (12) con igualdad estricta:

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y), \quad \text{para } x, y \geq 0. \quad (13)$$

Propiedad conocida como *pérdida de memoria*. Recuerde que ello se explica también por la fuerza constante de la distribución exponencial (6). Se deja al lector comprobar que la distribución exponencial satisface la propiedad de pérdida de memoria y que además es la única variable aleatoria continua positiva que lo cumple.

Por otra parte, note que la función de supervivencia condicional de la vida residual involucra a la fuerza de mortalidad en el intervalo $(x, x + y]$:

$${}_y p_x = e^{-\int_x^{x+y} \mu(t) dt},$$

para $x, y \geq 0$.

Esta igualdad se debe a la expresión (3):

$${}_y p_x = \frac{S(x+y)}{S(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+y} \mu(t) dt}}{e^{-\int_0^x \mu(t) dt}} = e^{-\int_x^{x+y} \mu(t) dt}, \quad \text{para } x, y \geq 0.$$

El caso $x = 0$ corresponde a la función de supervivencia incondicional (3). La correspondiente función de distribución condicional es

$${}_y q_x \stackrel{\circ}{=} 1 - {}_y p_x = P(x < X \leq x+y \mid X > x) = 1 - e^{-\int_x^{x+y} \mu(t) dt}, \quad (14)$$

para $x, y \geq 0$. En particular, la probabilidad de que una persona de edad x fallezca en un período de un año es

$$q_x \stackrel{\circ}{=} {}_1 q_x = P(x < X \leq x+1 \mid X > x) = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(t) dt}, \quad (15)$$

para $x \geq 0$. Esta es la *tasa de mortalidad anual*. Si el argumento x es entero, dicha función se conoce como *tasa o fuerza de mortalidad discreta*. El *momio* de (15) satisface

$$\begin{aligned} \frac{q_x}{1 - q_x} &= \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x+1)} = \frac{1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(t) dt}}{e^{-\int_x^{x+1} \mu(t) dt}} \\ &= e^{\int_x^{x+1} \mu(t) dt} - 1 \approx e^{\mu(x)} - 1 \\ &\approx \mu(x), \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

La primera aproximación se debe al teorema de valor medio para integrales. La tasa de mortalidad anual mide el riesgo de una compañía aseguradora, al contratar con una persona de edad x , un seguro de vida con un año de vigencia.

3. Distribución Gompertz Makeham

En esta sección se muestran las propiedades básicas de la distribución Gompertz Makeham. Algunos resultados se detallan explícitamente sólo para el caso particular de la distribución Gompertz. En lo general, se considera que el modelo Gompertz Makeham (9) describe satisfactoriamente la longevidad de las poblaciones humanas. Sin embargo, la implementación de tal modelo tiene algunas limitaciones, descritas en esta misma sección.

La fuerza de mortalidad Gompertz Makeham se definió en (9), como

$$\mu(x) = Be^{ax} + C, \quad x > 0; \quad \text{con } a, B > 0, \quad C \geq 0.$$

Este modelo surge de la evidencia empírica, véase [14] y [20]. Recuerde que el término exponencial explica la fuerza de mortalidad por causas naturales. Así mismo, su término constante integra el riesgo de todas las causas de muerte fortuitas. En lo que respecta a la longevidad por

muerte natural, la evidencia empírica se inclina a favor de la distribución Gompertz. Una justificación teórica de este hecho se explica parcialmente con la teoría de valores extremos para mínimos, la cual se describe brevemente a continuación.

La distribución Gompertz es la versión truncada de la distribución Gumbel para mínimos, a la izquierda de $x = 0$. Esta última es una de sólo tres tipos de distribuciones no degeneradas como dominio de atracción para mínimos. Con lo cual, una distribución origen pertenece al dominio de atracción de la distribución Gumbel para mínimos, si esta última es la distribución límite del mínimo de una sucesión de variables aleatorias independientes, de idéntica distribución origen, con cierta estandarización previa. En este sentido, la variable aleatoria X_1 , descrita en el ejemplo 2.1.2, que se asume con distribución Gompertz, representa a la longevidad por muerte natural de una amplia diversidad de causas de muerte. La distribución origen no necesariamente es Gompertz, ni conocida. Sin embargo, dicha distribución debe pertenecer al dominio de atracción de la distribución Gumbel para mínimos. Por cierto, como consecuencia del teorema 2 en [19], la distribución Gompertz pertenece al dominio de atracción de la distribución Gumbel para mínimos. Para mayores detalles sobre la relación de la distribución Gompertz con la teoría de valores extremos para mínimos, véase [19].

Cabe mencionar que las distribuciones Weibull y Fréchet para mínimos son los otros dos tipos de distribuciones del dominio de atracción de mínimos. La distribución Fréchet para mínimos se descarta como modelo de longevidad, pues su conjunto de valores posibles es $(-\infty, 0)$. Ahora bien, sin descartarlo como modelo de longevidad de poblaciones humanas, la distribución Weibull para mínimos regularmente aplica a tiempos de vida de artículos industriales y componentes electrónicos. Su fuerza de mortalidad se caracteriza por ser del tipo potencia, véanse [19] y [22].

Por otra parte, la distribución Gompertz Makeham presenta algunos inconvenientes en la modelación de la longevidad de poblaciones humanas. Por ejemplo, este modelo no describe la tendencia de la mortalidad infantil, fenómeno conocido como *efecto bañera*. El riesgo de morir al nacer es muy elevado. Este decrece hasta alcanzar un mínimo entre los 6 o 7 años de edad. Luego, el riesgo aumenta exponencialmente con la edad. Así mismo, por el frenesí a edad juvenil, hay un ligero incremento adicional de la fuerza de mortalidad. La tendencia exponencial creciente de la fuerza de mortalidad se observa claramente entre los 30 y 100 años de edad, rango de edad donde la población adulta presenta un patrón sedentario de su vida. Por último, tal tendencia creciente parece frenarse brevemente con los supervivientes de edades mayores

a 100 años. Lo que implica otra violación del supuesto creciente de la fuerza en el modelo Gompertz Makeham, véase [35].

Por otro lado, el modelo Gompertz Makeham asume implícitamente que la longevidad de todas las generaciones tiene la misma distribución. Sin embargo, las poblaciones humanas tienen una longevidad dinámica, en el sentido de que los valores de sus parámetros cambian con el tiempo. Un claro indicador de ello es una esperanza de vida cada vez mayor en la población. Eso se debe principalmente a los avances de la medicina, la educación, así como a la implementación de políticas públicas en cuanto a la prevención de enfermedades y accidentes. Por otra parte, la fuerza de mortalidad aumenta ocasionalmente por motivos de epidemias, desastres naturales, violencia o guerras. En esta idea, hay modelos de longevidad con fuerza de mortalidad dinámica, tanto de naturaleza determinista como estocástica, véanse [4], [1], [23] y [28]. Véase también [17], donde proponen un modelo semi paramétrico para la dinámica de la tasa de mortalidad central, en términos de la edad y el tiempo. Una aplicación de este modelo semi paramétrico para la longevidad de México se encuentra en [12].

La fuerza de mortalidad Gompertz Makeham se explica como la única solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$\frac{d}{dx}\mu(x) - a\mu(x) + aC = 0, \quad x \geq 0;$$

con condición inicial $\mu(0) = B + C > 0$. Para resultados de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, véase [6].

En este trabajo se propone la reparametrización para la distribución Gompertz Makeham

$$b = \frac{B}{a} \quad \text{y} \quad c = \frac{C}{a}, \quad \text{con} \quad a, b > 0 \quad \text{y} \quad c \geq 0.$$

Esta reparametrización no aparece en la bibliografía conocida de los autores. Así, la fuerza de mortalidad Gompertz Makeham (9) se escribe como

$$\mu(x) = abe^{ax} + ac, \quad x \geq 0. \tag{16}$$

Si una variable aleatoria X tiene tal fuerza de mortalidad, se denota como $X \sim \text{GM}(a, b, c)$. En particular, el modelo Gompertz se obtiene cuando $C = c = 0$, denotado como $X \sim \text{G}(a, b)$. En este trabajo se alternará la notación paramétrica (a, B, C) de (9) y (a, b, c) de (16).

La fuerza de mortalidad Gompertz Makeham (16) es una función creciente y convexa respecto de la edad. Recuerde que su término exponencial explica las defunciones por causas naturales, como enfermedades. El parámetro a es de tasa y $1/a$ de escala. Este parámetro tiene la mayor influencia en la localización de la población; a menor valor de a , mayor será la longevidad de una población. El parámetro $B = ab$

es la fuerza de mortalidad inicial por causas naturales. Con lo que b se asocia a la fuerza inicial. En menor medida, este parámetro también influye en la localización de la población. Por ejemplo, la esperanza de vida de una población aumenta si disminuye b , es decir, cuando disminuye la mortalidad infantil. De esta manera, la longevidad de una generación se determina parcialmente por las condiciones de salud en su nacimiento. Tal fenómeno resulta aún más curioso si se considera su efecto en la distribución de la vida residual. Lo cual se apreciará más adelante en expresión (19). Por último, el parámetro c se asocia a la fuerza de mortalidad por causas fortuitas. El término constante $C = ac$ de (16) corresponde a la fuerza de muerte por accidentes u homicidios, común a todas las edades. Este parámetro también perturba en sentido negativo a la localización de la longevidad de la población. En general, el parámetro tasa a modula la localización de la distribución mientras que los parámetros b y c (B y C) hacen lo propio con la forma, así como marginalmente la localización. A continuación, se enuncian las propiedades distribucionales del modelo de longevidad en estudio.

La función de supervivencia Gompertz Makeham es

$$S(x) = e^{-b(e^{ax}-1)-acx}, \quad x \geq 0. \quad (17)$$

Esto se deduce por la expresión (3):

$$S(x) = P(X > x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt},$$

con

$$\int_0^x \mu(t) dt = \int_0^x a (be^{at} + c) dt = [be^{at} + act]_0^x = b(e^{ax} - 1) + acx.$$

Al considerar (1) y (16), se obtiene la función de densidad

$$f(x) = \mu(x) S(x) = a (be^{ax} + c) e^{-b(e^{ax}-1)-acx}, \quad x > 0. \quad (18)$$

Por la expresión (15), la tasa de mortalidad anual queda como

$$\begin{aligned} q_x &= 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(t)dt} = 1 - e^{-[be^{at}+act]_x^{x+1}} \\ &= 1 - e^{-[be^{a(x+1)}+ac(x+1)-(be^{ax}+acx)]} \\ &= 1 - e^{-b(e^a-1)e^{ax}-ac}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Su respectivo momio satisface

$$\begin{aligned} \frac{q_x}{1 - q_x} &= \frac{1 - e^{-b(e^a-1)e^{ax}-ac}}{e^{-b(e^a-1)e^{ax}-ac}} = e^{b(e^a-1)e^{ax}+ac} - 1 \\ &\approx b(e^a - 1) e^{ax} + ac \approx abe^{ax} + ac \\ &= \mu(x). \end{aligned}$$

Por lo cual, la forma del momio $q_x/(1 - q_x)$ es similar a la de la fuerza de mortalidad (16). Lo que confirma la afirmación al final de la subsección 2.1, sobre tal aproximación.

Por otra parte, una importante propiedad de la familia de distribuciones Gompertz Makeham es su cerradura ante la vida residual. Por ejemplo, si la población en estudio se compone de individuos de edad mayor o igual a $x = 30$ años, entonces la distribución de la vida residual de tal subpoblación resulta también Gompertz Makeham. De hecho, por la expresión (14) se tiene

$$\begin{aligned} {}_yq_x &= S(y | x) = P(X > x + y | X > x) \\ &= \frac{S(x + y)}{S(x)} = \frac{e^{-b(e^{a(x+y)}-1)-ac(x+y)}}{e^{-b(e^{ax}-1)-acx}} \\ &= e^{-b(e^{a(x+y)}-e^{ax})-ac(x+y-x)} \\ &= e^{-be^{ax}(e^{ay}-1)-acy}, \quad \text{para } x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Al comparar esta expresión con (17), dado $X > x$, la distribución de la vida residual $Y = X - x$ es también Gompertz Makeham, con parámetros

$$\tilde{a} = a, \quad \tilde{b} = be^{ax} \quad \text{y} \quad \tilde{c} = c.$$

Así

$$[X - x | X > x] \sim \text{GM}(a, be^{ax}, c). \tag{19}$$

El parámetro tasa a es invariante, así como los parámetros asociados a la fuerza por accidentes: c y C . El nuevo parámetro \tilde{b} , junto con \tilde{B} , aumenta. Esto significa que aumenta la fuerza inicial por causas naturales. En consecuencia, la distribución Gompertz Makeham satisface la propiedad NBU (12):

$$S(y | x) = e^{-be^{ax}(e^{ay}-1)-acy} \leq e^{-b(e^{ay}-1)-acy} = S(y), \tag{20}$$

para $x, y \geq 0$. Esto se refleja también en una reducción de la esperanza de vida residual:

$$E[X - x | X > x] = \int_0^\infty S(y | x) dy \leq \int_0^\infty S(y) dy = EX.$$

Así mismo, se verifica que la fuerza de la vida residual es mayor o igual que su contraparte incondicional:

$$\mu(y | x) = a (be^{ax}e^{ay} + c) \geq a (be^{ay} + c) = \mu(y), \quad x, y \geq 0.$$

Esto es otra explicación del hecho de que los individuos mayores serán más propensos a fallecer que los jóvenes, específicamente por su fuerza de muerte natural.

Una implicación importante de la cerradura de la distribución Gompertz Makeham ante la vida residual condicional es que su inferencia

se aborda como si fuese incondicional. Cabe acotar que no hay un resultado análogo para datos truncados a la derecha.

3.1 Indicadores poblacionales de la distribución Gompertz Makeham

En esta parte se describen las medidas de tendencia central de la distribución Gompertz Makeham, junto con la función cuantil y la función generadora de momentos. Esta distribución no tiene una representación amigable de dichos indicadores poblacionales, en contraste con las representaciones explícitas de su densidad, función de supervivencia y fuerza de mortalidad. Primeramente, con la proposición 3.1 se representará a la media y a la función generadora de momentos en términos de la función gamma incompleta. La mediana es la solución de la función cuantil (26), con $p = 1/2$. En general, el cuantil x_p se obtiene de la expresión (28). Finalmente, la moda o las modas de la densidad se describen explícitamente en la proposición 3.2 y en el cuadro 1.

Proposición 3.1. *Sea X una variable aleatoria de distribución Gompertz Makeham $GM(a, b, c)$, con $a, b > 0$ y $c \geq 0$. Entonces, la media es*

$$EX = \int_0^{\infty} e^{-b(e^{ax}-1)-acx} dx = \frac{e^b b^c}{a} \Gamma(-c; b). \quad (21)$$

La función generadora de momentos satisface la identidad

$$M_{GM}(z) \doteq Ee^{zX} = 1 + \frac{e^b z}{ab(z-ac)/a} \Gamma\left(\frac{z-ac}{a}; b\right), \quad z \in \mathbf{R}. \quad (22)$$

En particular, para el caso de la distribución Gompertz ($c = 0$), se tiene

$$EX = \int_0^{\infty} e^{-b(e^{ax}-1)} dx = \frac{e^b}{a} \Gamma(0; b) \quad (23)$$

y

$$M_G(z) \doteq Ee^{zX} = 1 + \frac{e^b z}{abz/a} \Gamma\left(\frac{z}{a}; b\right), \quad z \in \mathbf{R}. \quad (24)$$

La primera igualdad en (21) refleja la relación inversa del valor esperado con los parámetros a , b y c . Con lo cual, la esperanza de vida aumenta si cualquiera de dichos parámetros tiende a cero. En [32] y [23] obtienen la expresión para la esperanza de vida de una población de distribución Gompertz (23), en términos de la función *gamma incompleta*:

$$\Gamma(\alpha; b) \doteq \int_b^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad b > 0.$$

Para propiedades de esta función, ver el apéndice y el capítulo 8 en [9]. Con dicha función se representan también los momentos de la distribución Gompertz, véase [18]. Así mismo, en [24] obtienen la esperanza de la distribución Gompertz Makeham (21). Por otra parte, la deducción de la función generadora de momentos de la distribución Gompertz (24) se encuentra en [16], ver también la expresión (4.3) en [7]. Una contribución de este trabajo es la formulación de la función generadora de momentos de la distribución Gompertz Makeham (22), salvo que haya aparecido antes en algún otro trabajo.

Demostración. La deducción del valor esperado (21) se debe a lo siguiente

$$EX = \int_0^\infty S(x) dx = \int_0^\infty e^{-b(e^{ax}-1)-acx} dx = \frac{e^b}{a} \int_0^\infty e^{-be^t} e^{-ct} dt.$$

Al considerar los cambios de variable $u = e^t$ y $v = bu$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-be^t} e^{-ct} dt &= \int_1^\infty e^{-bu} u^{-c} \frac{du}{u} = \int_1^\infty u^{-(c+1)} e^{-bu} du \\ &= \int_b^\infty \left(\frac{v}{b}\right)^{-(c+1)} e^{-v} \frac{dv}{b} = b^{c+1-1} \int_b^\infty v^{-c-1} e^{-v} dv \\ &= b^c \Gamma(-c; b). \end{aligned}$$

Así que

$$EX = \int_0^\infty e^{-b(e^{ax}-1)-acx} dx = \frac{e^b b^c}{a} \Gamma(-c; b).$$

Si en particular $c = 0$, la media de la distribución Gompertz resulta (23). Ahora se verificará la fórmula de la función generadora de momentos de la distribución Gompertz (24). Primero, se valida que dicha función esté bien definida para $z \leq 0$, pues X es una variable aleatoria positiva. La distribución Gompertz se relaciona con la distribución exponencial según

$$X \stackrel{d}{=} \frac{1}{a} \log \left(\frac{Y}{b} + 1 \right), \tag{25}$$

donde $X \sim G(a, b)$ y $Y \sim \exp(\text{tasa} = 1)$. El símbolo $\stackrel{d}{=}$ significa igualdad *en distribución*. De hecho, si se parte de (25), con $Y \sim \exp(\text{tasa} = 1)$, se tiene

$$\begin{aligned} S(x) &= P(X > x) = P\left(\frac{1}{a} \log \left(\frac{Y}{b} + 1\right) > x\right) \\ &= P\left(\frac{Y}{b} + 1 > e^{ax}\right) = P(Y > b(e^{ax} - 1)) \\ &= e^{-b(e^{ax}-1)}, \quad \text{para } x \geq 0. \end{aligned}$$

En la última igualdad se aplicó (7). Esta es la función de supervivencia (17), con $c = 0$, que corresponde a la distribución Gompertz de parámetros a y b . Así que su función generadora de momentos es

$$M_G(z) = \mathbb{E}e^{zX} = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{b} + 1\right)^{z/a}, \quad z \in \mathbf{R}.$$

Esta función está bien definida para $z > 0$, porque los momentos de la distribución exponencial son finitos. En consecuencia, es finita la función generadora de momentos $M_G(z)$, para cada $z \in \mathbf{R}$. Ahora se procede a deducir (24). Sin pérdida de generalidad, asuma $a = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} M_G(z) &= \mathbb{E}e^{zX} = \int_0^\infty e^{zx} \cdot be^x e^{-b(e^x-1)} dx \\ &= be^b \int_0^\infty e^{-be^x+(1+z)x} dx = be^b \int_1^\infty e^{-bu} u^{z+1} \frac{du}{u} \\ &= be^b \int_1^\infty u^z e^{-bu} du = be^b \int_b^\infty \left(\frac{v}{b}\right)^z e^{-v} \frac{dv}{b} \\ &= b^{-z+1-1} e^b \int_b^\infty v^z e^{-v} dv = \frac{e^b}{b^z} \int_b^\infty v^z e^{-v} dv \\ &= \frac{e^b}{b^z} \Gamma(z+1; b) = \frac{e^b}{b^z} [e^{-b} b^z + z \Gamma(z; b)] \\ &= 1 + \frac{e^b z}{b^z} \Gamma(z; b). \end{aligned}$$

La penúltima igualdad resulta de la forma recurrente de la función gamma incompleta, véase la ecuación (62) del Apéndice. Resta verificar la fórmula del caso general (22). Sea X una variable de distribución Gompertz Makeham. Al considerar el ejemplo 2.1.2, asuma sin pérdida de generalidad que esta variable aleatoria se representa como el mínimo de dos variables aleatorias independientes, una de ellas de distribución Gompertz. Por lo cual la variable aleatoria X está dominada por dicha variable aleatoria de distribución Gompertz. Lo que implica a su vez que la función generadora de momentos de X está bien definida:

$$M_{GM}(z) \leq M_G(z) < \infty, \quad \text{para } z > 0.$$

Note además que

$$\begin{aligned}
 M_{GM}(z) &= \mathbb{E}e^{zX} = \int_0^\infty e^{zx} \cdot a (be^{ax} + c) e^{-b(e^{ax}-1)-acx} dx \\
 &= \int_0^\infty e^{(z-ac)x} \cdot abe^{ax} e^{-b(e^{ax}-1)} dx \\
 &\quad + \frac{c}{b} \int_0^\infty e^{(z-a-ac)x} \cdot abe^{ax} e^{-b(e^{ax}-1)} dx \\
 &= M_G(z-ac) + \frac{c}{b} M_G(z-a-ac) \\
 &= 1 + \frac{e^b(z-ac)}{ab^{(z-ac)/a}} \Gamma\left(\frac{z-ac}{a}; b\right) \\
 &\quad + \frac{c}{b} \left[1 + \frac{e^b(z-a-ac)}{ab^{(z-a-ac)/a}} \Gamma\left(\frac{z-a-ac}{a}; b\right) \right],
 \end{aligned}$$

con

$$\Gamma\left(\frac{z-a-ac}{a}; b\right) = \frac{a}{z-a-ac} \left[\Gamma\left(\frac{z-ac}{a}; b\right) - e^{-b} b^{(z-a-ac)/a} \right].$$

En la última igualdad se usó de nuevo la fórmula recurrente (62) del Apéndice, con $\alpha = (z-a-ac)/a$. Así que

$$\begin{aligned}
 M_{GM}(z) &= 1 + \frac{e^b(z-ac)}{ab^{(z-ac)/a}} \Gamma\left(\frac{z-ac}{a}; b\right) \\
 &\quad + \frac{c}{b} \left[1 + \frac{e^b(z-a-ac)}{ab^{(z-a-ac)/a}} \Gamma\left(\frac{z-a-ac}{a}; b\right) \right] \\
 &= 1 + \frac{e^b(z-ac)}{ab^{(z-ac)/a}} \Gamma\left(\frac{z-ac}{a}; b\right) + \frac{c}{b} \frac{e^b}{b^{(z-a-ac)/a}} \Gamma\left(\frac{z-ac}{a}; b\right) \\
 &= 1 + \frac{e^b z}{ab^{(z-ac)/a}} \Gamma\left(\frac{z-ac}{a}; b\right). \quad \square
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la mediana de la distribución Gompertz Makeham se obtiene con la solución de la ecuación $S(x) = 1/2$. Al recordar la expresión (17), esto equivale a resolver

$$b(e^{ax} - 1) + acx = \log 2.$$

En general, el cuantil x_p resulta de la ecuación

$$S(x) = 1 - p$$

o equivalentemente

$$b(e^{ax} - 1) + acx + \log(1-p) = 0, \quad \text{para } 0 < p < 1. \quad (26)$$

Esta ecuación no lineal no tiene solución trivial, salvo que $c = 0$. Caso último que corresponde a la distribución Gompertz, donde no aparece

el término lineal en (26). Por lo que la función cuantil de la distribución Gompertz resulta

$$x_p = \frac{1}{a} \log \left(1 - \frac{1}{b} \log(1-p) \right), \quad 0 < p < 1. \quad (27)$$

En [15] obtienen una representación de la solución de (26), en términos de la rama principal de la función de Lambert $W(z)$:

$$x_p = \frac{1}{a} \left[\frac{b - \log(1-p)}{c} - W \left(\frac{b}{c} e^{(b - \log(1-p))/c} \right) \right], \quad 0 < p < 1. \quad (28)$$

Ver también la expresión (61) del Apéndice. Ecuaciones no lineales del tipo (26) aparecen en aplicaciones de otras áreas de las matemáticas, véase [8]. La función de Lambert está implementada numéricamente en diversos programas de cómputo. Cabe mencionar que, para valores habituales de los parámetros poblacionales y para valores de p arriba de 0.9, se presentan algunos errores numéricos significativos de la función de Lambert. Esto se debe a que en el rango $p \in (0.9, 1)$, el argumento de la función exponencial (28) puede ser muy grande. Así que no se garantiza la precisión de la función cuantil en dicho rango. Por ejemplo, el software estadístico R considera infinito al valor e^{710} , cantidad numérica factible en datos de longevidad humana. Este defecto es ajeno al parámetro tasa a , como se aprecia en (28). Para enmendar lo anterior, en la expresión (5) de [15] se utiliza una aproximación de la función de Lambert, obtenida en [3] y [2]. Lamentablemente, dicha aproximación es también disfuncional en el contexto de la longevidad de poblaciones humanas de edad avanzada. Una alternativa numérica de muy alta precisión para la solución de la función cuantil (26) se obtiene por método de Newton Raphson, descrito a continuación. Esto se ve favorecido porque el cociente de la fórmula iterativa (30) reduce el efecto de distorsión de los números grandes.

Para calcular la raíz de la función auxiliar

$$g(x) = b(e^{ax} - 1) + acx + \log(1-p), \quad (29)$$

se aplica la fórmula iterativa de Newton Raphson

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (30)$$

donde $x_0 > 0$ es un valor inicial del cuantil x_p . Aquí x_0 no se refiere a $p = 0$. Un ejemplo de valor inicial para x_p se obtiene de la correspondiente aproximación cuadrática de (29). Una mejora en la rapidez de convergencia se obtiene al asignar como valor inicial al cuantil x_p de la distribución Gompertz (27).

Ahora se deducirá el valor de la o las modas de la distribución Gompertz Makeham. La moda de la longevidad es especialmente de interés,

pues alrededor de esta fallece la mayor parte de los individuos de una población. La distribución Gompertz Makeham puede ser unimodal, con moda positiva o cero, o bien bimodal de modas una positiva y el cero. La siguiente proposición determina el valor explícito de la o las modas, según los valores de los parámetros, véase [25].

Proposición 3.2. *Considere el candidato a moda de la distribución Gompertz Makeham*

$$\text{c.m} \doteq \frac{1}{a} \log \frac{1 - 2c + \sqrt{1 - 4c}}{2b}, \quad (31)$$

surgido de la ecuación $f'(x) = 0$. Entonces, la función de densidad $f(x)$ satisface

1. *Tiene una única moda en su único punto estacionario $\text{c.m} \geq 0$, si y sólo si*

$$0 < b \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq c \leq \sqrt{b} - b.$$

2. *Tiene dos modas, el cero y el mayor punto estacionario $\text{c.m} > 0$, si y sólo si*

$$0 < b < \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \sqrt{b} - b < c < \frac{1}{4}.$$

3. *Es decreciente y el cero es la única moda, en cualquier otro caso. En particular*

3.POS *Tiene un único punto estacionario de inflexión en $\text{c.m} > 0$, si y sólo si*

$$0 < b < c = \frac{1}{4}.$$

3.NEG *No tiene puntos estacionarios y $\text{c.m} < 0$, si y sólo si*

$$\sqrt{b} - b < c \leq \frac{1}{4} < b \quad \text{y} \quad c \geq 0.$$

3.COM *No tiene puntos estacionarios y $\text{c.m} \in \mathbf{C}$, si y sólo si*

$$b > 0 \quad \text{y} \quad c > \frac{1}{4}.$$

Por otro lado

•) *Si $\text{c.m} \geq 0$, la fuerza de mortalidad en dicho punto es*

$$\mu(\text{c.m}) = a \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

•) *Para $0 \leq c < (1 + 1/2^{2/3})/3$, la función de densidad tiene a lo más dos puntos de inflexión. Siempre que sean positivos, dichos puntos son*

$$x_k = \frac{1}{a} \log \frac{1 + u_k - c}{b}, \quad k = 1, 0, \quad (32)$$

con rango inter inflexión

$$x_0 - x_1 = \frac{1}{a} \log \frac{1 + u_0 - c}{1 + u_1 - c}; \quad (33)$$

donde

$$u_k = 2 \left(\frac{2 - 3c}{3} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1 - 2c}{2} \left(\frac{3}{2 - 3c} \right)^{3/2} \right) - \frac{2\pi k}{3} \right),$$

$k = 1, 0.$

-) Para $c \geq (1 + 1/2^{2/3})/3$, la densidad no tiene puntos de inflexión.
-) Para el caso de la distribución Gompertz ($c = 0$), la moda es explícitamente

$$\text{moda} = -\frac{1}{a} \log (b \wedge 1),$$

con fuerza de mortalidad en dicho punto

$$\mu(\text{moda}) = a(1 \vee b).$$

Siempre que sean positivos, los puntos de inflexión de la densidad son

$$x_k = \frac{1}{a} \log \frac{1 + u_k}{b}, \quad k = 1, 0; \quad (34)$$

donde $u_k = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Su rango inter inflexión es

$$x_0 - x_1 = \frac{1}{a} \log \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \approx \frac{1.9248}{a}.$$

Antes de la demostración de la proposición, se describirá el rol de los parámetros a , b y c en la forma y localización de la función de densidad. La proposición 3.2 verifica que el parámetro tasa a tiene la mayor influencia en la localización de la densidad; debido a su relación con la escala. En particular, hay una relación inversa entre el parámetro a y las medidas de tendencia central. Hay también una relación inversa entre la moda y los parámetros b y c (B y C). Además, estos últimos parámetros son los que determinan la forma de la densidad. Por otro lado, note que la longitud del rango inter inflexión (33) depende sólo de a y c , principalmente del parámetro tasa.

Para entender el efecto de la forma y la localización de la densidad en términos de los parámetros b y c , nos apoyaremos en la figura 1, donde se muestra la gráfica de cuatro funciones de densidad. Los valores fijos de los parámetros son $a = 0.1$ y $b = 0.001$ mientras que $c = 0.01, 0.12, 0.25, 0.3$. Se recurrirá también a la figura 2, donde se muestra el espacio paramétrico de b y c , particionado en los casos descritos de la proposición 3.2. En cada caso, hay una forma específica de la densidad, moldeada según el número y tipo de puntos estacionarios.

Por los cuatro ejemplos de la figura 1, se aprecia la influencia del parámetro c en la forma de la densidad. La cola izquierda de la densidad tiende a elevarse conforme c crece. En contraste, disminuye su altura al rededor de la moda junto con una cola derecha cada vez más ligera. En los ejemplos de la figura 1 se cumple $0 < b < 1/4$. La densidad es unimodal con moda positiva mientras el valor de c se encuentre cerca de cero ($0 \leq c \leq \sqrt{b} - b$). Lo anterior se aprecia en el ejemplo [arriba izquierda], que representa al caso 1. de la proposición 3.2. Aquí el valor c.m de (31) es el único punto estacionario positivo de la densidad. Como $c = 0.01 \approx 0$, la densidad tiene una forma similar al caso $c = 0$, que resulta el modelo Gompertz. El valor de la única moda disminuye lentamente al incrementar el valor de c . En cambio, si $\sqrt{b} - b < c < 1/4$, la densidad adquiere una forma bimodal, con modas una positiva y cero. Este es el caso 2., representado en la figura 1[arriba derecha]. Aquí la densidad cuenta con dos puntos estacionarios. Finalmente, la densidad es decreciente y el cero se convierte en su única moda si $c \geq 1/4$. En particular, el ejemplo [abajo izquierda] corresponde al caso 3.POS ($c = 1/4$), donde c.m > 0 es el único punto estacionario, aunque de inflexión. Así mismo, el caso 3.COM ($c > 1/4$) se representa en la figura 1[abajo derecha], donde no hay puntos estacionarios.

Por otra parte, respecto del parámetro b , son también de utilidad los ejemplos de la figura 1. Para distinguir su efecto en la forma de la densidad, valore las versiones truncada a la izquierda y vida residual. Planteado en la subsección 2.1, las densidades condicionales de la vida residual y de la versión truncada tienen una forma similar a la cola derecha de la respectiva densidad incondicional; ver expresiones (10) y (11), para cierta edad dada $x \geq 0$. Para el caso de estudio de la distribución Gompertz Makeham, por la expresión (19), la densidad condicional de la vida residual $X - x$ pertenece a la misma familia de distribuciones, con nuevo parámetro de forma $\tilde{b} = be^{ax}$. Este valor es tan grande como se desee al incrementar la edad x , manteniendo sin cambios los parámetros a y c . Por lo cual, el efecto del parámetro b en la localización de la distribución es análogo a cuan truncada a la izquierda está la población objetivo. En este sentido, al aumentar el parámetro b , el valor numérico de la moda de la vida residual disminuye. Finalmente, el cero resulta la única moda de la vida residual, para b suficientemente grande.

El rol del parámetro b se aprecia también con la figura 2. Considere un valor fijo c en $(0, 1/4)$, que corresponda al caso 2., entonces se llegará al caso 1. al incrementar el valor de b . Esta evolución se aprecia al truncar cada vez más la densidad del ejemplo de la figura 1[arriba derecha]. Lo que resulta en una densidad de la forma del ejemplo [arriba izquierda]. Al continuar con el incremento del valor de b , el caso 1. se barre al

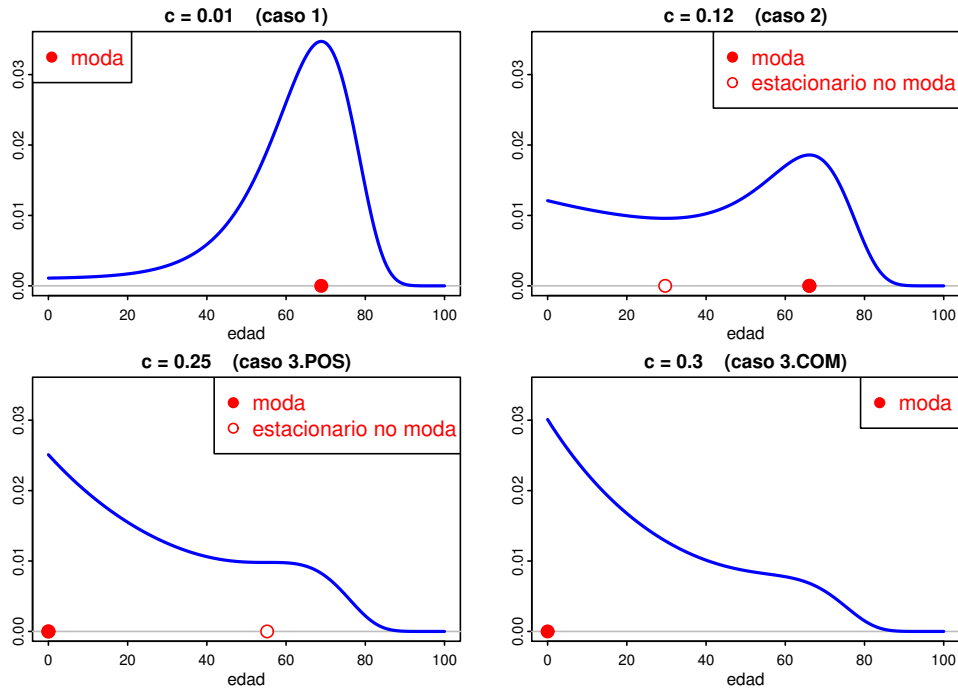


Figura 1. Gráfica de la función de densidad Gompertz Makeham, con valores de los parámetros $a = 0.1$, $b = 0.001$ y $c = 0.01, 0.12, 0.25, 0.3$. La escala de las figuras es la misma. Puntos seleccionados: ● moda (rojo relleno), ○ estacionario no moda (rojo no relleno).

caso 3.NEG., donde la densidad es decreciente. Por otro lado, el caso 3.POS ($0 < b < 1/4 = c$), representado por la figura 1[abajo izquierda], evoluciona al caso 3.NEG cuando b crece. Por último, el caso 3.COM ($b > 0, c > 1/4$) es representado por el ejemplo [abajo derecha], el cual incluye a todas sus versiones truncadas.

En conclusión, el parámetro tasa a tiene una gran influencia en la localización de una población de distribución Gompertz Makeham. En menor medida, la localización es modulada también por los parámetros b y c . Estos últimos parámetros determinan la forma de la densidad. El parámetro c modula la forma de la densidad en el sentido de que eleva la cola izquierda conforme c crece. Lo que implica una reducción de la altura de la densidad alrededor de la moda junto con una cola derecha cada vez más ligera. El parámetro b modula también la forma de la densidad, la cual adquiere una forma igual a la de la densidad condicional de la versión truncada a la izquierda, conforme aumenta el valor de b .

Demostración. Considere $f(x)$, la función de densidad Gompertz Makeham (18), definida en $x \geq 0$. Esta es una función acotada, infinitamente diferenciable, que satisface $f(0) \doteq f(0+) = a(b+c) > 0$ y

	caso		forma de la densidad (y región para c.m)	moda
1.	$0 < b \leq 1$	$0 \leq c \leq \sqrt{b} - b$	unimodal ($c.m \geq 0$)	c.m
2.	$0 < b < \frac{1}{4}$	$\sqrt{b} - b < c < \frac{1}{4}$	bimodal ($c.m > 0$)	c.m y 0
3.POS	$0 < b < \frac{1}{4}$	$c = \frac{1}{4}$	decreciente ($c.m > 0$, que es punto estacionario de inflexión)	0
3.NEG	$b > \frac{1}{4}$	$\sqrt{b} - b < c \leq \frac{1}{4}$	decreciente ($c.m < 0$)	0
3.COM	$b > 0$	$c > \frac{1}{4}$	decreciente ($c.m \in \mathbf{C}$)	0

Cuadro 1. Forma de la densidad Gompertz Makeham, región del candidato a moda c.m (31) y la(s) moda(s); según los valores de b y c en su espacio paramétrico.

$f(\infty) = 0$. Con lo cual, $f(x)$ tiene un máximo global no negativo. Sus primera y segunda derivada son, respectivamente

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \mu'(x) S(x) + \mu(x) S'(x) = \mu'(x) S(x) - \mu(x) f(x) \\
 &= [\mu'(x) - \mu^2(x)] S(x) \\
 &= a^2 [be^{ax} - (be^{ax} + c)^2] S(x)
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

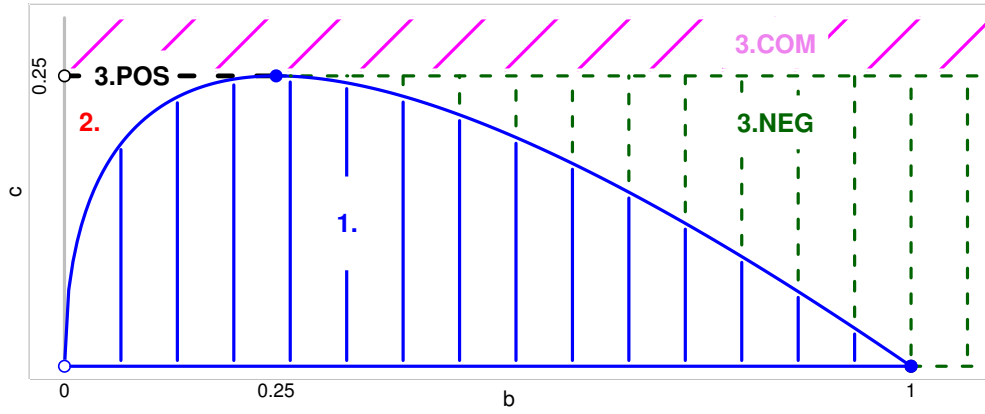


Figura 2. Partición del espacio paramétrico de b y c , de la distribución Gompertz Makeham. Regiones que determinan la forma de su densidad, según la proposición 3.2 y el cuadro 1 .

y

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= [\mu''(x) - 2\mu(x)\mu'(x)]S(x) + [\mu'(x) - \mu^2(x)]S'(x) \\
 &= [\mu''(x) - 3\mu(x)\mu'(x) + \mu^3(x)]S(x) \\
 &= a^3 [be^{ax} - 3be^{ax}(be^{ax} + c) + (be^{ax} + c)^3]S(x). \quad (36)
 \end{aligned}$$

En general, hay dos resultados posibles para la moda: hay una única moda, positiva o cero, o la densidad es bimodal con modas una positiva y el cero. La moda o las modas de la densidad se determinan con el número y el tipo de los puntos estacionarios.² Más adelante se verificará que la densidad tiene a lo más dos puntos estacionarios en $[0, \infty)$. En caso de no existir tales puntos, la densidad es decreciente y el cero es la única moda. Cuando hay sólo un punto estacionario positivo, éste corresponde o a un máximo global o a un punto de inflexión. Lo que implica una única moda, ya sea tal máximo global o el cero; respectivamente. En el caso de dos puntos estacionarios, el menor corresponde a un mínimo local mientras que el segundo resulta máximo local. Por lo que la densidad es bimodal. Por otra parte, las regiones cóncavas y convexas de la densidad se identifican al separar su soporte hasta en tres intervalos cerrados casi ajenos. En orden de aparición factible, dichos intervalos se describen de derecha a izquierda:

²Para una función real derivable $f(x)$, un punto y es *estacionario* si $f'(y) = 0$. Para una función real continua $f(x)$, un punto y es de *inflexión* si en dicho punto cambia la concavidad o la convexidad. Es conocido que un punto estacionario y , de una función $f(x)$ con segunda derivada continua, corresponde a: (a) un máximo local, siempre que $f''(y) < 0$; (b) un mínimo local, siempre que $f''(y) > 0$; ó (c) un punto de inflexión, siempre que $f''(y) = 0$ y $f(x)$ sea estrictamente monótona en una vecindad de y .

-) El primer intervalo cerrado corresponde a la cola derecha de la densidad, la cual tiene una forma decreciente y convexa. Lo decreciente se verifica con el signo negativo del último término de $f'(x)$ en (35). Así mismo, el signo positivo del último término de $f''(x)$ en (36), implica una forma convexa en la cola derecha. Si este intervalo incluye al cero, entonces el cero es un máximo global y la única moda.
-) En caso contrario, hay un segundo intervalo cerrado en donde la densidad tiene una forma cóncava. Este intervalo podría albergar un máximo local de la densidad. En tal caso, dicho máximo local resulta una moda no negativa de la densidad.
-) Si además hay un tercer intervalo cerrado que soporte la cola izquierda de la densidad, su forma es convexa y monótona, ya sea creciente o decreciente. En el caso creciente, la densidad es unimodal con moda positiva, albergada en el segundo intervalo como máximo global. En el caso decreciente, el cero es una moda, pudiendo existir una segunda moda positiva en el segundo intervalo.

A partir de la primera derivada (35), los puntos estacionarios se obtendrán como sigue

$$0 = f'(x) = (be^{ax} + c)^2 - be^{ax} = (be^{ax} + c)^2 - (be^{ax} + c) + c, \quad (37)$$

$$be^{ax} + c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2},$$

$$x = \frac{1}{a} \log \frac{1 - 2c \pm \sqrt{1 - 4c}}{2b}. \quad (38)$$

Las soluciones de esta expresión son reales o complejas, iguales (raíz doble) o diferentes (raíz simple). Ello verifica que la densidad tiene a lo más dos puntos estacionarios en $[0, \infty)$.

-) Si (38) aporta dos soluciones no negativas diferentes, la mayor resulta un máximo local mientras que un mínimo local corresponde a la menor solución. Esto se deduce por el signo de la segunda derivada $f''(x)$, evaluada en las dos soluciones de (38):

$$f''(x) = [\mu''(x) - 2\mu(x)\mu'(x)]S(x) = a^3be^{ax}[1 - 2(be^{ax} + c)]S(x)$$

$$= \mp a^3be^{ax}\sqrt{1 - 4c} \cdot S(x). \quad (39)$$

Aquí se usó (35)-(38), junto con la condición necesaria $0 \leq c < 1/4$. Por lo que dicho máximo local es una moda. El cero también es una moda si son positivas las dos soluciones en (38), situación donde la densidad tiene dos puntos estacionarios positivos.

-) En el caso de sólo una solución no negativa en (38), surgida de raíz simple ($c < 1/4$), el criterio de la segunda derivada implica de nuevo que este punto corresponde a un máximo global y la única moda.
-) En el caso de sólo una solución positiva en (38), surgida de raíz doble

($c = 1/4$), esta resulta un punto estacionario de inflexión, descartado como máximo local. Por lo que la densidad es decreciente y el cero es la única moda.

•) Por último, la ausencia de solución factible en (38), implica que la densidad sea decreciente, con el cero como la única moda. A continuación, se determina la forma de la densidad en los siguientes tres casos exhaustivos.

1. Caso: $0 < b \leq 1$ y $0 \leq c \leq \sqrt{b} - b$. Este caso equivale a $f'(0) \geq 0$. De hecho, por la expresión (35), la última desigualdad equivale a

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^2 [b - (b+c)^2], \\ (b+c)^2 &\leq b, \\ b+c &\leq \sqrt{b}, \\ c &\leq \sqrt{b} - b, \end{aligned}$$

desigualdad que tiene sentido sólo si $0 < b \leq 1$. Por lo que

$$0 < b \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq c \leq \sqrt{b} - b \left(\leq \frac{1}{4} \right).$$

Esta región incluye a su frontera dentro del espacio paramétrico, la cual se describe en la figura 2 con franjas verticales de color azul. Por otro lado, este caso equivale a

$$\frac{1 - 2c - \sqrt{1 - 4c}}{2b} \leq 1 \leq \frac{1 - 2c + \sqrt{1 - 4c}}{2b}. \quad (40)$$

Si se desarrolla esta expresión, se tiene

$$-\sqrt{1 - 4c} \leq 2(b+c) - 1 \leq \sqrt{1 - 4c},$$

$$\begin{aligned} (2(b+c) - 1)^2 &\leq 1 - 4c \\ c &\leq \sqrt{b} - b. \end{aligned}$$

Este caso implica uno de los siguientes subcasos exhaustivos: (a) hay dos soluciones simples en (38), una positiva y el cero; (b) hay una única solución positiva, surgida de raíz simple y; (c) el cero es la única solución, surgida ya sea de raíz simple o doble. De cualquier manera, el candidato a moda c.m (31) está bien definido y es la única moda de la densidad. Por (37), (39) y (40), dicho valor satisface

$$\text{c.m} \geq 0 \quad \text{y} \quad f'(\text{c.m}) = 0 \geq f''(\text{c.m}).$$

2. Caso: $0 < b < 1/4$ y $\sqrt{b} - b < c < 1/4$. Este caso equivale a dos soluciones positivas diferentes en (38):

$$0 < c < \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad 1 < \frac{1 - 2c - \sqrt{1 - 4c}}{2b}. \quad (41)$$

Análogo al desarrollo del caso anterior, se obtienen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{1 - 2c - \sqrt{1 - 4c}}{2b}, \\ \sqrt{1 - 4c} &< 1 - 2(b + c), \\ 1 - 4c &< (1 - 2(b + c))^2 \quad \text{y} \quad 1 - 2(b + c) > 0, \\ b &< (b + c)^2 \quad \text{y} \quad c < \frac{1}{2} - b, \\ \sqrt{b} - b &< c < \frac{1}{2} - b. \end{aligned}$$

Si se combina la última expresión con $0 < c < 1/4$, resulta el caso de estudio

$$0 < b < \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \sqrt{b} - b < c < \frac{1}{4}.$$

Este es un conjunto abierto en el plano, descrito sin color de fondo en la figura 2. Con dos puntos estacionarios positivos en la densidad, implica que c.m y cero son ambos moda, donde $f'(0) < 0$ y

$$\text{c.m} > 0, \quad f'(\text{c.m}) = 0 > f''(\text{c.m}).$$

Aquí se usó (37), (39) y (41). Cabe mencionar que no se especifica cuál de las dos modas es la dominante. Aunque c.m [cero] es la moda dominante, siempre que el valor c se encuentre cerca de su límite inferior $\sqrt{b} - b$ [superior $1/4$]. Se deja como ejercicio al lector especificar la moda dominante al identificar el punto c en el intervalo $(\sqrt{b} - b, 1/4)$, que satisface $f(\text{c.m}) = f(0)$, para cada valor fijo $b \in (0, 1/4)$.

3. Este caso se compone de tres subcasos exhaustivos: **POS** $0 < b < 1/4 = c$, donde (38) tiene una solución positiva de raíz doble, que corresponde a un punto estacionario de inflexión de la densidad; **NEG** $\sqrt{b} - b < c \leq 1/4 < b$, donde (38) no tiene solución factible, por aportar raíces negativas; y **COM** $b > 0$ y $c > 1/4$, donde (38) no tiene solución factible, por ser raíces complejas. En cualquier escenario, la densidad es decreciente y el cero es la única moda. Se analizará cada sub caso.

3.POS Caso: $0 < b < 1/4 = c$. Este caso equivale una única solución

positiva en (38), surgida de raíz doble:

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad 1 < \frac{1 - 2c \pm \sqrt{1 - 4c}}{2b} = \frac{1}{4b},$$

es decir

$$0 < b < \frac{1}{4} = c. \quad (42)$$

Este segmento en el plano sin extremos se describe con línea discontinua de color negro en la figura 2. Si bien el candidato a moda (31), $c.m = -(1/a) \log(4b) > 0$, es la única solución en (38), dicho valor corresponde a un punto estacionario de inflexión de la densidad, descartado como moda. Con lo cual, la densidad es decreciente y el cero es la única moda. Además, al considerar (37), (39) y (42), se tiene

$$c.m > 0 \quad \text{y} \quad f'(c.m) = 0 = f''(c.m).$$

En este caso se confirma fácilmente la propiedad decreciente de la densidad. Por la expresión (35), para $x \geq 0$, se obtiene $f'(x) \leq 0$:

$$(be^{ax} + c)^2 - be^{ax} = \left(be^{ax} + \frac{1}{4} \right)^2 - be^{ax} = \left(be^{ax} - \frac{1}{4} \right)^2 \geq 0.$$

3.NEG Caso: $\sqrt{b} - b < c \leq 1/4 < b$. En este caso no hay solución factible en (38), pues son soluciones negativas:

$$0 \leq c \leq \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{1 - 2c + \sqrt{1 - 4c}}{2b} < 1. \quad (43)$$

Si se desarrolla esta expresión, se tiene el caso de estudio

$$\sqrt{b} - b < c \leq \frac{1}{4} < b.$$

Esta región se muestra con líneas verticales discontinuas en la figura 2. En este caso no hay punto estacionario no negativo. En consecuencia, la función $f(x)$ es decreciente y el cero es su única moda. Lo cual se confirmará más adelante. Si se evalúa (35) en $x = 0$, se tiene

$$f'(0) = a^2 [b - (b + c)^2] < 0. \quad (44)$$

Esta desigualdad, junto con $0 \leq c \leq 1/4$, equivale al caso de estudio (43). La desigualdad (44) se satisface también si se reemplaza be^{ax} por b , con $x > 0$. Esto se debe a que, con el nuevo valor del parámetro de forma, se cumple la relación (43):

$$\frac{1 - 2c + \sqrt{1 - 4c}}{2(be^{ax})} \leq \frac{1 - 2c + \sqrt{1 - 4c}}{2b} < 1.$$

Análogo a la equivalencia entre (43) y (44), la última relación equivale a

$$a^2 [be^{ax} - (be^{ax} + c)^2] < 0.$$

Se concluye que $f'(x) < 0$, para $x \geq 0$. Por otro lado, como se mencionó en la página 37, la densidad tiene una cola derecha convexa, acompañado hasta por otro intervalo con forma cóncava. En tal caso, la densidad tiene un punto de inflexión no estacionario. Se invita al lector verificar que $f''(0)$ puede ser de cualquier signo, incluso cero.

3.COM Caso: $b > 0$ y $c > 1/4$. Este es un rectángulo no acotado en el plano, que se muestra con líneas diagonales de color magenta en la figura 2. Similar al anterior, este caso se caracteriza porque no hay solución factible en (38), pues son soluciones complejas. Por lo cual, la densidad resulta decreciente y el cero es la única moda. De hecho, se tiene $f'(0) < 0$ y, para $x > 0$, $f'(x) \leq 0$:

$$(be^{ax} + c)^2 - be^{ax} > \left(be^{ax} + \frac{1}{4} \right)^2 - be^{ax} = \left(be^{ax} - \frac{1}{4} \right)^2 \geq 0.$$

Como se describe en la página 37, además de un intervalo cerrado que soporta la cola derecha de la densidad, con forma convexa, hay hasta otros dos intervalos donde la densidad tiene forma cóncava y otro con forma convexa. De esta manera, la densidad tiene hasta dos puntos de inflexión no estacionarios. Se invita al lector verificar que $f''(0)$ puede tener cualquier signo, incluso cero.

El cuadro 1 resume la forma de la densidad, así como el valor de su o sus modas, en términos de los valores de los parámetros b y c . Por otro lado, para el caso $c.m \geq 0$, por la expresión (16), el candidato a moda tiene una fuerza de mortalidad

$$\mu(c.m) = a (be^{a \cdot c.m} + c) = a \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

El resto de la demostración consiste en identificar los puntos de inflexión de la densidad, siempre que existan. Los puntos de inflexión se identifican con la igualdad $f''(x) = 0$. Por la expresión (36), se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= f''(x) = (be^{ax} + c)^3 - 3be^{ax}(be^{ax} + c) + be^{ax} \\ &= (be^{ax} + c)^3 - 3(be^{ax} + c)^2 + (1 + 3c)(be^{ax} + c) - c \\ &= z^3 - 3z^2 + (1 + 3c)z - c = (z - 1)^3 - (2 - 3c)(z - 1) - (1 - 2c) \\ &= u^3 - (2 - 3c)u - (1 - 2c), \end{aligned}$$

con

$$u = z - 1 > -1 \quad \text{y} \quad z = be^{ax} + c > 0.$$

Hay que resolver la ecuación cúbica incompleta

$$u^3 + pu + q = 0, \quad \text{para} \quad u \geq -1,$$

con

$$p = -(2 - 3c) \quad \text{y} \quad q = -(1 - 2c),$$

véase la expresión (5.1.3.1) en [29] o bien (63) del apéndice. Considere la función auxiliar

$$g(u) = u^3 + pu + q, \quad \text{para } u \geq -1.$$

La fórmula Viète Descartes (65) del apéndice ofrece tres raíces ordenadas para la función $g(u)$, siempre que se satisfaga la condición (64) del apéndice. De esta manera, la condición

$$c \leq \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \left(\frac{1-2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-3c}{3}\right)^3 \leq 0, \quad (45)$$

implica las soluciones

$$u_k = 2 \left(\frac{2-3c}{3}\right)^{1/2} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1-2c}{2} \left(\frac{3}{2-3c}\right)^{3/2}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right),$$

$k = 2, 1, 0.$

La condición (45) equivale a

$$0 \leq c \leq \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{2/3}}\right) \approx 0.5433. \quad (46)$$

De hecho, si $0 \leq c < 2/3$, entonces

$$\left(\frac{1-2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-3c}{3}\right)^3 \leq 0$$

si y sólo si

$$2^2(3c-1)^3 - 1 = 2^2(3c-2)^3 + 3^3(2c-1)^2 \leq 0.$$

Relación que equivale a (46). En tal caso, la menor raíz real se encuentra en el intervalo $[-1, -2/3)$, pues

$$g(-1) = -1 - (2-3c)(-1) - (1-2c) = -c \leq 0$$

y

$$g\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + (2-3c)\frac{2}{3} - (1-2c) = \frac{1}{27} > 0.$$

Sin embargo, dicha raíz no ofrece un valor factible de x . Se verificará por contradicción tal imposibilidad. Asuma que existe $x > 0$ tal que

$$u_2 = be^{ax} + c - 1 \in \left[-1, -\frac{2}{3}\right).$$

La existencia de un punto de inflexión x en el intervalo $[-1, -2/3)$ impone una restricción de los parámetros b y c :

$$0 < b + c < \frac{1}{3}, \quad (47)$$

pues

$$-1 < b + c - 1 < be^{ax} + c - 1 < -\frac{2}{3}.$$

Por otro lado, al aplicar (36), se tiene

$$0 > f''(0) = a^3 [(b+c)^3 - 3b(b+c) + b].$$

Por la relación (47), la expresión anterior implica una contradicción:

$$b < b + (b+c)^3 < 3b(b+c) < b.$$

Por otro lado, las otras dos raíces sí aportan una solución factible para x . En el caso de raíces simples, estas se ubican en los intervalos $(-2/3, ((1 - 2^{-2/3})/3)^{1/2}]$ y $(((1 - 2^{-2/3})/3)^{1/2}, 5/3)$, respectivamente. Lo cual se deduce por

$$\begin{aligned} g\left(\left(\frac{1 - 2^{-2/3}}{3}\right)^{1/2}\right) &= \left(\frac{1 - 2^{-2/3}}{3}\right)^{3/2} - (2 - 3c)\left(\frac{1 - 2^{-2/3}}{3}\right)^{1/2} \\ &\quad - (1 - 2c) \\ &= \left(1 + 2^{1/3} + \frac{1}{2^{1/3}}\right) \left(c - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{2/3}}\right)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

y

$$g\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - (2 - 3c)\frac{5}{3} - (1 - 2c) = 7c + \frac{8}{27} > 0.$$

Siempre que sean positivos, los puntos de inflexión (32) se obtienen por la expresión

$$u_k = be^{ax_k} + c - 1, \quad k = 1, 0.$$

El caso de una raíz doble se presenta en $x = ((1 - 2^{-2/3})/3)^{1/2}$, cuando $c = (1 + 2^{-2/3})/3$. Ahora se analizarán los casos extremos del intervalo para c en (46). Cuando $c = 0$, caso correspondiente a la distribución Gompertz, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= u^3 - (2 - 3c)u - (1 - 2c) = u^3 - 2u - 1 \\ &= (u + 1)(u^2 - u - 1) \\ &= (u + 1)\left(u - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(u - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

Las dos raíces más grandes son

$$u_k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right), \quad k = 1, 0.$$

Los respectivos puntos de inflexión están dados en (34), siempre que dichos valores sean positivos. Además, la menor raíz no es relevante. En caso contrario se tendría

$$-1 = u_2 = be^{ax} + c - 1 = be^{ax} - 1.$$

Esto implica una igualdad sin solución para $x > 0$: $be^{ax} = 0$. Por otra parte, con el ejemplo opuesto $c = (1 + 2^{-2/3})/3$, el argumento de la función arc cos es -1 . Por lo que

$$\begin{aligned} u_k &= 2\sqrt{\frac{2-3c}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(-1) - \frac{2\pi k}{3}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right)} \begin{cases} -2 & k = 2 \\ 1 & k = 1 \\ 1 & k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se confirma que la raíz más grande es doble. De modo que el rango inter inflexión es de longitud cero. De esta manera, no hay puntos de inflexión y la densidad es convexa en $[0, \infty)$. De nuevo, en este caso la menor raíz no es relevante. Ello implicaría una contradicción. Si

$$-2\sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right)} = u_2 = be^{ax} + c - 1 = be^{ax} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{2/3}}\right) - 1,$$

entonces

$$0 < be^{ax} = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right)} - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{2/3}}\right) < 0.$$

Por otra parte, el caso contrario a (46) $c > (1 + 2^{-2/3})/3$, implica una única raíz real de la función $g(u)$, pues las otras dos son complejas. Este es el caso contrario a (64) del Apéndice. Ubicada en $[-1, 2/3)$, la única raíz tampoco ofrece una solución factible para x . De hecho, como $c > 1/3$, no se cumple la restricción (47). En este caso la densidad también es decreciente y convexa. Se concluye que la densidad tiene a lo más dos puntos de inflexión, según sean positivos los valores (32). En tal caso, el rango inter inflexión resulta

$$x_0 - x_1 = \frac{1}{a} \log \frac{1 + u_0 - c}{b} - \frac{1}{a} \log \frac{1 + u_1 - c}{b} = \frac{1}{a} \log \frac{1 + u_0 - c}{1 + u_1 - c}.$$

Por último, para el caso de la distribución Gompertz, sustituya $c = 0$ en las fórmulas arriba desarrolladas. \square

Métodos de simulación. Hay varios procedimientos de simulación de variables aleatorias de distribución Gompertz Makeham. Junto con otros métodos de simulación, en [27] se explica el de composición. Este método se basa en la representación de una variable aleatoria de distribución Gompertz Makeham como el mínimo de dos variables aleatorias

independientes, una de distribución Gompertz y la otra de distribución exponencial. Como se describe en el ejemplo 2.1.2, se tiene

$$X = X_1 \wedge X_2 \sim \text{GM}(a, b, c),$$

donde X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes, con

$$X_1 \sim \text{G}(a, b), \quad X_2 \sim \text{exp}(\text{tasa} = ac).$$

Por otra parte, la distribución exponencial se relaciona con la uniforme según la fórmula

$$X_2 \stackrel{d}{=} -\frac{1}{ac} \log U_2, \tag{48}$$

donde U_2 es una variable aleatoria de distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Análogamente, para la distribución Gompertz, se tiene la relación

$$X_1 \stackrel{d}{=} \frac{1}{a} \log \left(1 - \frac{1}{b} \log U_1 \right),$$

donde U_1 es una variable aleatoria de distribución uniforme en $(0, 1)$ e independiente de U_2 . Para visualizar el último resultado, ver expresiones (25) y (48). Por lo cual, la simulación de la variable aleatoria X se reduce a realizar lo propio con dos variables aleatorias independientes de distribución uniforme.

Otro método de simulación involucra a la función cuantil (28), la cual se representa en términos de la función de Lambert $W(z)$. Sin embargo, como se comentó en la descripción posterior a (28), no es precisa la implementación numérica de tal función en diversos programas de cómputo, especialmente para edades grandes (arriba del cuantil 90%). Una alternativa de simulación se produce con la solución de la función cuantil (28), mediante la fórmula iterativa del método de Newton Raphson (30).

4. Estimación y bondad de ajuste

En esta sección se aplicará el método de máxima verosimilitud para la estimación de los parámetros del modelo Gompertz Makeham. Se describen los pasos para obtener el vector de parámetros $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ que maximiza la función de verosimilitud, dada una muestra aleatoria. Así mismo, se describen algunas técnicas gráficas de análisis de diagnóstico y bondad de ajuste, tales como histograma, función de supervivencia empírica, fuerza de mortalidad empírica y las gráficas de cuantiles Q-Q y de probabilidades P-P. Finalmente, se realiza un análisis estadístico para dos conjuntos de datos, una muestra aleatoria simulada y otro de datos reales. El conjunto de datos reales se refiere a la población masculina de México fallecida en 2012.

Para el caso de la distribución Gompertz, el método de máxima verosimilitud se desarrolla en [13]. Un tanto más compleja resulta la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros del modelo Gompertz Makeham. Ante esta dificultad numérica, se han implementado otros métodos alternativos de estimación. Por ejemplo, en [11] se obtiene la estimación por mínimos cuadrados de los parámetros del modelo en estudio. En tal referencia se afirma que el método de máxima verosimilitud es ineficaz, respecto del de mínimos cuadrados. Habría que comparar la precisión de ambos métodos, para verificar dicha afirmación. En nuestro caso, la estimación de los parámetros del modelo por el método de máxima verosimilitud se obtiene con gran precisión numérica; con la garantía de ubicar el vector de parámetros que maximiza la función de verosimilitud. El procedimiento computacional desarrollado para este trabajo es numéricamente robusto, probado tanto en muestras de tamaño pequeño ($n \leq 100$) como para diferentes valores de los parámetros poblacionales. Si bien representó un reto, especialmente en muestras de tamaño pequeño, se lograron solventar las dificultades numéricas que surgen en la implementación del enfoque de verosimilitud.

Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ una muestra aleatoria de una población Gompertz Makeham. Considere la función de densidad (18), con vector de parámetros $\theta = (a, b, c)$, de espacio paramétrico $a, b > 0$ y $c \geq 0$. La función de *verosimilitud* es

$$\begin{aligned} L(\theta; x) &\stackrel{\circ}{=} \prod_{i=1}^n f(x_i; a, b, c) = \prod_{i=1}^n a (be^{ax_i} + c) e^{-b(e^{ax_i} - 1) - acx_i} \\ &= a^n e^{-acn\bar{x} - bn[\bar{y}(a) - 1]} \prod_{i=1}^n [by_i(a) + c], \end{aligned}$$

con

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad n\bar{y}(a) = \sum_{i=1}^n y_i(a), \quad y_i(a) = e^{ax_i}.$$

Se postula que la función de verosimilitud tiene toda la información de la muestra sobre el parámetro θ , véase [34]. El estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ es el valor que maximiza dicha función en el espacio paramétrico:

$$\hat{\theta} \stackrel{\circ}{=} \arg \max_{\theta} L(\theta; x).$$

El problema de optimización equivale a realizar lo propio con la función de *log verosimilitud*

$$l(\theta) \stackrel{\circ}{=} \log L(\theta) = n \log a - acn\bar{x} - bn(\bar{y}(a) - 1) + \sum_{i=1}^n \log (by_i(a) + c).$$

Escriba esta función como

$$l(\theta) = \log a - ac\bar{x} - b(\bar{y}(a) - 1) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(by_i(a) + c). \quad (49)$$

El estimador por máxima verosimilitud de θ se obtiene al resolver numéricamente las siguientes tres ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial a} l(\theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} l(\theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c} l(\theta) = 0. \quad (50)$$

Si bien la función de log verosimilitud $l(\theta)$ es diferenciable, estas ecuaciones tienen sentido sólo en el interior del espacio paramétrico de θ . Dichas ecuaciones no aplican en el caso que $l(\theta)$ alcance su máximo en la frontera $c = 0$.

Con la segunda ecuación en (50), se obtiene el valor $\hat{b}(a, c)$. Sustituya este valor en (49), para lograr la función de log verosimilitud perfil $l(a, c) \doteq l(a, \hat{b}(a, c), c)$. El siguiente paso consiste en maximizar esta función respecto de (a, c) . Para la maximización numérica, se recomienda el método de Newton Raphson. Como ya se mencionó, dicho método iterativo no aplica cuando el óptimo se ubica en la frontera $c = 0$. Una vez calculado el valor óptimo (\hat{a}, \hat{c}) , el estimador del parámetro asociado a la mortalidad inicial es $\hat{b} = \hat{b}(\hat{a}, \hat{c})$. Cabe mencionar que la convergencia de este método es altamente confiable y numéricamente robusto, aún con muestras de tamaño pequeño. Un valor inicial sugerido para el parámetro tasa es $a = 0.1$, nivel del orden a las estimaciones históricas de poblaciones adultas, véase [15, p. 3073].

Una vez obtenido $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$, el vector que maximiza (49), la función de *verosimilitud relativa* se define como

$$\frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} \doteq \exp \left\{ \log \frac{a}{\hat{a}} - (ac - \hat{a}\hat{c})\bar{x} - b(\bar{y}(a) - 1) + \hat{b}(\bar{y}(\hat{a}) - 1) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{by_i(a) + c}{\hat{b}y_i(\hat{a}) + \hat{c}} \right\}.$$

En $\theta = \hat{\theta}$, esta función alcanza su valor máximo de uno. El re escalamiento facilita la inferencia de los parámetros del modelo. Su imagen resulta convencionalmente el intervalo $(0, 1]$, sin que ello implique una interpretación de probabilidad.

Por otro lado, una configuración clásica de los datos oficiales de longevidad de los países es la de una matriz de dos columnas $[x, w]$, donde $x \geq 0$ es un vector de edades de fallecimiento enteras, con respectivo vector de frecuencias absolutas $w \geq 0$. Regularmente la edad de fallecimiento se agrupa en enteros, múltiplos de 1 ó 5 años. La censura por intervalo de un año no resulta grave. Por lo que se puede considerar

como si no ocurriese. En tal caso, para su análisis estadístico, agregue medio año a cada dato entero. Esta enmienda no se recomienda en censuras por intervalo de dos más años. En este trabajo se asume que los datos censurados están agrupados por edad entera, $x = 0, 1, \dots$.

Fuerza de mortalidad empírica. En esta parte se construirá una estimación no paramétrica de la fuerza de mortalidad (1). En [35] analizan diversas estimaciones no paramétricas de la fuerza de mortalidad empírica, así como de la fuerza de mortalidad central.

La estimación no paramétrica de la fuerza de mortalidad valida empíricamente un modelo distribucional de la longevidad. Por ejemplo, en poblaciones con distribución Gompertz, el logaritmo de su fuerza de mortalidad (8) tiene una forma de línea recta con pendiente positiva:

$$\log \mu(x) = \log(ab) + ax, \quad x \geq 0; \quad \text{con } a, b > 0.$$

Este patrón lineal debe apreciarse en la versión empírica de $\mu(x)$.

Por la expresión (1), la fuerza de mortalidad de una variable aleatoria continua positiva X se define como

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \quad x > 0;$$

donde $f(x)$ y $S(x)$ denotan a las funciones de densidad y de supervivencia, respectivamente. Un estimador no paramétrico de la fuerza $\mu(x)$ se basa en las versiones empíricas tanto de la densidad como de la supervivencia. Veremos a cada uno de ellas.

El histograma de frecuencias absolutas aporta una versión empírica de la función de densidad. Un histograma es una gráfica de frecuencias absolutas de datos agrupados, ya sea de origen agrupado o no. En este sentido, un histograma de $k + 1$ intervalos de clase se compone de las frecuencias absolutas w_0, w_1, \dots, w_k , que denotan el total de personas fallecidas a las edades enteras $x = 0, 1, \dots, k$, respectivamente. El tamaño de muestra es el total de personas fallecidas:

$$n = w_0 + w_1 + \dots + w_k.$$

La función de densidad empírica resulta

$$f_n(x) \doteq \frac{1}{\Delta} \frac{w_x}{n}, \quad x = 0, 1, \dots, k;$$

donde $\Delta > 0$ es la longitud del intervalo de clase, que se asume por defecto $\Delta = 1$.

Por otra parte, dada una muestra aleatoria ordenada $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$, la función de *supervivencia empírica* se define como

$$S_n(x) \doteq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(x_i > x)}, \quad x \geq 0. \quad (51)$$

Esta es una función decreciente escalonada, continua por la derecha y con límite por la izquierda. En muestras de datos no agrupados (sin censura), no hay observaciones repetidas y

$$S_n(x_i) = \frac{n-i}{n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (52)$$

En particular, las probabilidades observadas en los datos extremos son

$$S_n(x_1) = \frac{n-1}{n} \quad \text{y} \quad S_n(x_n) = 0.$$

Para datos agrupados por edad entera (censura por intervalo de un año), la función de supervivencia empírica queda como

$$S_n(x) = \frac{n - (w_0 + \dots + w_x)}{n} = \frac{w_{x+1} + \dots + w_k}{n}, \quad x = 0, 1, \dots, k. \quad (53)$$

En particular

$$S_n(0) = \frac{n - w_0}{n} \quad \text{y} \quad S_n(k) = 0.$$

Ya sea de origen agrupado (53) o no (52), note que se anula la probabilidad observada del último dato. Hecho que reduce su transformación en diversas técnicas gráficas. Alternativamente, en cada salto de la función de supervivencia empírica, considere como probabilidad observada al promedio aritmético de las probabilidades observadas involucradas en dicho punto. Por ejemplo, si hay un salto a la edad $x \geq 0$, entonces la nueva función de supervivencia empírica cambia de $S_n(x)$ a $(S_n(x-) + S_n(x))/2$. Así, para datos no agrupados, no hay repetición de los mismos y las probabilidades observadas (52) se redefinen al reemplazar $i - 0.5$ por i :

$$S_n(x_i) = \frac{n - i + 0.5}{n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (54)$$

En particular

$$S_n(x_1) = \frac{n - 0.5}{n} \quad \text{y} \quad S_n(x_n) = \frac{0.5}{n} > 0.$$

Análogamente, en el caso de datos agrupados, la alternativa gráfica implica

$$S_n(x) = \frac{n - (w_0 + \dots + w_x) + w_x/2}{n} = \frac{w_x/2 + w_{x+1} + \dots + w_k}{n}, \quad x = 0, 1, \dots, k. \quad (55)$$

En particular

$$S_n(0) = \frac{n - w_0/2}{n} \quad \text{y} \quad S_n(k) = \frac{w_k/2}{n}.$$

Finalmente, la fuerza de mortalidad empírica se define como

$$\mu_n(x) \doteq \frac{f_n(x)}{S_n(x)}, \quad x = 0, 1, \dots, k.$$

En la expresión (2.1) de [35] se sugiere evaluar el argumento x en la marca de clase, que es el centro de cada intervalo de clase. Ante datos no agrupados, el numerador queda intacto mientras que el denominador sufriría una ligera baja.

Gráficas de probabilidades P-P y de cuantiles Q-Q. Las gráficas de probabilidades P-P y de cuantiles Q-Q son técnicas que evalúan la bondad del ajuste del modelo propuesto, véase [22]. Ambas técnicas se basan en el teorema de Glivenko Cantelli, así como en la ley fuerte de los grandes números, véase [10].

Dada una muestra aleatoria ordenada $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$, considere la función de supervivencia empírica $S_n(x)$ de (51). Del teorema de Glivenko Cantelli, se tiene la aproximación

$$S_n(x) \approx S(x), \quad x \geq 0; \quad (56)$$

para n grande. Por otro lado, de la ley fuerte de los grandes números resulta la aproximación

$$\hat{S}(x) \approx S(x), \quad x \geq 0. \quad (57)$$

Aquí $\hat{S}(x) = S(x; \hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ denota la función de supervivencia estimada; una vez aplicada la expresión (17), con $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ el estimador de máxima verosimilitud del vector de parámetros del modelo. Al conjuntar las aproximaciones (56) y (57), debe apreciarse empíricamente la aproximación

$$\hat{S}(x_i) \approx S_n(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (58)$$

Esta aproximación inspira la *gráfica de probabilidades P-P*, conformada por los puntos

$$(S(x_i), \hat{S}_n(x_i)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Recuerde que las probabilidades observadas $S_n(x_i)$ están dadas en (52) o (53). Aquí también se puede usar la versión alternativa (54) o (55), respectivamente.

Por otra parte, al considerar la expresión (28), la función cuantil estimada es

$$\hat{S}^{-1}(p) = S^{-1}(p; \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}), \quad p \in (0, 1).$$

Si aplica esta función a ambos lados de (58), resulta la aproximación

$$x_i \approx \hat{S}^{-1}(S_n(x_i)), \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

De esta manera, la *gráfica de cuantiles Q-Q* se compone de tales $n - 1$ puntos. Aquí se pierde el último punto, pues $\hat{S}^{-1}(p)$ no está definida

en $p = 0$. Dicho punto se recupera con la versión alternativa de $S_n(x_i)$, ya sea (54) o (55).

A continuación, se realizará un análisis estadístico a dos conjuntos de datos: un ejemplo de datos simulados y otro de datos reales. Se aplicarán las técnicas estadísticas gráficas descritas en esta sección.

Análisis de datos simulados. Se simuló una muestra aleatoria de distribución Gompertz Makeham de tamaño $n = 100$, con valores poblacionales de los parámetros dados en el cuadro 2. En la figura 3 [arriba izquierda] se aprecia el histograma de la muestra simulada. El ajuste de densidad corresponde a la estimación de los parámetros del modelo por el método de máxima verosimilitud, que aparece también en la mencionada en el cuadro. El ajuste de densidad se considera aceptable. Note que la densidad estimada tiene forma bimodal. De hecho, junto con la densidad poblacional, la densidad ajustada pertenece al caso 2. de la proposición 3.2 y del cuadro 1. En el apartado [arriba derecha] aparece la correspondiente función de distribución empírica. Aquí la función de supervivencia estimada se encuentra cerca de su contraparte empírica. Por lo que, la función de supervivencia estimada explica satisfactoriamente a la función de supervivencia empírica. En el caso de la gráfica de la función log fuerza de mortalidad empírica [abajo izquierda], el ajuste respectivo pasa cerca del centro de los puntos. Cabe mencionar que este indicador no paramétrico de riesgo tiene una gran variabilidad, especialmente en edades tempranas. Por último [abajo derecha], se muestra la gráfica de cuantiles Q-Q, cuyo patrón de línea recta es bastante aceptable. Una conclusión similar se obtiene de la correspondiente gráfica no mostrada de probabilidades P-P.

Análisis de datos reales: población masculina de México, fallecida en 2012. Se realizó un análisis estadístico al conjunto de datos de la población masculina de México, fallecida durante el año 2012. La base de datos está disponible en [33]. Se determinó analizar la distribución de vida residual de los individuos de edad mayor o igual a $x = 30$ años, rango de edad donde la población adulta tiene una vida sedentaria. La muestra es de tamaño $n = 284,698$ individuos, agrupada por edad entera, es decir, datos censurados por intervalo de un año. En la figura 4 se aprecian cuatro gráficas para esta muestra. Por el análisis estadístico, se considera que la población en estudio tiene una distribución Gompertz Makeham. Por ejemplo, en el histograma [arriba izquierda], el ajuste densidad es bastante aceptable. Se concluye una situación similar al observar la gráfica de la función de supervivencia empírica [arriba derecha]. De hecho, la función de supervivencia ajustada apenas se alcanza a ver, pues sus valores numéricos se encuentran muy cerca de las respectivas probabilidades observadas. En el caso de

parámetro	x edad de truncamiento	n tam. de muestra	a	b	c	$B = ab$	$C = ac$
muestra simulada							
poblacional			0.08	0.0025	0.085	0.0002	0.0068
estimado	0	100	0.095	0.00055	0.063	0.00005	0.006
población masculina de México fallecida en 2012							
estimado	30	284698	0.0756	0.0025	0.0852	0.00019	0.00644

Cuadro 2. [arriba] Valores poblacionales y estimados por máxima verosimilitud de los parámetros del modelo Gompertz Makeham, para la muestra simulada, descrita en la figura 3. [abajo] Respectivas estimaciones para la muestra de datos reales, descrita en la figura 4.

la gráfica de la función log fuerza de mortalidad empírica [abajo izquierda], su ajuste correspondiente también tiene un patrón aceptable, excepto en la longevidad de personas adultas mayores de 100 años. Aquí parece que la fuerza de mortalidad empírica frena su crecimiento exponencial. Una teoría sobre este fenómeno invoca al factor genético, véase [19]. Lo que favorece una larga vida en un grupo reducido de adultos mayores. Otra explicación puede ser el especial cuidado de los adultos mayores en cierto sector de la población, donde involucra a su

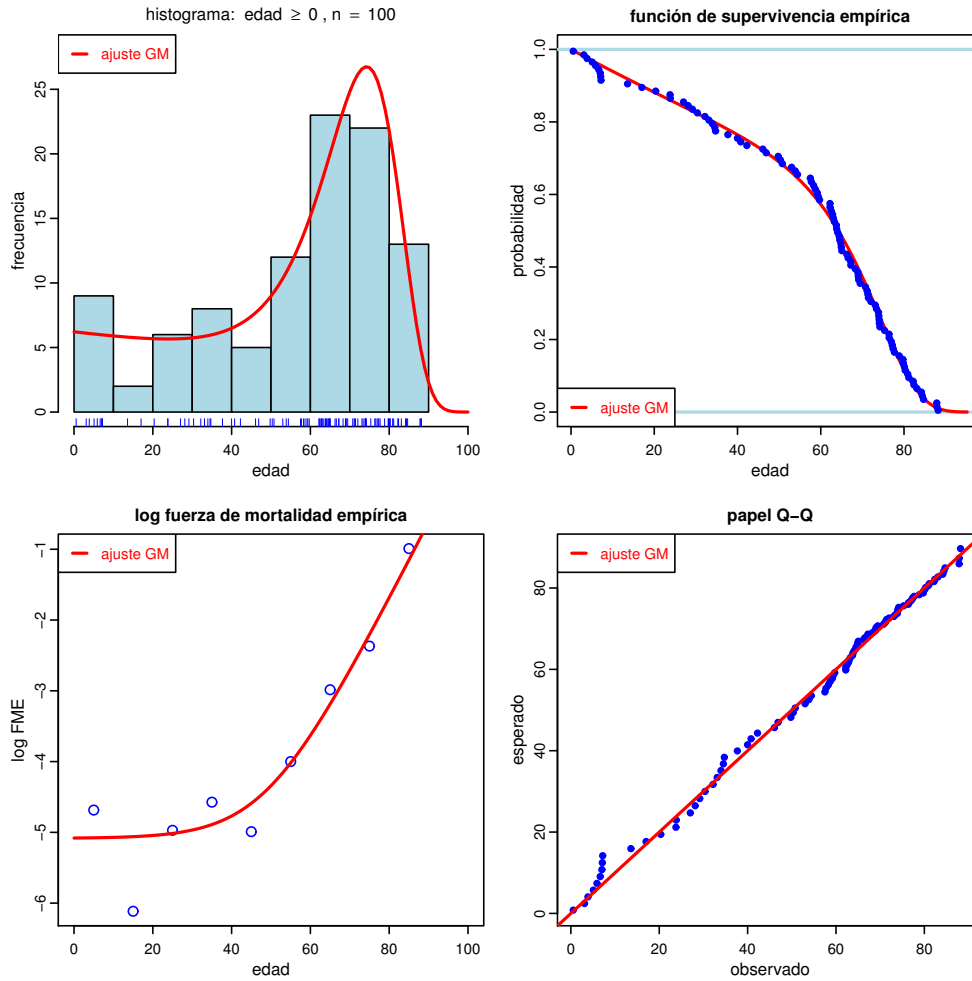


Figura 3. Gráficas: histograma, función de supervivencia empírica, log fuerza de mortalidad empírica y de cuantiles Q-Q, para una muestra aleatoria simulada de distribución Gompertz Makeham de tamaño $n = 100$. El ajuste corresponde a la estimación de los parámetros del modelo por el método de máxima verosimilitud.

familia cercana y/o personal de salud calificado. Hechos que disminuyen transitoriamente el riesgo de mortalidad. Una conclusión similar se obtiene con la gráfica de cuantiles Q-Q [abajo derecha]. En esta gráfica se tiene un patrón claro de línea recta. Una excepción se da en la cola derecha, donde los cuantiles observados son mayores que los respectivos cuantiles esperados, según el ajuste del modelo.

En resumen, en el presente trabajo se muestra una descripción detallada de los principales indicadores de riesgo que se manejan en el área de longevidad, en el contexto de la probabilidad y la estadística. Especialmente, se describe la distribución Gompertz Makeham, con sus

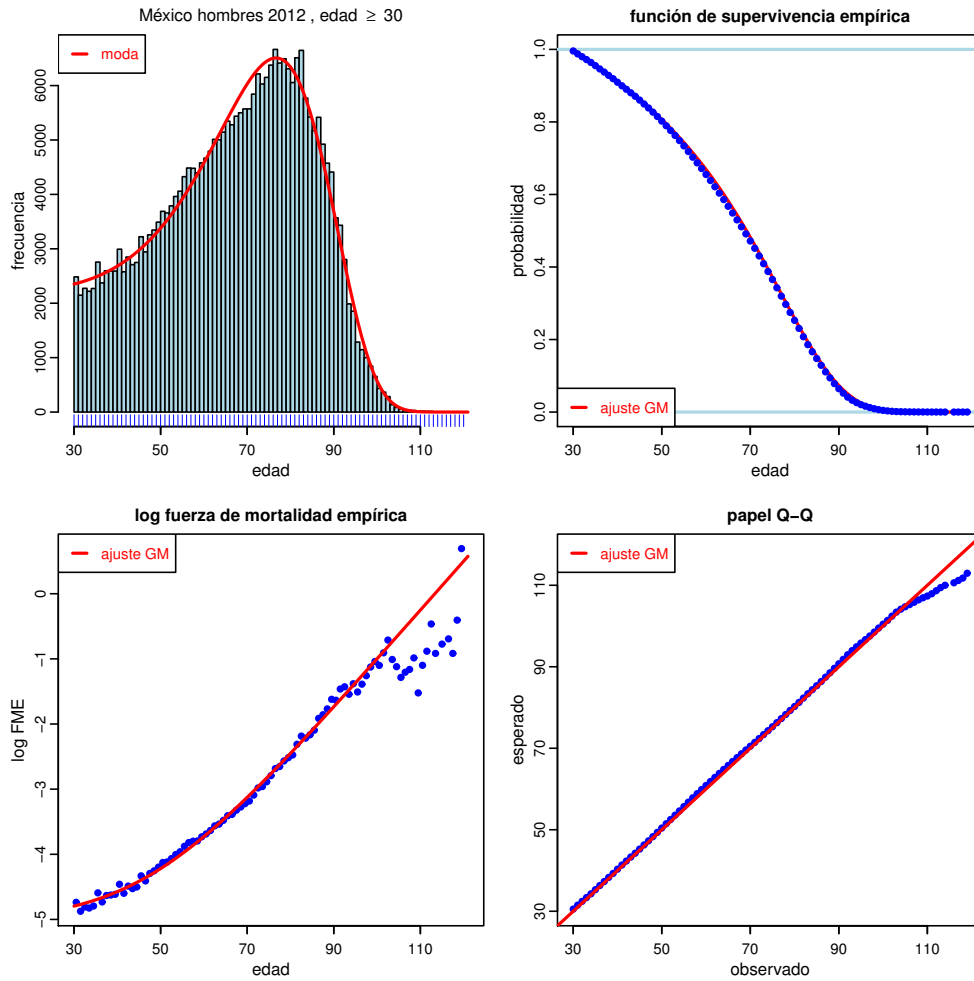


Figura 4. Gráficas: histograma, función de supervivencia empírica, log fuerza de mortalidad empírica y de cuantiles Q-Q, para la longevidad de la población masculina de México, fallecida en 2012, de edad mayor o igual a $x = 30$ año. El ajuste corresponde a la estimación de los parámetros del modelo por el método de máxima verosimilitud.

ventajas y desventajas en cuanto a la modelación de las poblaciones humanas. Así mismo, se obtiene la función generadora de momentos, la función cuantil y sus medidas de tendencia central. Si bien la distribución Gompertz Makeham no explica situaciones como el efecto bañera en la mortalidad infantil o la dinámica de la población en el tiempo, en general se considera a este el modelo base de la mortalidad de las poblaciones humanas.

Apéndice

En esta sección se muestran las propiedades básicas de la función de Lambert y de la función gamma incompleta. También se muestra la solución explícita de la ecuación cúbica incompleta.

Función de Lambert. Para $x > -1$, la función $x \rightarrow xe^x$ es creciente y convexa. Su función inversa $W(z)$, es conocida como de *Lambert*. Esta función resulta creciente y cóncava. Note que

$$W(xe^x) = x, \quad \text{para } x + 1 > 0$$

y

$$W(z)e^{W(z)} = z, \quad \text{para } z + e^{-1} > 0.$$

La función de Lambert es útil para resolver ecuaciones no lineales de la forma

$$\beta e^{\alpha x} + x = \gamma. \quad (59)$$

Su solución está dada como

$$x = \gamma - \frac{1}{\alpha} W(\alpha \beta e^{\alpha \gamma}), \quad \text{para } \alpha \beta e^{1+\alpha \gamma} + 1 > 0. \quad (60)$$

De hecho, al considerar (59), se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \beta e^{\alpha x} &= \alpha(\gamma - x), \\ \alpha \beta e^{\alpha \gamma} &= \alpha(\gamma - x) e^{\alpha(\gamma - x)}. \end{aligned}$$

Si aplica la función $W(z)$ a ambos lados, resulta

$$W(\alpha \beta e^{\alpha \gamma}) = W(\alpha(\gamma - x) e^{\alpha(\gamma - x)}) = \alpha(\gamma - x),$$

$$x = \gamma - \frac{1}{\alpha} W(\alpha \beta e^{\alpha \gamma}), \quad \text{siempre que } \alpha \beta e^{1+\alpha \gamma} + 1 > 0.$$

Para este trabajo, la solución de la ecuación (26) se representa en la función cuantil (28), véase [15]. De hecho, al comparar (26) con (59), resulta

$$\alpha = a, \quad \beta = \frac{b}{ac}, \quad \gamma = \frac{b - \log(1 - p)}{ac}.$$

Por lo que, la solución (28) se obtiene de (60):

$$\begin{aligned} x = \gamma - \frac{1}{\alpha} W(\alpha \beta e^{\alpha \gamma}) &= \frac{b - \log(1 - p)}{ac} \\ &\quad - \frac{1}{a} W\left(\frac{b}{c} \exp\left(\frac{b - \log(1 - p)}{c}\right)\right). \quad (61) \end{aligned}$$

Función Gamma incompleta. La función *gamma incompleta* se define como

$$\Gamma(\alpha; b) \doteq \int_b^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad b > 0.$$

Esta función está bien definida y satisface la fórmula recurrente

$$\Gamma(\alpha + 1; b) = \alpha\Gamma(\alpha; b) + e^{-b}b^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad b > 0. \quad (62)$$

Para mayores detalles de la función gamma incompleta, véase [9, cap. 8] y [36].

En este trabajo se utilizó la función gamma incompleta para representar la media poblacional de la distribución Gompertz Makeham (21), así como a su función generadora de momentos (22).

Ecuación cúbica incompleta. Considere la ecuación cúbica incompleta

$$u^3 + pu + q = 0, \quad u \in \mathbf{R}. \quad (63)$$

Hay tres raíces simples o una simple y una doble. Dos de las raíces simples pueden ser complejas conjugadas. Con la condición

$$p < 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \leq 0, \quad (64)$$

la fórmula explícita de Viète Descartes ofrece tres raíces reales ordenadas:

$$u_k = 2 \left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2} \left(-\frac{3}{p}\right)^{3/2} \right) - \frac{2\pi k}{3} \right), \quad k = 2, 1, 0. \quad (65)$$

Esta fórmula está bien definida siempre que

$$p < 0 \quad \text{y} \quad -1 \leq -\frac{q}{2} \left(-\frac{3}{p}\right)^{3/2} \leq 1.$$

Restricción que equivale a (64). De hecho, si $p < 0$, la última expresión equivale a

$$0 \leq \left(\frac{q}{2}\right)^2 \left(-\frac{3}{p}\right)^3 \leq 1, \\ \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq 0.$$

El caso contrario a (64) se escribe como

$$p < 0 < \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad \text{ó} \quad p \geq 0.$$

Este implica una raíz real y dos complejas conjugadas. Para mayores detalles, véase la sección 5.1.3. en [29].

En este trabajo se utilizaron las soluciones $k = 1, 0$ de (65), de la ecuación cúbica incompleta (63). Tales soluciones representan a los puntos de inflexión (32) de la función de densidad Gompertz Makeham, siempre que sean positivos.

Agradecimientos. Los autores agradecen a los organizadores del *Taller de Control Estocástico IIMAS 2016*. Agradecen también a dos

árbitros anónimos por sus valiosas observaciones y correcciones de este trabajo. Este artículo fue parcialmente apoyado por los proyectos de investigación UAA-PIM17-7N y UAA-PIM17-5. Dedicamos este trabajo a la memoria del Dr. Juan González Hernández, una encomienda de dos.

Bibliografía

- [1] P. Barrieu, H. Bensusan, N. El Karoui, C. Hillairet, S. Loisel, C. Ravanelli y Y. Salhi, «Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges», *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2012, núm. 3, 2012, 203–231.
- [2] D. Barry, J.-Y. Parlange, L. Li, H. Prommer, C. Cunningham y F. Stagnitti, «Erratum to “Analytical approximations for real values of the Lambert W-function” [Mathematics and Computers in Simulation 53 (2000) 95-103]», *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 59, 2002, 543.
- [3] D. Barry, J.-Y. Parlange, L. Li, H. Prommer, C. Cunningham y F. Stagnitti, «Analytical approximations for real values of the Lambert W-function», *Mathematics and Computers in Simulation (MATCOM)*, vol. 53, núm. 1, 2000, 95–103.
- [4] E. Biffis, «Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations», *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 37, núm. 3, 2005, 443–468.
- [5] N. L. Bowers Jr., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones y C. J. Nesbitt, *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg, Il., 1997.
- [6] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10.^a ed., John Wiley & Sons, 2012.
- [7] J. F. Carriere, «An investigation of the Gompertz law of mortality», *Actuarial Research Clearing House*, núm. 2, 1994, 161–167.
- [8] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey y D. E. Knuth, «On the Lambert W function», *Advances in Computational Mathematics*, vol. 5, núm. 1, 1996, 329–359.
- [9] «NIST Digital Library of Mathematical Functions», <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.24 of 2019-09-15, F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.
- [10] R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Chapman and Hall/CRC, N.Y., 1989.
- [11] X. Feng, G. He y Abdurishit, «Estimation of parameters of the Makeham distribution using the least squares method», *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 77, núm. 1, 2008, 34–44.
- [12] V. M. García Guerrero y M. O. Mellado, «Proyección estocástica de la mortalidad mexicana por medio del método de Lee-Carter», *Estudios demográficos y urbanos*, vol. 27, núm. 2, 2012, 409–448.
- [13] M. L. Garg, B. R. Rao y C. K. Redmond, «Maximum-likelihood estimation of the parameters of the Gompertz survival function», *J. of the Royal Statistical Society: Series C*, vol. 19, núm. 2, 1970, 152–159.
- [14] B. Gompertz, «On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies», *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 115, 1825, 513–585.
- [15] P. Jodrá, «A closed-form expression for the quantile function of the Gompertz-Makeham distribution», *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, 2009, 3069–3075.
- [16] D. Kunimura, «The Gompertz distribution estimation of parameters», *Actuarial Research Clearing House*, vol. 2, 1998, 65–76.

- [17] R. D. Lee y L. R. Carter, «Modeling and Forecasting U.S. Mortality», *J. of the American Statistical Association*, vol. 87, núm. 419, 1992, 659–671.
- [18] A. Lenart, «The moments of the Gompertz distribution and maximum likelihood estimation of its parameters», *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2014, núm. 3, 2014, 255–277.
- [19] G. Levy y B. Levin, *The Biostatistics of aging: from Gompertzian mortality to an index of aging-relatedness*, John Wiley & Sons, N.J., 2014.
- [20] W. M. Makeham, «On the law of mortality and the construction of annuity tables», *The Assurance Magazine, and J. of the Institute of Actuaries*, vol. 8, núm. 6, 1860, 301–310.
- [21] A. Marshall y I. Olkin, *Life Distributions*, Springer-Verlag, N.Y., 2007.
- [22] W. Q. Meeker y L. A. Escobar, *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons, N.Y., 1998.
- [23] T. I. Missov y A. Lenart, «Linking period and cohort life-expectancy linear increases in gompertz proportional hazards models», *Demographic Research*, vol. 24, núm. 19, 2011, 455–468.
- [24] T. Missov y A. Lenart, «Gompertz-Makeham life expectancies: expressions and applications», *Theoretical Population Biology*, vol. 90, 2013, 29–35.
- [25] F. Norstrom, «The Gompertz-Makeham distribution», tesis de maestría, Umeå University, 1997.
- [26] OECD, *Mortality Assumptions and Longevity Risk*, OECD iLibrary, 2014.
- [27] J. S. Pai, «Generating random variates with a given force of mortality and finding a suitable force of mortality by theoretical quantile-quantile plots», *Actuarial Research Clearing House*, vol. 1, 1997, 293–312.
- [28] H. S. Park, «The survival probability of mortality intensity with jump-diffusion», *J. of the Korean Statistical Society*, vol. 37, núm. 4, 2008, 355–363.
- [29] A. D. Polyanin y A. V. Manzhirov, *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Taylor & Francis, B.R., 2007.
- [30] C. E. Raphael, J. A. Finegold, A. J. Barron, Z. I. Whinnett, J. Mayet, C. Linde, J. G. F. Cleland, W. C. Levy y D. P. Francis, «The effect of duration of follow-up and presence of competing risk on lifespan-gain from implantable cardioverter defibrillator therapy: who benefits the most?», *European Heart Journal*, vol. 36, núm. 26, 2015, 1676–1688.
- [31] R. E. Ricklefs y A. Scheuerlein, «Biological Implications of the Weibull and Gompertz Models of Aging», *The Journals of Gerontology: Series A*, vol. 57, núm. 2, 2002, B69–B76.
- [32] G. M. Scarpello, D. Ritelli y D. Spelta, «Actuarial values calculated using the incomplete Gamma function», *Statistica*, vol. 66, núm. 1, 2006, 77–84.
- [33] SINAIIS, «Sistema Nacional de Información en Salud», 2012, <http://www.dgis.salud.gob.mx/>.
- [34] D. A. Sprott, *Statistical Inference in Science*, Springer Verlag, N.Y., 2000.
- [35] J.-L. Wang, H.-G. Muller y W. B. Capra, «Analysis of oldest-old mortality: lifetables revisited», *The Annals of Statistics*, vol. 26, núm. 1, 1998, 126–163.
- [36] D. Zwillinger, *CRC Standard mathematical tables*, 33.^a ed., Taylor & Francis, B.R., 2018.