Miscelanea Matemática **23** (1996), 55–76

Una breve historia de un teorema maravilloso

Carlos R. Videla
Departamento de Matemáticas,
CINVESTAV-IPN

A comienzos de 1992, el matemático inglés A. Wilkie de la Universidad de Oxford, Inglaterra, circuló un manuscrito donde demostraba que la estructura $\widetilde{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, <, e^x, 0, 1)$ es 0-minimal. Su teorema es la solución a un problema cuyos orígenes se remontan a un trabajo de A. Tarski (polaco, uno de los lógicos más distinguidos de este siglo (1901-1983)) de 1930.

El trabajo de Tarski al cual nos referimos, es su teorema de eliminación para el álgebra real (esto quedará más claro en la sección 2). En su artículo deja como problema extender su resultado de tal manera que se incluya la función exponencial, $f(x) = e^x$. Esto es lo que se conoció como el "Problema de la exponencial de Tarski".

El objetivo de esta nota es presentar la historia de este problema y dar algunas ideas de la hermosa demostración de A. Wilkie. Por este trabajo, la Asociación de Lógica Simbólica le otorgó a Wilkie el prestigioso Premio Karp.

El problema de Tarski (y su posterior reformulación en las manos de L. Van den Dries) pertenece propiamente al área de la Lógica Matemática; sin embargo, es posible formularlo de manera que no aparezcan nociones de Lógica. En este artículo trataremos de no usar mucho el formalismo lógico por razones más o menos obvias: muchas personas lo desconocen. En últimas, esto no tiene sentido y si alguien desea estudiar la demostración de Wilkie, necesariamente debe aprender las partes básicas de la teoría de modelos (por ejemplo, el capítulo 1 de [V] es suficiente).

En la primera sección, daremos las definiciones básicas necesarias para la formulación del problema de Tarski, así como su conexión con la Lógica. Básicamente, se necesita saber qué es una fórmula de primer orden y cómo se interpreta. En la segunda sección, consideramos un ejemplo importante, los conjuntos semialgebraicos de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. El importante Teorema de Eliminación de Tarski aparece aquí como un resultado básico. En la tercera sección, introducimos la noción de estructura 0-minimal y presentamos un resultado de A. Khovanski que es importante en la demostración de Wilkie.

En la cuarta sección, nos dedicamos a la exponencial y en la última parte coleccionamos algunos resultados nuevos y problemas abiertos.

1 Estructuras y lenguajes

1.1 Empezamos con algunas definiciones. Sea A un conjunto no vacío. Definimos una estructura sobre A como una sucesión $S = (S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $m \geq 0$ tenemos:

(E1) S_m es un álgebra booleana de subconjuntos de A^m. En otras palabras, S_m es una colección de subconjuntos de A^m tal que $A^m \in S_m$ y si $X, Y \in S_m$ entonces $X \cup Y \in S_m$, $X \cap Y \in S_m$ y $X^c \in S_m$.

(E2) Si $X \in S_m \Rightarrow A \times X$, $X \times A \in S_{m+1}$.

(E3) $\{(x_1, \ldots, x_m) \in A^m : x_1 = x_m\} \in S_m$.

(E4) Si $Y \in S_{m+1}$ entonces $\pi(A) \in S_m$ donde $\pi: A^{m+1} \to A^m$ es la proyección en las primeras m coordenadas.

Decimos que un cojunto $X \subset A^m$ pertenece a la estructura S (sobre A) si $X \in S_m$. Una función $f: X \to Y$ con $X \subset A^m$, $Y \subset A^n$ pertenece a S si su gráfica $G(f) \subset A^{m+n}$ pertenece a S.

Las siguientes propiedades de una estructura S sobre A son fáciles de demostrar y las dejamos a cargo del lector.

Lema 1.2 **(i)** *Si $T \in S_m$ y $W \in S_n$ entonces $T \times W \in S_{m+n}$.*

(ii) *Para $1 \leq i < j \leq m$, la diagonal*

$$D_{ij} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in A^m : x_i = x_j\} \in S_m .$$

(iii) *Sea* $B \in S_n$ *y sean* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *números en* $\{1, \ldots, m\}$ *(no necesariamente distintos). Entonces el conjunto* $R \subset A^m$ *definido por* $(x_1, \ldots, x_m) \in R$ *si y sólo si* $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in B$ *pertenece a* S_m.

Sea $T \subset A^m$ *y* $f\colon T \to A^n$ *una función en* S. *Entonces*

(iv) $T \in S_m$.

(v) *Si* $R \subset T$, $R \in S_m$ *entonces* $f(R) \in S_n$ *y* $f|_R$ *pertence a* S.

(vi) *Si* $B \in S_n$ *entonces* $f^{-1}(B) \in S_m$.

(vii) *Si* f *es uno a uno, entonces* f^{-1} *pertenece a* S.

(viii) *Si* $f(T) \subset Y \subset A^n$ *y* $g\colon Y \to A^p$ *pertenece a* S *entonces* $g \circ f\colon T \to A^p$ *pertenece a* S.

1.3 En el contexto de estructuras sobre un conjunto A, el formalismo (lógico) de *fórmulas* simplifica mucho los argumentos: la idea es que una *fórmula* es una descripción de un conjunto. Veamos esto con más detalle. Sean x, y variables que toman los valores en los conjuntos S y T. Sean $\alpha(x,y)$ y $\theta(x,y)$ condiciones sobre puntos $(x,y) \in S \times T$. Estas condiciones son lo que llamaríamos fórmulas.

Estas fórmulas definen subconjuntos de $S \times T$, a saber $\widetilde{\alpha} = \{(x,y)\colon \alpha(x,y)$ es verdadera$\}$ y $\widetilde{\theta} = \{(x,y)\colon \theta(x,y)$ es verdadera$\}$. A partir de estas fórmulas y los conjuntos que definen podemos definir nuevas fórmulas y nuevos conjuntos:

(a) $\alpha(x,y) \vee \theta(x,y)$, la disyunción de α y θ define al conjunto $\widetilde{\alpha} \cup \widetilde{\theta}$.

(b) $\alpha(x,y) \wedge \theta(x,y)$, la conjunción de α y θ define al conjunto $\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\theta}$.

(c) $\neg\, \alpha(x,y)$, la negación de α define al conjunto

$$\widetilde{\alpha}^c = \{(x,y) \in S \times T\colon (x,y) \notin \widetilde{\alpha}\}\ .$$

(d) $\exists y \alpha(x,y)$, el cuantificador existencial aplicado a α define el conjunto $\{x \in S$: existe $y \in T$ con $(x,y) \in \widetilde{\alpha}\}$ en otras palabras la proyección en la primera coordenada del conjunto $\widetilde{\alpha}$.

Lo que describimos arriba son las operaciones o conectivos lógicos básicos (llamados de primer orden). El cuantificador universal $\forall x \alpha(x,y)$ es definido como $\neg \exists x \neg\, \alpha(x,y)$. La implicación (lógica) $\alpha(x,y) \to$

$\theta(x,y)$ se define como $\neg\alpha(x,y) \vee \theta(x,y)$. La equivalencia lógica $\alpha(x,y) \leftrightarrow \theta(x,y)$ se define como $(\alpha(x,y) \rightarrow \theta(x,y)) \wedge (\theta(x,y) \rightarrow (x,y))$.

Tener en mente esta equivalencia entre fórmulas y los correspondientes conjuntos que definen es útil. Por ejemplo, para demostrar el lema (1.2) (iv) note que

$$x \in T \iff \exists y\ (x,y) \in G(f).$$

Como ejercicio interesante el lector puede demostrar lo siguiente. Sea S una estructura sobre $\mathbb{R}$ y suponga que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \in S_2$, entonces si $A \in S_m$, $\overline{A}$ la clausura topológica de A, también pertenece a S.

1.4 Sean $A \neq \emptyset$, $S = (S_m)$, $T = (T_m)$ dos estructuras sobre A. Definimos $S \subseteq T$ si $S_n \subseteq T_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto define un orden parcial en las estructuras sobre A. Dadas dos estructuras S y T sobre A, tenemos la estructura $S \cap T = (S_n \cap T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y en general si $(S_\lambda)_{\lambda\in I}$ es una familia de estructuras sobre A, existe el ínfimo de esta colección, definida como la estructura $\inf(S_\lambda) = \bigcap\limits_\lambda S_\lambda$ con $\inf(S_\lambda)_m = \bigcap\limits_\lambda (S_\lambda)_m$.

1.5 Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto. Una estructura de primer orden es un conjunto de la forma

$$\widetilde{A} = (A, (R_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J})$$

donde $(R_i)_{i\in I}$ y $(f_j)_{j\in J}$ son conjuntos de relaciones $R_i \subseteq A^{m_i}$ y funciones $f_j : A^{m_j} \rightarrow A$ respectivamente. Si $f_j : A^{m_j} \rightarrow A$ y $m_j = 0$ entonces identificamos a f_j con su único valor (recuerde que A° se define como un conjunto con un elemento) y decimos que f_j es una constante.

Por ejemplo,

$$\widetilde{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, -, 0, 1)$$

es una estructura de primer orden sobre los números reales donde $<$ es la relación de orden usual, $+$ es la suma considerada como función binaria, etc. Los números 0 y 1 son (funciones) constantes como hemos explicado en el párrafo anterior.

1.6 Sea $\widetilde{A} = (A, (S_i), (f_j))$ una estructura de primer orden. Definimos $\mathrm{Def}(\widetilde{A})$ como la menor estructura (en el sentido de (1.1)) que contiene a cada relación S_i y función f_j de $\widetilde{A}$.

Los conjuntos y funciones que pertenecen a $\mathrm{Def}(\widetilde{A})$ los llamaremos los conjuntos definibles en $\widetilde{A}$.

Dada una estructura de primer orden $\widetilde{A} = (A, (S_i)_{i\in I}, (f_i)_{j\in J})$ podemos expandirla para formar otra $\widetilde{A}_C$ de la siguiente manera: sea $C \subset A$ un subconjunto cualquiera, entonces $\widetilde{A}_C = (A, (S_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (c)_{c\in C})$. Aquí consideramos los elementos $c \in C$ como funciones de $A^\circ \to A$, es decir como constantes. A los conjuntos de $\mathrm{Def}(\widetilde{A}_c)$ los llamamos definibles en $\widetilde{A}$ usando constantes de C. Por ejemplo, en la estructura $\widetilde{\mathbb{R}}$ de (1.5) el conjunto $\{x \in \mathbb{R}: x > \sqrt{2}\} \in \mathrm{Def}(\widetilde{\mathbb{R}})$. Por otro lado $\{x \in \mathbb{R}: x > \pi\} \in \mathrm{Def}(\widetilde{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}})$. ¿Puede el lector demostrar esto?

1.7 En esta subsección, explicamos la conexión que hay entre estructuras, estructuras de primer orden y lenguajes (de primer orden). Un lenguaje L es la unión disjunta de dos conjuntos R y F donde los elementos de R son llamados símbolos de relación y los de F símbolos de función. Para cada elemento x de $L = R \cup F$ hay un número natural $n(x)$ asociado a x, que se llama la aridad del símbolo. Una L-estructura es una estructura de primer orden $\widetilde{A} = (A, (S_r)_{r\in R}, (t_f)_{f\in F})$ donde $A \neq \emptyset$ y $(S_r)_{r\in R}$ y $(t_f)_{f\in F}$ son conjuntos de relaciones y funciones de A respectivamente tal que si $r \in R$ y $m = n(r)$ entonces $S_r \subset A^m$ y si $f \in F$ con $n = n(f)$ entonces $t_f: A^n \to A$. Las relaciones S_r y las funciones t_f se llaman las interpretaciones de R y F respectivamente.

Por ejemplo sea $L = R \cup F$ donde $R = \{<\}$ con $n(<) = 2$ y $F = \{+, \cdot, -, c\}$ con $n(+) = n(\cdot) = n(-) = 2$ y $n(c) = 0$. Una L-estructura es $\widetilde{\mathbf{Z}} = (\mathbf{Z}, <, +, \cdot, -, 0)$. Todo anillo ordenado con un elemento distinguido es una L-estructura. Obviamente, no toda L-estructura será un anillo ordenado puesto que no se ha pedido ninguna propiedad adicional sobre las interpretaciones.

Este proceso se puede invertir: a cada estructura de primer orden $\widetilde{A} = (A, (R_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J})$ le corresponde un lenguaje canónico L de primer orden de tal forma que $\widetilde{A}$ es una L-estructura. Simplemente a cada $R_i \subseteq A^{n_i}$ y $f_j \subseteq A^{m_j}$ se le asocia un símbolo de relación o función con la aridad adecuada.

1.8 A cada lenguaje $L = F \cup R$ se le puede asociar un conjunto $\mathrm{Form}(L)$, cuyos elementos se llaman L-fórmulas. No daremos la definición rigurosa de esto, pues es un poco larga y aburrida (el lector puede encontrar la definición en [V], [CK] y [MM]), pero sí una idea intuitiva que será suficiente. Sea $\widehat{L} = L \cup \{\vee, \wedge, \neg, \exists, (,), \forall, =\} \cup V$

donde V es una lista infinita de variables x, y, z, u, v, etc. Por definición, $\alpha \in \text{Form}(L)$ si α es una cierta concatenación finita de elementos de $\widehat{L}$. La definición precisa es por inducción, y no la daremos.

El objetivo es formar expresiones (formales) α que simbolicen adecuadamente las expresiones matemáticas usuales construidas con los símbolos de $\widehat{L}$. Por ejemplo si $L = \{<, +, \cdot, -, c\}$ (vea 1.7) entonces las siguientes expresiones están en Form (L):

$$\forall x\ (x < x), \quad \forall x\ (x < z \wedge z = z)$$

$$\exists y\,(\forall x\ (x \cdot x = y) \wedge z = x), \quad \exists y(y \cdot y = x + c)$$

$$(\forall x\ \exists y\ (y > x) \to \neg\,(w = x)) \wedge \forall z\ (z + z = z)\,.$$

Unas expresiones que no estarían en Form (L) son

$$\to x \forall y\ (y + y = 0), \quad \forall \exists z\ (z < +)\,.$$

Intuitivamente, las fórmulas son expresiones a las cuales se les puede asignar un significado.

Dada una L-estructura $\widetilde{A}$ (para fijar ideas, el lector puede pensar en $L = \{<, +, \cdot, -, 0, 1\}$ y $\widetilde{\mathbf{Z}} = (\mathbf{Z}, <, +, \cdot, -, 0, 1)$) y una $\alpha \in \text{Form}(L)$ podemos preguntarnos si lo que dice α es verdadero o no en $\widetilde{A}$. Esto dependerá del valor que asignemos a las llamadas variables libres (es decir, las variables no cuantificadas) de α. En lugar de definir esto con precisión, ilustraremos con un ejemplo lo que queremos decir.

Sea α la fórmula $\exists y\ (x = y^2)$. La variable x es libre. La fórmula α la podemos escribir como $\alpha(x)$ para mostrar que x es libre. Preguntarse si α es verdadera o no en $\widetilde{\mathbf{Z}}$ no tiene sentido pues *hay que decir cuanto vale* x. Así pues, si $x = 1$, $\alpha(1)$ es verdadera en $\widetilde{\mathbf{Z}}$. Si $x = 2$ entonces $\alpha(2)$ es falsa en $\widetilde{\mathbf{Z}}$. El conjunto de números en $\widetilde{\mathbf{Z}}$ para los cuales $\alpha(x)$ es verdadera es $\{1, 4, 9, 25, \ldots\}$. Por el contrario, fórmulas donde no hay variables libres, (las llamamos sentencias) son verdaderas o falsas.

Por ejemplo,

$$\forall x\, \forall y\ (x + y = y + x) \quad \text{y} \quad \forall x\, \forall y\ \ ((x < y) \to \exists z\ (x + z = y))$$

son ambas verdaderas en $\widetilde{\mathbf{Z}}$ mientras que $\exists z\ \ ((0 < z) \wedge (z < 1))$ es falsa.

En general, dada una L-fórmula $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ con variables libres $x_1, \ldots, x_n$ y una L-estructura $\widetilde{A}$ podemos definir el conjunto $\widetilde{A}_\alpha \subset A^n$ donde $\widetilde{A}_\alpha = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \colon \alpha \text{ es verdadera en } (a_1, a_2, \ldots, a_n)\}$. Aquí entendemos que la variable x_i se substituye por a_i.

Por ejemplo, sea $\alpha(x,y)$ la fórmula $x^2+y^2<5$.
Entonces

$$\tilde{\mathbb{Z}}_\alpha = \{(0,0),(\pm1,0),(0,\pm1),(\pm1,\pm1),(\pm2,0),(0,\pm2)\} \subset \mathbb{Z}^2 .$$

Otro ejemplo ilustrativo es el siguiente: considerando a $\widetilde{\mathbb{R}}$ (vea (1.5)) como L-estructura, el conjunto $\widetilde{\mathbb{R}}_\alpha$ donde $\alpha(x,y)$ es $\exists\, z\ (z^2+xz+y=0)$ es

$$\left\{(x,y)\colon x^2-4y\geq 0\right\} \subset \widetilde{\mathbb{R}}^2 .$$

1.9 Como ejercicio al lector dejamos la verificación de lo siguiente. Dada una L-estructura $\tilde{A}$ podemos formar la siguiente sucesión de conjuntos $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$: un subconjunto $B\subset A^m$ pertenece a C_m si y sólo si existe una L-fórmula $\alpha(x_1,\dots,x_m)$ tal que $B=\tilde{A}_\alpha$. La colección $C=(C_m)$ se llama la clase de conjuntos L-definibles de $\tilde{A}$, y la denotamos L-def$(\tilde{A})$. Entonces L-def$(\tilde{A})$ es una estructura sobre A (en el sentido de (1.1)).

Las definiciones que hemos presentado nos dan la siguiente Proposición:

Proposición 1.10 *Sea $\tilde{A}=(A,(R_i)_{i\in I},(f_j)_{j\in J})$ una estructura de primer orden. Sea L el lenguaje de $\tilde{A}$ (como al final de (1.7)).*

Entonces $\operatorname{Def}(\tilde{A}) = L - \operatorname{def}(\tilde{A})$.

Además, si $C\subset\tilde{A}$ es un subconjunto cualquiera entonces $\operatorname{Def}(\tilde{A}_C) = L_C - \operatorname{def}(\tilde{A})$ *donde L_C es el lenguaje de la estructura $\tilde{A}_C$ (vea (1.6)).*

Esta Proposición debe ser clara y su demostración obvia. Gracias a esto podemos usar métodos de Lógica Matemática en el estudio de estructuras. Que esto tiene consecuencias importantes es lo que mostraremos en la siguiente sección.

2 El teorema de eliminación de A. Tarski y los conjuntos semialgebraicos

2.1 El Teorema de Eliminación de Tarski es el siguiente resultado: *A cada fórmula $\alpha(x_1,\dots,x_n)$ en el lenguaje $L=\{+,\cdot,-,<,0,1\}$ se le puede asociar de manera algorítmica, otra fórmula $\tilde{\alpha}(x_1,\dots,x_n)$ en el mismo lenguaje sin cuantificadores y una demostración (formal) de la* *equivalencia lógica $\alpha(x) \leftrightarrow \tilde{\alpha}(x)$ que sólo usa los axiomas de campos real cerrados* (o los axiomas del *álgebra real*).

El lector que no sepa qué es una demostración formal puede sustituir el enunciado del teorema por los siguiente: a cada L-fórmula $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ se le puede asociar algorítmicamente otra L-fórmula $\tilde{\alpha}(x_1, \ldots, x_n)$ sin cuantificadores tal que para números reales $r_1, \ldots, r_n$ dados, en la estructura $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\alpha(r_1, \ldots, r_n)$ es verdadera si y sólo si $\tilde{\alpha}(r_1, \ldots, r_n)$ es verdadera. Es decir, ambas fórmulas definen el mismo conjunto, la ventaja es que $\tilde{\alpha}$ es más simple que α puesto que no tiene cuantificadores.

Un ejemplo de este fenómeno que todos conocemos es el siguiente: sea $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ la fórmula $\exists z(x_1 z^2 + x_2 z + x_3 = 0)$. Entonces α es equivalente a la fórmula $\tilde{\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ donde $\tilde{\alpha}$ es:

$$(\neg (x_1 = 0) \wedge (x_2^2 - 4x_1x_3 \geq 0) \vee (x_1 = 0 \wedge x_2 \neq 0) \vee (x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 0)) \; .$$

No discutiré la demostración de este teorema pero, hoy en día, hay por lo menos tres: vea [S], [SH] y [L]. La demostración de Seidenberg en [S] es parecida a la de Tarski y usa el Teorema de Sturm. En particular queda claro cómo construir la fórmula $\tilde{\alpha}$ sin cuantificadores. La demostración de Shoenfield es muy corta y elegante y usa Teoría de Modelos, pero se pierde la construcción de $\tilde{\alpha}$. En [L] Łojasiewicz da una demostración totalmente distinta y da información sobre la estructura de los conjuntos semialgebraicos.

La demostración de Łojasiewicz es importante en nuestra história. Más adelante volveremos a ella. De su Teorema de Eliminación, Tarski obtuvo tres consecuencias importantes:

a) Una axiomatización recursiva para la Teoría Elemental de la Estructura $\widetilde{\mathbb{R}}$.

b) La decidibilidad de esta teoría y

c) la estructura de los conjuntos en $\mathbb{R}$ que son L-def$(\widetilde{\mathbb{R}})$.

Las partes a) y b) son interesantes pero para explicarlas necesitaríamos más nociones de la lógica. El punto c) es el siguiente:

Lema 2.2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \in L$-def$(\widetilde{\mathbb{R}})$. Entonces A tiene un número finito de componentes conexas, cada una en L-def$(\widetilde{\mathbb{R}})$.*

Demostración: Sea $\phi(x, \overrightarrow{r})$ una L-fórmula tal que $\widetilde{\mathbb{R}}_\phi = A$. Por eliminación de cuantificadores podemos reemplazar a ϕ por una fórmula del tipo $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n$ donde cada ψ_n es de la forma $\psi_n = \theta_{n,1} \wedge \cdots \wedge \theta_{n,m(n)}$ y cada θ_{ij} es de la forma $p(x) = 0$ o $q(x) > 0$. Puesto que $p(x) = 0 \wedge \vee(x) = 0$ es equivalente a $p^2 + \vee^2 = 0$, cada ψ_i tiene la forma $p(x) = 0 \wedge q_1(x) > 0 \wedge \cdots \wedge q_{i_j}(x) > 0$ donde $p, q_i \in \mathbb{R}[x]$.

El conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ que satisface el sistema de arriba es la intersección de un conjunto vacío o finito (si aparece la ecuación $p = 0$) con intervalos. En todo caso, este conjunto sólo tiene un número finito de componentes conexas y por lo tanto A también. Note que cada componente es un conjunto L-definible.

Una pregunta obvia, que Tarski no contestó y tal vez no se preguntó, fue:

¿Cómo es un subconjunto A, L-definible $\subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$?

La respuesta solamente se dió 25 anõs más tarde y se debe a H. Whitney y S. Łojasiewicz. Su trabajo se enmarca dentro del estudio de la topología de los conjuntos semialgebraicos. ∎

Definición 2.3 Los conjuntos semialgebraicos de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ son la clase más pequeña de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contiene a todos los conjuntos del tipo

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid p(\overrightarrow{x}) > 0\}$$

donde $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ y es cerrada bajo intersecciones finitas, uniones finitas y complementación.

Algunos ejemplos:

i) Toda variedad (algebraica) real es un semialgebraico.

ii) El siguiente conjunto

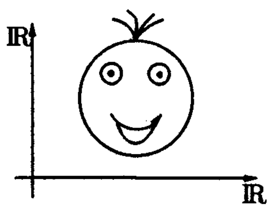

Figura 1:

iii) $\{(x, y): y = e^x\}$ no es semialgebraico.

iv) $\{(x, y): \exists n \in \mathbb{N} x = ny\}$ no es semialgebraico.

Dos teoremas importantes demostrados por H. Whitney y S. Łojasiewicz son:

Teorema 2.4 **1)** *Sea $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ semialgebraico y sea $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la proyección en las primeras n coordenadas. Entonces $\pi(s) \subset \mathbb{R}^n$ es semialgebraico.*

2) *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ semialgebraico. Entonces S tiene un número finito de componentes conexas cada una un conjunto semialgebraico.*

Observe que la parte 2 del teorema en el caso $n = 1$ da el resultado de Tarski en 2.2. También observe que la parte 1 del teorema es un caso especial del teorema de eliminación (es de hecho el caso principal): la proyección corresponde a un cuantificador existencial.

Podemos unificar el Teorema de Tarski con los subconjuntos semialgebraicos de la siguiente forma

Proposición. La clase de los subconjuntos semialgebraicos, denotémosla SA, forma una estructura en el sentido de 1.1 y de hecho

$$SA = L - \mathrm{Def}\,(\widetilde{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}})$$

2.5 En [T2] Tarski planteó el problema de extender su resultado a la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, <, e^x, 0, 1)$. Denotaremos esta estructura por $(\widetilde{\mathbb{R}}, \exp)$.

Tarski no menciona porqué se interesó en este problema. Observe que la exponencial es el único isomorfismo entre $(\mathbb{R}, +, 0)$ y $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot, 1)$. Un resultado reciente de Miller [M] hace ver, a posteriori, la preeminencia de la exponencial, veremos esto en la última sección.

Note que sería muy deseable saber si el Teorema 2.4 2) es cierto para conjuntos definibles en $(\widetilde{\mathbb{R}}, \exp)$. Esto sería cierto, por lo menos para $n = 1$ si, por ejemplo, existiese un teorema de eliminación y un resultado que diga que ecuaciones polinomiales-exponenciales en una variable sólo tienen un número finito de soluciones en $\mathbb{R}$, (tales teoremas existían, por ejemplo en el libro de Hardy [H]).

El problema de la exponencial no atrajo mucha atención durante el período de 1930-1975, sin duda alguna porque mucha gente se enfocó en la búsqueda de una axiomatización de $(\widetilde{\mathbb{R}}, \exp)$ (que hoy en día tampoco se ha encontrado) y en la decidibilidad. Un Teorema de Eliminación no existe vea [VdD1]. Fue L. Van den Dries quien claramente en [VdD2] orientó el problema hacia el estudio de los conjuntos definibles en $(\widetilde{\mathbb{R}}, \exp)$ y conjeturó que los conjuntos de esta estructura deberían satisfacer la conclusión en 2.4 2). En los años ochentas el problema de la exponencial de Tarski se convirtió en esta conjetura.

3 Estructuras 0-minimales

L. Van den Dries al estudiar la demostración de S. Lojasiewicz del Teorema 2.4 2) se dió cuenta que la estructura de los conjuntos definibles en $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$ está determinada por la estructura en dimensión uno más la propiedad de clausura bajo proyecciones.

Definición 3.1 Sea $\widetilde{A} = (A, <, \ldots)$ una estructura de primer orden tal que $(A, <)$ es un orden denso sin primer ni último elemento. La estructura $\widetilde{A}$ se llama 0-minimal (0 de orden) si cada $S \subset A$, $S \in \mathrm{Def}(\widetilde{A}_A)$ es una unión finita de puntos e intervalos (a, b), $a < b$, $a, b \in A \cup \{\pm\infty\}$.

Van Den Dries definió este concepto para $(A, <) = (\mathbb{R}, <)$ y lo llamó estructura de tipo finito. Posteriormente el concepto fue generalizado en [KPS] a ordenes densos arbitrarios y se le dió el nombre actual. El nombre de minimal es claro: conjuntos que son uniones finitas de puntos e intervalos en A son elementos en $\mathrm{Def}(\widetilde{A}_A)$. Lo que se pide es que no existan otros.

Como ejemplos de estructuras 0-minimales tenemos a $(\mathbb{R}, +, -, <, 0)$ y a $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ El interés en estas estructuras se debe a que tienen una topología muy bien comportada. La primera evidencia de esto es el Teorema de Descomposición Celular debido a L. Van den Dries. Primero definimos que es una celda.

Definición 3.2 Sea $\widetilde{A} = (\mathbb{R}, <, \ldots)$ una estructura de primer orden y sea $X \subset \mathbb{R}^n$.

a) Si $X = \{r\} \in \mathbb{R}$, X es una celda.

b) Suponga $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y que es una celda.

Definimos dos nuevas celdas en $\mathbb{R}^{n+1}$ asociadas a X.

i) Sea $f: X \to \mathbb{R}$, f continua y $f \in \mathrm{Def}(\widetilde{A})$.
Entonces $X_1 = G(f) = \{(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) : \overrightarrow{x} \in X\}$ es una celda en $\mathbb{R}^{n+1}$

ii) Sean $f_1, f_2 \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, continuas con f_1, $f_2 \in \mathrm{Def}(\tilde{A})$.

Definimos

$$X_2 = (f_1, f_2)x = \{(\vec{x}, y) \mid \vec{x} \in X, f_1(\vec{x}) < y < f_2(\vec{x})\} \ .$$

Entonces X_2 es una celda en $\mathbb{R}^{n+1}$.

c) Nada más es una celda.

En un diagrama, X_2 se ve como

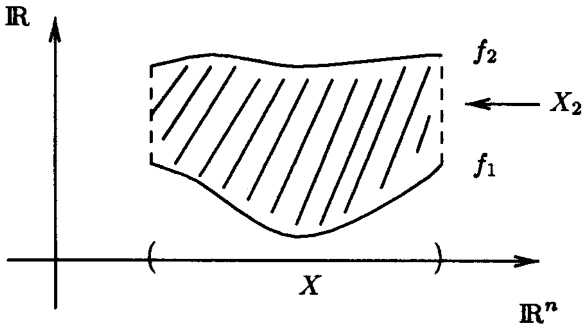

Figura 2:

Debe ser claro que cada celda es conexa y un conjunto de $\mathrm{Def}(\tilde{A}_{\mathbb{R}})$.

El Teorema de L. Van des Dries dice:

Teorema 3.3 *Sea $\tilde{A} = (\mathbb{R} <, \ldots)$ una estructura 0-minimal entonces:*

a) *Cualquier subconjunto $X \in \mathrm{Def}(\tilde{A}_A)$ es una unión disyunta finita de celdas de $\tilde{A}$.*

b) *Si $f \colon X \to \mathbb{R}$ es definible, existe una descomposición de X en celdas C_i tal que $f|_{C_i}$ es continua.*

c) *Si $\tilde{A}$ tiene a las operaciones $+$, $\cdot$ entonces de hecho a) y b) valen con funciones de clase C^n para cualquier n. Esto quiere decir que las funciones que aparecen en las definiciones de las celdas son de clase C^n y que en b) las restricciones $f|_{C_i}$ son de clase C^n.*

Este teorema de Van den Dries recupera el Teorema 2.4 de los semi-algebraicos excepto por un punto delicado: los Teoremas de Łojasiewicz y Whitney dan una descomposición en componentes conexas semialgebraicas que de hecho son (sub)variedades real analiticas de $\mathbb{R}^n$. La descomposición de clase C^n en el teorema anterior se debé a que la noción de función de clase C^n es definible por medio de una L-fórmula. Sin embargo no hay manera directa de definir por medio de una fórmula la noción de función C^∞ o C^w.

Es claro entonces que por medios puramente lógicos no se podría obtener la descomposición en celdas C^∞ o en celdas C^w mientras no se encuentre alguna forma de definir (lógicamente) estos conceptos. Un resultado reciente de Wilkie [W4] demuestra que no hay esperanzas. Sin embargo, vea la última sección donde mencionamos un teorema reciente que da descomposición C^w.

3.4 Antès de enunciar el Teorema de Khovanskii que usa Wilkie necesitamos unas definiciones .

Definición.

a) Una cadena Pfaffiana (P-cadena) en $\mathbb{R}^n$ es una sucesión $f_1, \cdots, f_k$ de funciones real analíticas definidas en $\mathbb{R}^n$ tal que existen polinomios $P_{ij}(x_1, \cdots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_i)$ sobre $\mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$ tal que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overrightarrow{x}) = P_{ij}\left(\overrightarrow{x}, f_1(\overrightarrow{x}), \ldots, f_i(\overrightarrow{x})\right)$$

b) Una función Pfaffiana es una función que pertenece a una P-cadena. El ejemplo por excelencia es la función exponencial, $y = e^x$.

Teorema 3.5 (Khovanskii [K]) a) *Sea $f_1, \ldots, f_\ell$ una P-cadena sobre $\mathbb{R}^{m+n}$. Suponga que $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{m+n}, f_1, \ldots, f_\ell]$. Entonces existe un número natural N tal que $\forall\, Q \in \mathbb{R}^n$ el conjunto*

$$\Big\{P \in \mathbb{R}^m \colon g_1(P,Q) = \cdots = g_m(P,Q) = 0 \qquad y$$
$$\det\left[\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right](P,Q) \neq 0\Big\}$$

tiene a lo sumo N elementos.

b) *Sean $f_1, \ldots, f_\ell$, y g como en la parte a). Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $Q \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $\{P \in \mathbb{R}^m \colon g(P,Q) = 0\}$ tiene a lo sumo N componentes.*

Aquí una componente C de un conjunto X, es un conjunto que es cerrado y abierto con la topología inducida de X. Estos conjuntos forman un álgebra booleana de subconjuntos de X. Si X tiene sólo finitas componentes, entonces las componentes conexas (usuales) de X son los átomos de esta álgebra booleana y por lo tanto son finitas. Los Teoremas de Khovanskii van claramente en la dirección del Teorema 3.3, puesto que dicen que ciertos conjuntos (definidos por proyecciones) tiene finitas componentes. Claro está, que están lejos de la 0-minimalidad de las estructuras que resultan al añadir las funciones de la P-cadena. Esto lo discutiremos en la siguiente sección.

4 Las estructuras $(\widetilde{\mathbb{R}}, \exp)$ y $(\widetilde{\mathbb{R}}, f_1, \ldots, f_\ell, (c)_{c\in C})$

En su importante artículo [W2] Wilkie demostró que ciertas estructuras que expanden a $\widehat{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ son modelo completas. Con la ayuda del Teorema de Khovanskii 3.5 Wilkie concluyó que estas estructuras son 0-minimales. Al hacer esto Wilkie inventó una teoría elaborada sobre anillos noetherianos de funciones definibles. Esta teoría ha permitido demostrar que otras expansiones son 0-minimales.

4.1 Modelo completitud es una propiedad de teorías y se define en términos de los modelos de la teoría. Es un teorema (de A. Robinson) que modelo completitud es equivalente a una propiedad de fórmulas. Para simplificar (puesto que no hemos definido lo que es una teoría de primer orden y otras nociones) el lector puede tomar como definición de modelo completitud (aunque estrictamente hablando es sólo una consecuencia) lo siguiente: una estructura $\widetilde{A} = (A, (S_i)_{i\in I}, (F_j)_{j\in J})$ es modelo completa si cada L-fórmula (donde L es el lenguaje de $\widetilde{A}$) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ se puede reemplazar por otra fórmula

$$\widetilde{\varphi} \equiv \exists \overrightarrow{y} \theta(x_1, \ldots, x_n, \overrightarrow{y}) \quad \text{con} \quad \theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$$

sin cuantificadores tal que $A_\varphi = A_{\widetilde{\varphi}}$, es decir φ y $\widetilde{\varphi}$ definen el mismo subconjunto de A^n.

Esta noción es realmente interesante. Recordando la traducción entre operaciones lógicas y operaciones conjuntistas en 1.3, modelo completitud de $\widetilde{A}$ quiere decir que la descripción del conjunto A_φ que puede involucrar varias proyecciones, complementaciones, uniones e intersecciones y en cualquier orden puede ser reemplazada por una descripción $\widetilde{\varphi}$ donde sólo hay proyecciones y sólo de conjuntos que son intersecciones y uniones (lo que corresponde a $\theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ que no tiene cuantificadores) de conjuntos más simples. Por ejemplo, si $\widetilde{A} = \widetilde{\mathbb{R}}$ entonces $\theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ es esencialmente un sistema de ecuaciones polinomiales puesto que las desigualdades se pueden cambiar por existenciales $(t \leq 0 \leftrightarrow \exists y(t + y^2 = 0))$. La estructura $\widetilde{\mathbb{R}}$ es de hecho modelo completa, luego todo conjunto definible de $\widetilde{\mathbb{R}}$ se puede describir como la proyección de un número finito de intersecciones y uniones de variedades algebraicas.

4.2. Pasamos a definir las estructuras que Wilkie estudió. Sea $f_1, \ldots, f_\ell$ una P-cadena de $\mathbb{R}^n$. Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto que contiene a todas las constantes de los polinomios que aparecen en la definición de la P-cadena. Defina las funciones $G_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad i = 1, \ldots, \ell$ como

$$G_i(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} f_i(\overrightarrow{x}) & \text{si } \overrightarrow{x} \in [0,1]^n \\ 0 & \text{si } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n - [0,1]^n \end{cases}$$

Uno de los resultados de Wilkie en [W2] es:

Teorema: *La estructura* $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, -, (c)_{c \in C}, G_1, \ldots, G_\ell)$ *es modelo completa.*

Es importante notar que G_i no es igual a f_i en todo $\mathbb{R}^n$; la expansión se hace añadiendo funciones Pfaffianas restringidas ($[0,1]^n$ se puede sustituir por cualquier compacto). Es un problema abierto demostrar modelo completitud al añadir las funciones f_i globales. No vamos a intentar explicar la demostración pero sí como se sigue la 0-minimalidad.

Corolario: *La estructura* $M = (\widetilde{\mathbb{R}}, (c)_{c \in C}, G_1, \ldots, G_\ell)$ *es 0-minimal.*

Demostración: Sea $\varphi(x, r_1, \ldots, r_n)$ una fórmula en el lenguaje de la estructura M con constantes $r_1, \ldots, r_n$. Tenemos que mostrar $\mathbb{R}_\varphi$ tiene un número finito de componentes conexas. Como las constantes $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ no necesariamente estan en C (vea la definición 3.1) no podemos inmediatamente usar la hipótesis de modelo de completitud.

Podemos cambiar las constantes $r_1, \ldots, r_n$ que no estén en C por variables (que por lo tanto son libres) nuevas $w_1, \ldots, w_n$, y obtener $\varphi(x, w_1, \ldots, w_n)$ con φ ahora sí una fórmula en el lenguaje de M. Por modelo de completitud podemos reemplazar φ por una fórmula

$$\tilde{\varphi} \equiv \exists\, y_1, \ldots, y_m\ \theta(x, w_1, \ldots, w_n, y_1, \ldots, y_m)\,.$$

El conjunto definido por $\varphi(x, \overrightarrow{r})$ es el mismo que define $\exists \overrightarrow{y} \theta(x, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{y})$.

Como $\theta(x, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{y})$ no tiene cuantificadores entonces es necesariamente un sistema de ecuaciones como en 3.5 b). Por este resultado el conjunto de $(x, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $\theta(x, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{y})$ tiene finitas componentes conexas; por lo tanto $\{x \in \mathbb{R} \colon \exists \overrightarrow{y} \theta(x, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{y})\}$ también tiene un número finito de componentes puesto que es una proyección. ■

4.3. En [W3] Wilkie demuestra que, en el caso especial de la función Pfaffiana $y = e^x$ la estructura $(\widetilde{\mathbb{R}}, e^x)$ es modelo completa. Aquí es crucial la propiedad $e^{x+y} = e^x e^y$. No daremos ninguna idea de como es la demostración excepto que Wilkie usa una teoría de anillos noetherianos de funciones definibles C^∞ que formuló en [W2] y la comparación de dos tipos de dimensión: una de naturaleza lógica y otra algebraica.

5 Algunos resultados recientes y problemas

En esta última sección juntamos algunos resultados que se mencionaron anteriormente.

La función exponencial tiene un papel bastante peculiar en todo este asunto.

Esto es el contenido del siguiente Teorema de C. Miller.

Decimos que una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es polinomialmente acotada si $|f(x)| \leq x^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ y $x \to \infty$.

Teorema 5.1 **([M])** *Sea $\widetilde{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, <, (R_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J})$ una estructura de primer orden. Suponga que $\widetilde{M}$ es 0-minimal y que existe una función definible en M que no es polinomialmente acotada. Entonces la función exponencial es definible.*

La demostración de este teorema es completamente elemental y usa algunos resultados generales sobre campos de Hardy. Obviamente si todas las funciones definibles en una estructura que expande a $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, <)$ son polinomialmente acotadas entonces la función exponencial no es definible. Así, el Teorema de Miller nos dice que la estructura $(\widetilde{\mathbb{R}}, \exp)$

es mínima con respecto a tener funciones con crecimiento más que polinomial.

Otro cabo que dejamos suelto fue la descomposición en celdas analíticas (vea 3.3 y la discusión que sigue).

Sea $\widetilde{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, <, 0, 1)$ y $L = \{+, \cdot, -, <, \tilde{f}, 0, 1\}$ donde $\tilde{f}$ es un símbolo de función de una variable. Es claro que en el lenguaje L existe una proposición φ_n tal que, para cualquier función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenemos que en la estructura $(\widetilde{\mathbb{R}}, f)$, φ_n es verdadera si y sólo si f es de clase C^n. ¿Existirá alguna proposición φ_∞ tal que φ_∞ defina la clase de las funciones C^∞ como φ_n define a las de clase C^n?

Teorema 5.2 ([W4]) *La proposición φ_∞ no existe.*

Demostración: Suponga que sí, y considere las funciones $f_r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para $r \in \mathbb{R}$ donde

$$f_r(x) = \begin{cases} |x|^{2r} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Evidentemente, en $(\widetilde{\mathbb{R}}, f_r)$ vale φ_∞ si y sólo si $r \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Puesto que $f_r(x) = |x|^{2r} = e^{2r \log x}$ (si $x \neq 0$) es posible construir una fórmula $\theta(x)$ en L de tal forma que en $(\widetilde{\mathbb{R}}, e^x)$ vale $\theta(r)$ si y sólo si en $(\widetilde{\mathbb{R}}, f_r)$ vale φ_∞. Invitamos a los lectores a pensar un minuto sobre esto. Luego, por lo anterior el conjunto definido por $\theta(x)$ en $(\widetilde{\mathbb{R}}, e^x)$ es $\mathbb{N} - \{0\}$; esto es imposible pues $(\widetilde{\mathbb{R}}, e^x)$ es 0-minimal. ■

5.3 Recientemente L. Van den Dries y su alumno C. Miller (vea [VdD3],[MVdD]) extendieron los resultados de Wilkie de una manera clara y eficiente que permite obtener en algunas situaciones descomposición en celdas analíticas.

Antes de enunciar el teorema de ellos necesitamos unas definiciones.

Definición:

1. Un sistema de anillos C^∞ es una sucesión $A = (A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $m \geq 0$;

   a) A_m es un anillo de funciones C^∞, $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ donde la suma y multiplicación de funciones es puntual.

      Aquí, en el caso $m = 0$ simplemente A_0 es un subanillo de $\mathbb{R}$.

b) las funciones de coordenadas $x_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pertenecen a A_m.

c) para $f \in A_m$, la función que envía

$$(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) \mapsto f(x_1, \ldots, x_m)$$

de $\mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ pertenece a A_{m+1}. Si p es una permutación de $\{1, \ldots, m\}$ entonces la función que envía

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto f(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \ldots, x_{p(m)}) \in A_m .$$

d) si $f \in A_m$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in A_m \quad \forall i = 1, \ldots, m$
El ejemplo más pequeño es el sistema $(\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_m])_{m \in \mathbb{N}}$.
Otro sistema es

$$(\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m, e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_m}])_{m \in \mathbb{N}}$$

2. Sea A un sistema de anillos C^∞, y $f_1, \ldots, f_\ell: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^∞.

Decimos que las f_i forman una cadena Pfaffiana en $\mathbb{R}^n$ sobre A (o (P, A)-cadena) si para cada $j = 1, \ldots, \ell$ existen funciones $p_{ij} \in A_{m+j}$ para $i = 1, \ldots, n$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = p_{ij}(\vec{x}, f(\vec{x}), \ldots, f_{jk}(\vec{x})) \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Una P-cadena como en la sección 3 es una $(P, (\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_m]_{m \in \mathbf{Z}}))$-cadena. La idea de considerar sucesiones de anillos C^∞ y P-cadenas generalizadas como arriba está implicito en [W2]. Dada una (P, A) cadena podemos formar la estructura de primer orden

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, <, -, 0, 1, (f_{A_m})_{m \in \mathbb{N}})$$

donde $(f_{A_m})_{m \in \mathbb{N}}$ son las funciones en A_m para $m \in \mathbb{N}$.

Un sistema de anillos $C^\infty S = (S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ se llama noetheriano si cada anillo S_m es noetheriano.

Si los anillos S_m son de funciones analíticas entonces el sistema S se llama analítico.

La teoría que inició Wilkie sobre anillos noetherianos de funciones definibles la replican Van den Dries y Miller en los sistemas noetherianos de anillos C^∞.

El uso que da Wilkie del teorema de Khovanskii 3.3 lo incorporan de la siguiente forma: un sistema de anillos C^∞, $A = (A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es de Khovanskii si $\forall m \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_m \in A_m$ existe una cota $H = H(f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ se tiene

$$|\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^m \colon f_1(\overrightarrow{x}) = a_1, \ldots, f_m(\overrightarrow{x}) = a_m\,,\ \mathrm{Jac}\,(f_1, \ldots, f_m)(\overrightarrow{x}) \neq 0\}| \leq H$$

El sistema $(\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_m])_{m \in \mathbb{N}}$ es de Khovanskii por el Teorema de Bezout, y el sistema $(\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m, e^{x_1}, \ldots, e^{e_x}])_{m \in \mathbb{N}}$ es de Khovanskii por el Teorema de Khovanskii 3.5.

Finalmente estamos listo para el

5.4 Teorema de Descomposición en celdas analíticas [VdD3, MVdD].

Suponga que el sistema S es noetheriano, de Khovanskii y analítico. Sea $f_1, \ldots, f_\ell$ una (P, S) cadena y suponga que la estructura

$$M = (\widetilde{\mathbb{R}}, (F_{S_m})_{m \in \mathbb{N}}, f_1, \ldots, f_\ell)$$

es modelo completa. Entonces vale el Teorema de Descomposición (3.3) con celdas analíticas.

Nota: **i)** Cada celda analítica es una subvariedad real analítica de $\mathbb{R}^n$, para algún n.

ii) Para obtener el caso de los conjuntos semialgebraicos, tomamos $S = (\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m])_{m \in \mathbb{N}}$ y ninguna cadena. Las hipótesis del teorema valen por el Teorema de Bezout y por el Teorema de Tarski 2.1 (que da el modelo de completitud).

5.5 Problemas abiertos. Reunimos en esta última subsección algunos problemas abiertos.

1. En [MVdD], los autores muestran que la estructura $(\widetilde{\mathbb{R}}_{an}, e^x)$ es 0-minimal (y modelo completa).

Aquí $\widetilde{\mathbb{R}}_{an} = (\widetilde{\mathbb{R}}, (\tilde{f})_{f \in \mathbb{R}\{X,m\}_m \in \mathbb{N}})$ donde

$$\mathbb{R}\{X, m\} := \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_m\}$$

es el anillo de las series de potencias en $x_1, \ldots, x_m$ sobre $\mathbb{R}$ que convergen en una vecindad de $[-1, 1]^m$ y donde para $f \in \mathbb{R}\{X, m\}$ definimos $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-1, 1]^m \\ 0\ . & \text{si } x \in \mathbb{R}^m - [-1, 1]^m \end{cases}$$

Esta estructura es la estructura 0-minimal más grande hasta la fecha. El problema consiste en encontrar estructuras 0-minimales más grandes todavía.

2. En todas las estructuras 0-minimales que se conocen hasta hoy, las funciones definibles tiene crecimiento a lo sumo exponencial: si g es definible $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tal que $|g(x)| < C\exp_n(x^m)$ donde $\exp_n(x) = \exp(\exp_{n-1}(x))$ y $\exp_0(x) = x$.

¿Existen expansiones 0-minimales de $\widetilde{\mathbb{R}}$ con funciones de crecimiento "transexponencial"?

3. ¿Es la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, <, 0, 1, \widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_\ell)$ donde las F_i son una P-cadena en $\mathbb{R}^n$, $\widetilde{F}_i = F_i$ en todo $\mathbb{R}^n$ 0-minimal? Recuerde que Wilkie sólo demostró 0-minimalidad si $\widetilde{F}_i$ coincide con F_i en un compacto y es cero fuera del compacto.

4. ¿Es la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, -, 0, 1, Z(x))$ donde $z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ $(x > 1)$ 0-minimal?

Referencias

[CK] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam 1990.

[H] G. H. Hardy, *Orders of infinity*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics 12, C. U. P., Cambridge 1924.

[K] A. G. Khovanskii, *Polinomials*, Translations of Math. Monographs, 88, Amer. Math. Soc. 1991.

[KPS] J. F. Knight, A. Pillay, C. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures II*, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (2), (1986), 593–605.

[L] S. Łojasiewicz, *Ensembles semianalytiques*, 1. H. E. S., 1965.

[M] C. Miller, *Exponentiation is hard to avoid*, P.A.M.S., por aparecer.

[MM] M. Manzano, *Teoría de Modelos*, Alianza Univ. Textos 126, Alianza Universidad, Madrid (1989).

[MVdD] C. Miller, L. Van den Dries, *On the real exponential field with restricted analytic functions*, Israel Journal of Math. 85 (1) (1994).

[S] A. Seindenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Annals of Mathematics, 60 (2), (1954), 365–374.

[SH] J. Shoenfield, *Quantifier elimination in fields, in Non- classical Logics*, Model Theory and Computability, Proceedings of the Third Latin-American Symposium on Mathematical Logic, Campinas 1976, North Holland, Amsterdam 1977.

[T1] A. Tarski, *Liber definierbare Mengen reellerzahlen*, Annales de la Societó Polonaise de Mathematique, vol. 9 (1930).

[T2] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry* (notas preparadas por J. C. C. Mckinsey) Univ. California Press, Berkeley, 1951.

[V] C. R. Videla, *Un curso de Lógica Matemática*, Serie Textos. Sociedad Matemática Mexicana 1994.

[VdD1] L.Van den Dries, *Remarks on Tarski's problem concerning* (Fk-exp), Logic Colloquium 1982, North-Holland, Amsterdam 1984.

[VdD2] L. Van den Dries, *Tarski's problem and pfafflan functions*, Logic Colloquium 1984, North-Holland, Amsterdam 1986.

[VdD3] L. Van den Dries, *Estructuras* 0*-minimales y topología mansa*, Ttes conferencias en el XXVI Congreso de la SMM, Morelia 1993.

[W1] A. Wilkie, *On the theory of the real exponential field*, Illinois Journal of Math. vol 33 (3), (1989), 384–408.

[W2] A. Wilkie, *Some model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by Pfafflan functions*, Oxford 1991, por aparecer.

[W3] A. Wilkie, *Smooth 0-minimal theories and the model completeness of the real exponential field*, Oxford 1992, por aparecer.

[W4] A. Wilkie, *On defining* C^∞, Journal of Symbolic Logic 59 (1), (1994).

[WH] H. Whitney, *Elementary structure of real algebraic varieties*, Annals of Mathematics 66 (3), (1957), 545–556.