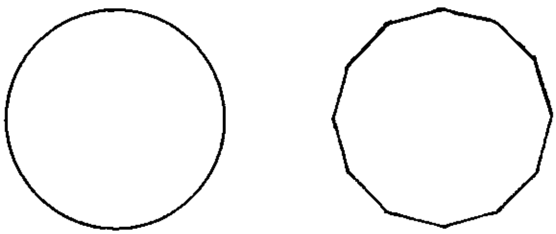
Miscelánea Matemática **22**, *3–21 (1995)*

Simetrías y coloraciones

Ricardo Berlanga Z.
Instituto Tecnológico Autónomo de México
México, D.F.

Cualquier cosa que la palabra **Simetría** quiera decir, la noción está encapsulada en el concepto algebraico de *grupo*.

Por ejemplo, creo que todos estamos de acuerdo al afirmar que un círculo y un polígono regular tienen gran *simetría*, pero que el círculo siempre tendrá más; no importa cuántos lados tenga el polígono. La mejor manera de precisar esto es diciendo que el conjunto (grupo) de rotaciones del círculo tiene un número infinito de elementos, pero el grupo de rotaciones del polígono sólo tiene tantos elementos como lados tenga el polígono. Y por lo tanto, solamente un número finito de *simetrías*.



El próposito del artículo tiene tres aspectos:

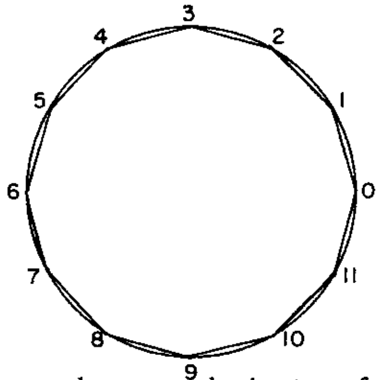
a) Dar instrucciones y coordenadas explícitas para manipular a los sólidos regulares, digamos en una computadora.

b) Resolver un problema de conteo lleno de simetría.

c) Motivar con esto, a pensar que **simetría** es una idea que invade todas las matemáticas.

Advertencia: El prerrequisito fundamental para entender lo que sigue es tener alguna familiaridad con los conceptos de función y composición de funciones.

Para comenzar quiero introducir las ideas de **grupo** y **permutación** a través de un ejemplo: *Sea $\mathcal{D}$ el dodecágono regular que se muestra abajo en la figura y observe que hemos etiquetado sus vértices con los números del cero al once.*



No es difícil convencerse de que cualquier transformación rígida de $\mathcal{D}$ en si mismo necesariamente debe ser una rotación o una reflexión (A lo largo de la discusión demostraré pocas cosas. El lector seguramente podrá llenar los detalles).

El hecho de que la composición de transformaciones rígidas es rígida y de que la inversa de una transformación rígida también lo es, lo resumiré diciendo que las *simetrías* (transformaciones rígidas) de un objeto constituyen un *grupo.* También las rotaciones de $\mathcal{D}$ forman un grupo, pero las reflexiones no. Es decir, las rotaciones son un *subgrupo* del grupo de isometrías de $\mathcal{D}$, pero las reflexiones son sólo un subconjunto.

Sea g una isometría de $\mathcal{D}$. Debido a la rigidez de la transformación, es claro que la *acción* de g en $\mathcal{D}$ queda totalmente determinada por su *acción* en los vértices. De esta manera, si g es por ejemplo la rotación a 90 grados, entonces la correspondencia.

$$\begin{array}{llll} 0 \mapsto 3; & 3 \mapsto 6; & 6 \mapsto 9; & 9 \mapsto 0; \\ 1 \mapsto 4; & 4 \mapsto 7; & 7 \mapsto 10; & 10 \mapsto 1; \\ 2 \mapsto 5; & 5 \mapsto 8; & 8 \mapsto 11; & 11 \mapsto 2; \end{array}$$

que denotaremos más compactamente por

$$(0\ 3\ 6\ 9)(1\ 4\ 7\ 10)(2\ 5\ 8\ 11)$$

determina completamente a g.

Los elementos del grupo se pueden entonces enlistar así:

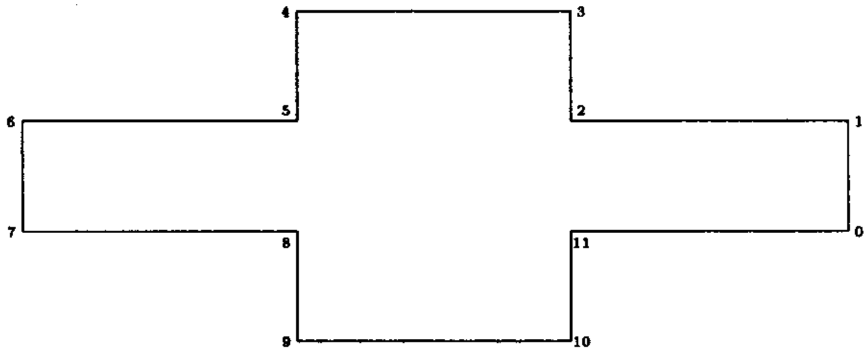
1)	identidad	13)	(0)(1 11)(2 10)(3 9)(4 8)(5 7)(6)
2)	(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11)	14)	(0 11)(1 10)(2 9)(3 8)(4 7)(5 6)
3)	(0 2 4 6 8 10) (1 3 5 7 9 11)	15)	(0 10)(1 9)(2 8)(3 7)(4 6)(5)(11)
4)	(0 3 6 9) (1 4 7 10) (2 5 8 11)	16)	(0 9)(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)(10 11)
5)	(0 4 8) (1 5 9) (2 6 10) (3 7 11)	17)	(0 8)(1 7)(2 6)(3 5)(4)(9 11)(10)
6)	(0 5 10 3 8 1 6 11 4 9 2 7)	18)	(0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 11)(9 10)
7)	(0 6)(1 7)(2 8)(3 9)(4 10)(5 11)	19)	(0 6)(1 5)(2 4)(3)(7 11)(8 10)(9)
8)	(0 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5)	20)	(0 5)(1 4)(2 3)(6 11)(7 10)(8 9)
9)	(0 8 4)(1 9 5)(2 10 6)(3 11 7)	21)	(0 4)(1 3)(2)(5 11)(6 10)(7 9)(8)
10)	(0 9 6 3)(1 10 7 4)(2 11 8 5)	22)	(0 3)(1 2)(4 11)(5 10)(6 9)(7 8)
11)	(0 10 8 6 4 2)(1 11 9 7 5 3)	23)	(0 2)(1)(3 11)(4 10)(5 9)(6 8)(7)
12)	(0 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1)	24)	(0 1)(2 11)(3 10)(4 9)(5 8)(6 7)

Notemos que las primeras doce son rotaciones y las siguientes son estas rotaciones seguidas de la reflexión en (13), dando alternativamente reflexiones a lo largo de una línea que une dos vértices antipodales y reflexiones a los largo de una línea que une los puntos medios de lados opuestos. Sería bueno repetir el ejercicio para el polígono de 13 lados, recapacitar sobre las diferencias y determinar todos los subgrupos posibles.

Es interesante ver como hemos representado fielmente al concepto *continuo y geométrico* de isometría a través de la idea *finita y combinatoria* de permutación de vértices.

Cada permutación separa a los vértices en conjuntos ajenos de **ciclos**, de modo que cada ciclo de vértices queda encerrado entre paréntesis. Al iterar la permutación cada vértice va recorriendo a los otros en su ciclo, y sólo a los de su ciclo.

Por otro lado, dados dos vértices en el dodecágono siempre existe una isometría que manda uno en el otro. Esto obviamente se debe a la regularidad del polígono. Para ver que este no siempre es el caso consideremos el siguiente ejemplo: Sea C el polígono mostrado en la figura.



El grupo de isometrías está dado por:

1) Identidad
2) (0 6)(1 7)(2 8)(3 9)(4 10)(5 11)
3) (0 1)(2 11)(3 10)(4 9)(5 8)(6 7)
4) (0 7)(1 6)(2 5)(3 4)(8 11)(9 10)

Ahora ya no es cierto que dados dos vértices cualesquiera podremos mandar uno en el otro bajo una isometría. Es decir, los vértices de C quedaron divididos en las **ORBITAS**

$$\{0,1,6,7\}, \quad \{2,5,8,11\} \quad \text{y} \quad \{3,4,9,10\}.$$

Observadores colocados en puntos de la misma órbita verán a C exactamente del mismo modo. En cambio observadores situados en puntos de distintas órbitas apreciarán a C de manera diferente.

Algo de formalismo: Recomiendo *echarle solamente una ojeada* a los siguientes párrafos y retomar la *lectura* después de la próxima línea ═══════. Una inspección más detenida de esto al finalizar toda la discusión confío en que hará de las abstracciones aquí planteadas conceptos significativos que arrojen nueva luz a las simetrías de los sólidos regulares.

Por **GRUPO** entenderemos un conjunto G sujeto a una operación binaria asociativa $*$ con un elemento idéntico (i.e. un $e \in G$ tal que $g*e = e*g = g \quad \forall g \in G$) y donde todo elemento es invertible (i.e. $\forall g \in G \; \exists h \in G$ con $g*h = h*g = e$. El elemento h es único y se le denota por g^{-1}). En general se omite la $*$ y se escribe gh en lugar de $g*h$.

Si $\emptyset \neq H \subseteq G$ y H es cerrado bajo la operación $*$ y bajo la inversión de elementos (i.e. $\forall g, h \in H$, $gh^{-1} \in H$) entonces H se llama un **SUBGRUPO** de G. Si G es finito, la cerradura bajo la inversión es consecuencia de la cerradura bajo la operación del grupo.

Sea X un conjunto. El conjunto de biyecciones de X en X es un grupo teniendo a la composición de funciones como operación. Este es el **GRUPO DE PERMUTACIONES** de X y se denota por $\mathbf{S}(X)$.

A una función $\varphi: G \to S$ entre grupos se les llama **HOMOMORFISMO** si $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) \quad \forall g, h \in G$. El **NUCLEO o KERNEL DE** φ denotado por $\operatorname{Ker}\varphi$ es el conjunto $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = \text{idéntico de } S\}$ y es claramente un subgrupo de G. Si $S = \mathbf{S}(X)$ entonces hablamos de una **ACCION** de G en X. Si φ es inyectiva (i.e. $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{\text{idéntico de } G\}$), entonces φ **REPRESENTA FIELMENTE** al grupo *abstracto* G como un subgrupo *concreto* de permutaciones. Dado un grupo G en general es posible *encajarlo* de muchos modos como un subgrupo de permutaciones (Cayley).

> **Algo de Metafísica:** En términos de una acción particular de un grupo G sobre un escenario X se manifestarán, idiosincrática y armónicamente, la arquitectura de G y la simetría de X. En los casos interesantes X no es un costal amorfo de puntos sino un objeto complejo equipado con todo un bagaje estructural, tanto primario como secundario, que mucho más que enriquecer a X, en última instancia, le da su significado. Más aún, X y/o G pueden ser simplemente instrumentales de una jerarquía superior.

Sea $G \subseteq \mathbf{S}(X)$ un grupo, y sea $x \in X$, entonces $\mathcal{O}(x) = \{g(x) \in X \mid g \in G\}$ es la **ORBITA** de x bajo la acción de G. No es difícil ver que cualesquiera dos órbitas o bien son ajenas, o son iguales (i.e. particionan a X).

Al grupo $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ se le llama el grupo **ESTABILIZADOR** de $x \in X$ bajo la acción de G.

Dado $g \in G$ entonces el conjunto de **PUNTOS FIJOS** de g está dado por $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g(x) = x\}$.

Sea H un subgrupo de G. La **CLASE LATERAL** de $g \in G$ bajo H es el conjunto $gH = \{gh \mid h \in H\}$. Todas estas clases laterales forman un partición de G que denotaremos por G/H. Ejemplo: El grupo de rotaciones y el conjunto de reflexiones son las clases laterales de isometrías del dodecágono bajo el subgrupo de rotaciones.

Si K es un conjunto finito entonces $|K|$ denota el número de elementos u **ORDEN** del conjunto. Los siguientes son resultados de *conteo y simetría.*

Teorema de Lagrange: *Sea G un grupo finito y sea H un subgrupo. Entonces $|G|/|H| = |G/H|$.*

Demostración: Para cualquier $g \in G$, la correspondencia $\vartheta \colon H \to gH$ dada por $\vartheta(h) = gh$ es una biyección. Por lo tanto todas las clases laterales tienen la misma cardinalidad $|H|$. Y de aquí el resultado. ∎

Corolario: $|G| = |\mathcal{O}(x)|\ |\mathrm{Stab}(x)|$.

Demostración: La correspondencia $\varphi \colon G/\mathrm{Stab}(x) \to \mathcal{O}(x)$ dada por $g\,\mathrm{Stab}(x) \mapsto g(x)$ está bien definida y es biyectiva. ∎

Afirmación: Sean x, y en la misma órbita, entonces $|\mathrm{Stab}(x)| = |\mathrm{Stab}(y)|$.

Demostración: Sea $g \in G$ con $g(x) = y$, entonces la correspondencia $\alpha \colon \mathrm{Stab}(x) \to \mathrm{Stab}(y)$ dada por $\alpha(f) = gfg^{-1}$ es biyectiva. Es decir, $\mathrm{Stab}(g(x)) = g\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$. ∎

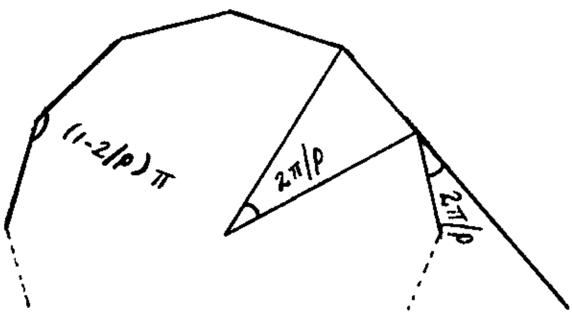
Si H y K son subgrupos de G para los cuales existe una $g \in G$ tal que $K = gHg^{-1}$ entonces decimos que son conjugados.

Pasemos ahora a el caso más interesante de las simetrías tridimensionales de los sólidos regulares. Omitiremos la idea de reflexión pues por un lado no hay manera de reflejar un sólido en el espacio mediante un movimiento material del objeto y por el otro, nuestra teoría se simplifica un poco.

Primero demostraremos que solamente existen cinco sólidos regulares.

Definición: Entenderemos por un **SOLIDO** o **POLIEDRO REGULAR** a un convexo (una canica es convexa pero una tuerca no) limitado por caras planas, regulares e iguales y tal que alrededor de cada vértice inciden el mismo número de caras (i.e. todos los vértices están igualmente rodeados).

Lema: *Sea P un polígono regular de p lados. Entonces cualquiera de sus ángulos exteriores es de $2\pi/p$ radianes (i.e. $360/p$ grados).*



■

Sea $\mathcal{P}$ un poliedro regular limitado por polígonos regulares de p lados y tal que cada vértice está rodeado por q polígonos. Entonces el ángulo sólido alrededor de un vértice tiene q ángulos *faciales*, cada uno de $(1 - 2/p)\pi$ radianes (por el lema anterior).

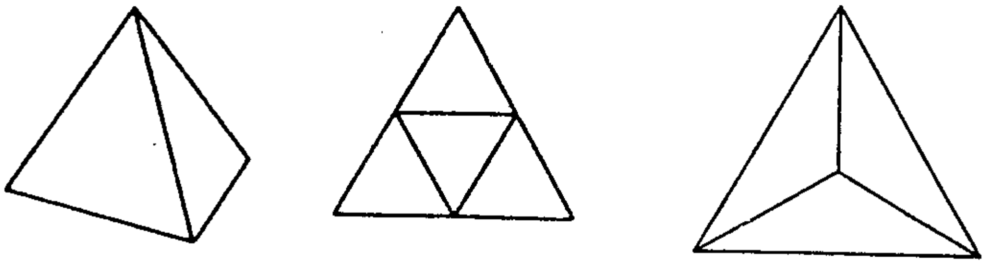
Ahora, es obvio por la convexidad de $\mathcal{P}$, que la suma de todos ellos, es decir, $(1 - 2/p)\pi \times q$ debe ser menor a 2π. Entonces, $1 - 2/p < 2/q$. O bien, $(p - 2)(q - 2) < 4$.

Por lo tanto $[p, q]$ no puede tener otros valores excepto

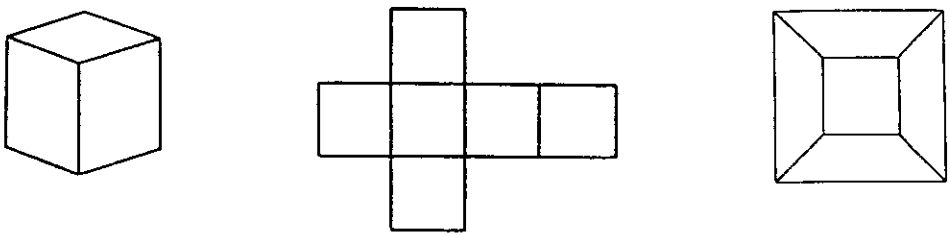
$$[3,3], [3,4], [4,3], [3,5], [5,3] .$$

Es sorprendente que sí haya sólidos regulares para estas posibilidades. Demostraremos que existen exhibiendo coordenadas cartesianas explícitas para cada uno. Veamos:

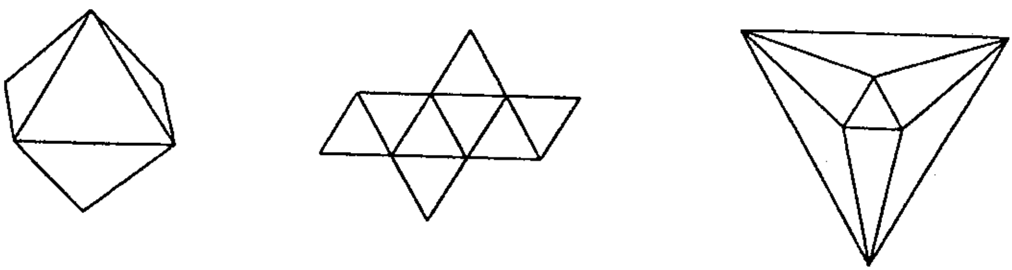
Tetraedro (de lado $2\sqrt{2}$). $(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$.



Cubo o Exaedro (de lado 2). $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

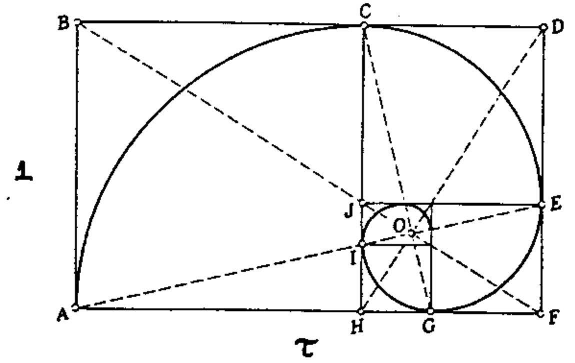


Octaedro (de lado $\sqrt{2}$). $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.



Icosaedro (de lado 2). Para construir este, necesitamos el concepto de **RAZON DORADA**.

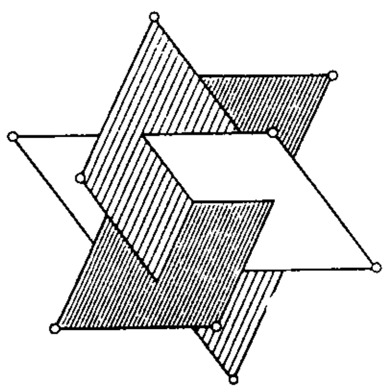
Sea $\mathcal{F}$ un rectángulo de lados 1 y τ con la propiedad de que si le recortamos un cuadrado de lado 1, entonces el rectángulo menor sobrante es semejante al original.

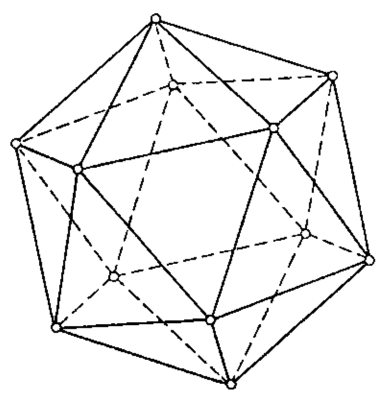


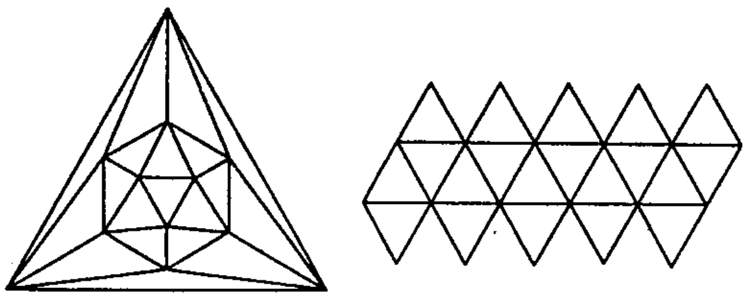
Es decir, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \tau/1 &= 1/(\tau-1)\,. \quad \text{O bien,} \\ \tau^2-\tau-1 &= 0\,. \quad \text{Por lo tanto} \\ \tau &= (1+\sqrt{5})/2 = 2\times\cos\pi/5 \approx 1.6180339887... \end{aligned}$$

Ahora pongamos tres tarjetas con estas proporciones como lo indica la figura:





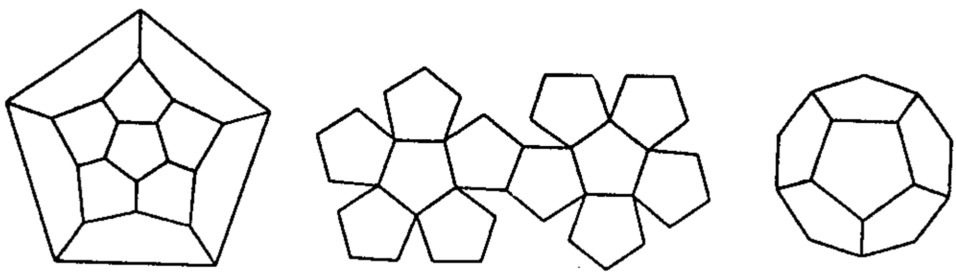


Los doce vértices son los vértices de un icosaedro. De aquí que los puntos de coordenadas

$$(0, \pm\tau, \pm 1), \quad (\pm 1, 0, \pm\tau), \quad (\pm\tau, \pm 1, 0)$$

sean los vértices de un icosaedro de arista 2.

Dodecaedro (de lado $2 \times \tau^{-1} = 2 \times (\tau - 1)$).



Teorema: *Sea $\mathcal{P}$ un poliedro regular. Entonces los puntos medios de las caras son los vértices de otro poliedro regular. A este poliedro se le llama el* **DUAL** *de $\mathcal{P}$.*

El dual de un tetraedro es un tetraedro.

El cubo y el octaedro son duales uno del otro.

El dual de un icosaedro es un dodecaedro. Y conversamente ■

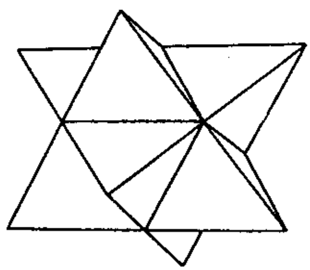
Teorema: *Sea $\mathcal{P}$ un poliedro regular. Entonces,*

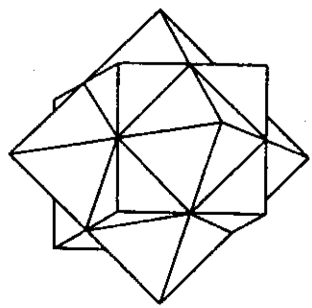
a) *Sus vértices están contenidos en una esfera: la esfera circunscrita.*

b) *Los puntos medios de sus caras están contenidas en una esfera tangente a las caras: la esfera inscrita.*

c) *Los puntos medios de las aristas están contenidos en una esfera tangente a las aristas: la* **ESFERA MEDIA**. ■

Teorema: *Sea $\mathcal{P}$ un poliedro regular y sea v un vértice. Entonces los puntos medios de las aristas que inciden en v son coplanares. Los planos así determinados acotan a un poliedro regular cuyas caras son paralelas al dual de $\mathcal{P}$. Más aún , las aristas de este nuevo poliedro, el* **RECIPROCO** *de $\mathcal{P}$, son tangentes a la esfera media de $\mathcal{P}$ y sus puntos medios son los mismos puntos medios de las aristas originales de $\mathcal{P}$. Por lo tanto, ambos poliedros comparten la misma esfera media.* ■





Con estos preliminares dejo como un reto verificar que los siguientes puntos en el espacio son los vértices del recíproco del icosaedro dado anteriormente:

$$(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau) \quad , \quad (\pm\tau, 0, \pm\tau^{-1}) \quad , \quad (\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0) \quad , \quad (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

Nótese que los últimos ocho puntos son los vértices de un cubo. Y los primeros doce se agrupan como las esquinas de tres *tarjetas.*

Como el dual de un poliedro se transforma junto con $\mathcal{P}$ bajo una isometría, entonces se desprende que el grupo de rotaciones de $\mathcal{P}$ es el mismo exactamente que el de su dual.

Ya demostramos hace tiempo que si $\mathcal{P}$ es un poliedro regular con caras poligonales de p lados y con q caras incidiendo en cada vértice entonces la pareja $[p, q]$ determina a $\mathcal{P}$. Llamemos, con deliberada ambigüedad, al número q y/o al conjunto de caras que rodea a un vértice, la **ESTRELLA** de $\mathcal{P}$.

Teorema: *Sea $\mathcal{P}$ un poliedro regular $[p, q]$ no un tetraedro. Entonces una rotación de $\mathcal{P}$ (no la identidad) debe ser necesariamente alguna de las siguientes* (ver [5, pag. 16])*:*

a) *Una rotación de ángulo $2n\pi/q$ $(n = 1, 2, \ldots, q-1)$ a lo largo de un eje determinado por dos vértices opuestos.*

b) *Una rotación de ángulo π a lo largo de un eje determinado por los puntos medios de dos aristas opuestas.*

c) *Una rotación de ángulo $2n\pi/p$ $(n = 1, 2, \ldots, p-1)$ a lo largo de un eje determinado por los puntos medios de dos caras opuestas.*

Si $\mathcal{P}$ es un tetraedro, entonces las condiciones a) y c) deben ser sustituidas por:

ac) *Una rotación de ángulo $2n\pi/q = 2n\pi/p$ $(n = 1, 2)$ a lo largo de un eje determinado por un vértice y el punto medio de la cara opuesta.* ■

Sea $\mathbf{S}(X)$ el grupo de permutaciones de X en si mismo (es fácil ver que $|\mathbf{S}(X)| = |X| \times (|X| - 1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$). En general $\mathbf{S}(X)$ tiene muchos subgrupos pero sólamente uno de orden $|\mathbf{S}(X)|/2$ que denotaremos por $\mathbf{A}(X)$. $\mathbf{A}(X)$ consiste del conjunto de todas aquellas permutaciones que se pueden expresar como una yuxtaposición de un número par de ciclos de tamaño dos (i.e. transposiciones).

Definición: Sea $\mathcal{P}$ un poliedro regular. Denotamos por $\mathrm{Rot}(\mathcal{P})$ al grupo de rotaciones de $\mathcal{P}$.

Teorema: *Sea $\mathcal{P}$ un tetraedro y sea X el conjunto de sus cuatro vértices. Entonces* $\mathrm{Rot}(\mathcal{P})$ *se representa fielmente como* $\mathbf{A}(X)$. ■

Teorema: *Sea $\mathcal{P}$ un cubo y sea X el conjunto de las cuatro diagonales que unen vértices opuestos. Entonces* $\mathrm{Rot}(\mathcal{P})$ *se representa fielmente como* $\mathbf{S}(X)$. ■

Teorema: *Sea $\mathcal{P}$ un icosaedro. Entonces los treinta puntos medios de sus aristas se agrupan en cinco sextetas de tal modo que cada una constituye el conjunto de vértices de un octaedro. Sea X el conjunto de estos cinco octaedros. Entonces cada rotación de $\mathcal{P}$ permuta de manera natural a los elementos de X. Más aún,* $\mathrm{Rot}(\mathcal{P})$ *se representa fielmente como* $\mathbf{A}(X)$. ■

La siguiente tabla resume la situación:

	Vértices	Aristas	Caras		Estrella	Grupo
			#	p	q	
Tetraedro	4	6	4	3	3	12
Octaedro	6	12	8	3	4	24
Cubo	8	12	6	4	3	24
Icosaedro	12	30	20	3	5	60
Dodecaedro	20	30	12	5	3	60

Para dar fórmulas explícitas de las rotaciones en el espacio, y de un sólido regular en particular, es conveniente introducir la idea de *cuaternio.*

Definición: Sea $\mathbf{H} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^4$. Es decir, $\mathbf{H}$ es el conjunto de **CUATERNIOS** o de cuartetas (x, a, b, c) con coordenadas reales. Sin embargo deseo que en este momento se piense en un elemento de $\mathbf{H}$ como la suma de un número real x más un vector $v = (a, b, c)$ en el espacio.

Es decir, si $q \in \mathbf{H}$ entonces

$$q = (x, 0, 0, 0) + (0, a, b, c) = x + v$$

Sea $r = y + w$ otro cuaternio y definamos el producto de q por r como

$$qr = (xy - v \circ w) + (xw + yv + v \times w)$$

donde $v \circ w$ es el producto punto usual en $\mathbf{R}^3$ y $v \times w$ es el producto cruz.

Si

$$\|q\| = \left(x^2 + a^2 + b^2 + c^2\right)^{1/2}; \qquad q^{-1} = (x - v) / \|q\|^2, \quad (q \neq 0)$$

entonces $\|qr\| = \|q\| \; \|r\|$ y $qq^{-1} = 1$. Además, el producto de cuaternios es asociativo, se distribuye respecto a la suma vectorial usual, $1q = q1 = q \quad \forall q \in \mathbf{H}$, pero no es conmutativo.

Teorema: *a) Si* $0 \neq q \in \mathbf{H}$ *y* $w \in \mathbf{R}^3$, *entonces* $qwq^{-1} \in \mathbf{R}^3$ *y la correspondencia* $w \mapsto qwq^{-1}$ $(\forall w \in \mathbf{R}^3)$ *es una rotación del espacio.*

b) Si $q = \cos(\theta/2) + (sen\,(\theta/2))v_1$ con $\|v_1\| = 1$ entonces la rotación que q induce en $\mathbf{R}^3$ es la rotación con ángulo θ y eje v_1. Más aún,

$$\begin{aligned} qwq^{-1} &= \left(x^2 - \|v\|^2\right) w + 2\,(v \circ w)\, v + 2xv \times w \\ &= (\cos\theta)\, w + (1 - \cos\theta)\,(v_1 \circ w)\, v_1 + (\operatorname{sen}\theta)\, v_1 \times w\,. \end{aligned}$$

■

Con el resultado que caracteriza las rotaciones de los sólidos regulares y las fórmulas de arriba, entonces ya es posible manipular a los poliedros en una computadora.

Realmente pudimos haber llegado a la fórmula de rotación sin la ayuda de los cuaternios, pero es interesante observar como un cuaternio contiene de manera (casi) explícita el ángulo y el eje de rotación.

Por otro lado la esfera tridimensional

$$\mathbf{S}^3 = \{q \in \mathbf{H} \mid \|q\| = 1\}$$

con la multiplicación de cuaternios nos ofrece un ejemplo importante de grupo continuo (y la correspondencia $q \mapsto$ *rotación inducida* nos da un ejemplo no trivial de homomorfismo de grupos).

DESVIACION: En otras palabras, $\mathbf{S}^3$ actúa sobre la esfera bidimensional $\mathbf{S}^2$ de tal suerte que si $q \in \mathbf{S}^3$ y $v \in \mathbf{S}^2$ entonces la acción de q en v es qvq^{-1}. Esta acción no se da exactamente de manera fiel, pero su núcleo es el minimalista grupo $\{\pm 1\} = \mathbf{S}^\circ$.

La única órbita es todo $\mathbf{S}^2$. Por tanto, los grupos estabilizadores son todos los conjugados al círculo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^1 &= \left\{q \in \mathbf{S}^3 \mid q(1,0,0)q^{-1} = (1,0,0)\right\} \\ &= \left\{\cos\theta + (\operatorname{sen}\theta)\,(1,0,0) \in \mathbf{S}^3 \mid \theta \in [0, 2\pi)\right\}. \end{aligned}$$

Observe que las esferas $\mathbf{S}^{\circ}$, $\mathbf{S}^1$ y $\mathbf{S}^3$ son grupos, pero $\mathbf{S}^2$ no lo es. Aunque no es fácil decidir porqué no puede serlo.

Dos estabilizadores (en nuestro ejemplo) o son iguales, o solamente se intersectan en $\mathbf{S}^{\circ}$. Es decir, $\mathbf{S}^3$ es un manojo de círculos congruentes más o menos del mismo modo en que la superficie de la tierra es un manojo de meridianos.

Por otro lado, la función $\varphi: \mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$ definida por $\varphi(q) = q(1,0,0)q^{-1}$ describe el ***deambular*** del vector (1,0,0) por $\mathbf{S}^2$ a medida que varía q. Las imágenes inversas $\varphi^{-1}(v) = \{q \in \mathbf{S}^3 \mid \varphi(q) = v\}$ $(\forall v \in \mathbf{S}^2)$ son las clases laterales de $\mathbf{S}^3$ bajo $\mathbf{S}^1$. Es decir, $\mathbf{S}^3$ es una colección ajena de círculos congruentes. Un análisis más fino demuestra que cualesquiera dos de estos círculos están entrelazados. Revelando así (Hopf), el extraño mundo de las ***foliaciones y la homotopía de orden superior*** para nosotros. En fin, regresemos al tema...

Ahora supongamos que tenemos material (cartón o plástico) de colores distintos y supongamos que queremos producir dodecaedros de colores. La pregunta es: ¿Cuántos dodecaedros esencialmente diferentes puedo construir con k colores?

Formalmente una **COLORACION** es tan solo una función Γ que a cada cara del dodecaedro le asociamos un número entre 1 y k. Pensemos en el grupo de rotaciones del dodecaedro como un grupo de permutaciones de las caras (y ya no de los vértices). Decimos que dos coloraciones Γ y Λ son equivalentes si existe una rotación ρ tal que $\Gamma \circ \rho = \Lambda$. Entonces resulta que lo que deseamos contar realmente son órbitas de coloraciones.

Teorema: *Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto finito X. Si Ω es el número de órbitas entonces*

$$\Omega = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

donde $\operatorname{Fix}(g) = \{x \in X \mid g(x) = x\}$.

Demostración: Consideremos una tabla con tantos renglones como $|G|$, y tantas columnas como $|X|$. Coloquemos un uno en la entrada correspondiente al renglón $g \in G$ y la columna $x \in X$ si $g(x) = x$; y pongamos un cero de otro modo. Ahora contaremos el número de unos en la tabla de dos maneras: En cada renglón hay $|\operatorname{Fix}(g)|$ unos. Por lo tanto hay un total de $\sum_g |\operatorname{Fix}(g)|$ $(g \in G)$ unos en la tabla. Por otro lado, en cada columna hay $|\operatorname{Stab}(x)|$ unos, donde $\operatorname{Stab}(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ es el grupo estabilizador de x. Por lo tanto tenemos un total de $\sum_x |\operatorname{Stab}(x)| \quad (x \in X)$ unos en la tabla.

Para terminar la demostración, utilizaremos las nociones discutidas en los párrafos acotados entre líneas. Si x y x' están en la misma órbita, entonces sus grupos estabilizadores tienen el mismo número de elementos. Si $\mathcal{O}(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ es la órbita de x, entonces

$$\sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}(x)| = \sum_{j=1}^{\Omega} |\mathcal{O}(x_j)|\ |\operatorname{Stab}(x_j)|$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_\Omega$ son representantes únicos de cada una de las órbitas. Pero ahora $|\mathcal{O}(x)|\ |\operatorname{Stab}(x)| = |G|$. Y de aquí se concluye el teorema. ■

La ventaja de este resultado es que sabemos la cardinalidad del grupo y podemos contar, para cada rotación g, el número de coloraciones que deja fijas.

Recordemos que toda rotación g (pensada en este caso como una permutación de caras) se puede expresar como una concatenación de ciclos ajenos. Supongamos que γ es una coloración invariante bajo g. Entonces todas las caras de un ciclo deben tener todas el mismo color (¿porqué?). Por lo demás, las caras dentro de un ciclo dado se pueden colorear del modo que nos plazca. Por lo tanto, si g tiene z ciclos, entonces hay exactamente k^z

coloraciones invariantes bajo g. En el caso del dodecaedro las cuentas son como sigue:

a) La identidad consta de 12 ciclos (uno por cada cara).

b) 20 rotaciones, a $2\pi/3$ y $4\pi/3$ radianes, con ejes sobre parejas de vértices opuestos. Cada una con 4 ciclos (tres caras por ciclo).

c) 15 rotaciones a π radianes con ejes sobre puntos medios de aristas opuestas. Cada una con 6 ciclos (dos caras por ciclo).

d) $6 \times 4 = 24$ rotaciones, a $2n\pi/5$ radianes ($n = 1, 2, 3, 4$), con ejes sobre puntos medios de caras opuestas. Cada una con 4 ciclos (dos ciclos de una y dos ciclos de cinco caras).

De aquí que el número de k-coloraciones esencialemente distintas de un dodecaedro sea

$$\left(k^{12} + 20 \times k^4 + 15 \times k^6 + 24 \times k^4\right) /60$$

Por ejemplo, los números de k-coloraciones para $1 \leq k \leq 10$ son los siquientes

k	coloraciones
1	1
2	96
3	9,099
4	280,832
5	4,073,375
6	36,292,320
7	230,719,293
8	1,145,393,152
9	4,707,292,613
10	16,666,924,000

Bibliografía

[1] Biggs, Norman L.; *Discrete Mathematics*; (Oxford Science Publications); Clarendon Press; Oxford; 1988. (De aquí saqué lo de las coloraciones).

[2] Coxeter, H. S. M.; *Fundamentos de Geometría*; Ed. Limusa-Wiley; México; 1971. (Todas las figuras son de este libro).

[3] Coxeter, H.S.M.; *Regular Polytopes*; Third Edition; Dover Publications, Inc.; New York; 1973. (Se obtuvierón las coordenadas de los sólidos de este clásico).

[4] MacLane, Saunders and Birkhoff, Garrett; *Algebra*; The Macmillan Co.; London; 1967. (De aquí se pueden ver los cuaternios con detalle).

[5] Zassenhaus, Hans J.; *Theory of groups*; Second Edition; Chelsea Publishing Co.; New York; 1974. (Para la estructura de los grupos finitos de rotaciones en el espacio).