Miscelánea Matemática **35** (2002) 77–99 SMM

Las Quebraditas (Propiedades dinámicas de una peculiar familia de funciones en el Intervalo)

Héctor Méndez Lango
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Ciudad Universitaria
04510 México, D.F.
hml@hp.fciencias.unam.mx

1 Introducción.

La teoría de los Sistemas Dinámicos es la parte de las matemáticas que estudia más directamente el movimiento. Ahí donde hay objetos que se mueven, planetas, partículas, poblaciones, etc., ahí un matemático especializado en el área de sistemas dinámicos puede trabajar.

Algunas áreas de las matemáticas, así como otros muchos espacios de la cultura y la ciencia, experimentaron el inicio de lo que podríamos llamar una nueva etapa de su desarrollo en la década de los sesentas (1960-1970). Éste es el caso de los Sistemas Dinámicos. Si bien la popularidad que hoy gozan conceptos como *conjunto fractal* y *dinámica caótica* se explica como el resultado del trabajo de muchos años en las matemáticas, y en otras disciplinas, es innegable que en las últimas décadas del siglo XX vimos un crecimiento explosivo en la cantidad de personas interesadas en su estudio y una difusión sin precedentes de sus resultados más interesantes.

Muchos matemáticos han participado en este proceso. Una lista de todos sería imposible. Sin embargo queremos mencionar aquí a uno de ellos: Stephen Smale. El trabajo de S. Smale, y del grupo de matemáticos relacionados con él, tiene muchísimas facetas y ha impactado positivamente en varias ramas de las matemáticas. Uno de sus muchos aportes fue el siguiente: La presentación de un modelo de sistema dinámico discreto en el plano (es decir, de una función continua de una región de $\mathbb{R}^2$ en sí misma) que reune dos características: i) una descripción geométrica muy sencilla de su regla de correspondencia y ii) la presencia de varios de los comportamientos dinámicos más complejos (presencia de órbitas homoclínicas, entropía positiva, estabilidad estructural, y un atractor que es un continuo indescomponible son algunos de ellos). A partir de su publicación en 1965 (véase [Sma]) este modelo se conoce como la *Herradura de Smale*.

La Herradura de Smale nos permitió, a los no especialistas en estos temas, acceder por un camino directo y agradable a la observación de las propiedades dinámicas de los comportamientos que hoy se conocen como *caóticos*. Un poco después, y de manera tal vez un poco sorpresiva, uno puede darse cuenta que existe una relación profunda entre la Herradura y otro modelo simple de describir definido en el intervalo $I = [0, 1]$ de la recta real: la función conocida como *la tienda*, $T : I \to I$. La gráfica de T es una línea quebrada con sólo dos segmentos rectos: el primero va del punto $(0, 0)$ al punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, y el segundo va del punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ al punto $(1, 0)$ (véase la sección 3). La Herradura y T comparten, desde el punto de vista de la dinámica que generan, muchas propiedades.

Aunque en este artículo conoceremos varias de las propiedades dinámicas de T, nuestra presentación se guiará por un punto de vista un poco más general: Nuestro interés principal es el estudio de las propiedades de la dinámica generada por funciones continuas definidas de el intervalo $I = [0, 1]$ en sí mismo. De todas estas funciones, nos quedaremos sólo con aquellas cuya gráfica es una línea quebrada formada por una cantidad finita de segmentos rectos. Pediremos además que la pendiente en cada uno de estos segmentos sea, en valor absoluto, mayor que uno. Las funciones que cumplen todas estas condiciones las llamaremos *quebraditas*. Claramente T es una quebradita. No obstante la relativa sencillez con la que definimos estas funciones, varias de las propiedades dinámicas que ellas presentan son muy interesantes. Invitamos a nuestros lectores a conocer algunas de estas propiedades (y con ello iniciar su conocimiento de T) en las siguientes páginas.

Demostraremos que si f es quebradita, entonces el conjunto de los puntos en I tales que su órbita es periódica o tiende a ser periódica forma un conjunto denso en I. Mostraremos también que el conjunto de los puntos en I tales que su órbita es aperiódica (esto es, de comportamiento completamente distinto a las anteriores) también forma un conjunto denso en I. Es decir, el conjunto de puntos en el intervalo que dan lugar a órbitas *sencillas* y el conjunto de puntos en el intervalo que dan lugar a órbitas *complicadas*, ambos son densos en I.

El concepto de *caos*, cuya definición recordaremos más adelante, también aparece al estudiar esta familia. Mostraremos que si $f : I \to I$ es quebradita, entonces existe un conjunto cerrado, invariante bajo f, $f(A) \subset A$, tal que $f|_A : A \to A$ es caótica según la definición de R. L. Devaney (véase [Dev], página 50). Además mostraremos que este *conjunto caótico* es grande en el sentido de que su interior no es vacío, $int(A) \neq \phi$.

2 Presentación de la familia.

Iniciemos con la presentación de la familia.

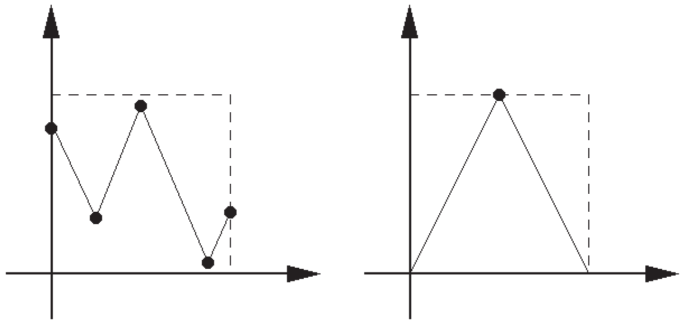
Sea I el intervalo $[0, 1]$ en la recta real $\mathbb{R}$. En este artículo sólo consideraremos funciones de I en I. Todas las funciones se asumirán continuas en I. La familia de *las quebraditas* (que denotaremos con la letra $\mathcal{L}$) es la siguiente:

Definición 1. La función $f : I \to I$ está en la familia $\mathcal{L}$ si cumple las siguientes dos condiciones:

i) Su gráfica es una linea quebrada (una poligonal). Es decir, existe una partición finita del intervalo $[0, 1]$, digamos $P = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_l = 1\}$, $t_{i-1} < t_i$, tal que la parte de la gráfica de f que une $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ con $(t_i, f(t_i))$ es un segmento de recta para cada $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, y

ii) la pendiente m_i en cada uno de esos l segmentos, es mayor que 1 en valor absoluto, $|m_i| > 1$.

Los siguientes funciones son dos elementos de la familia $\mathcal{L}$.



Esta familia posee algunos rasgos interesantes. En particular estudiaremos aquellas propiedades que cada elemento de esa familia exhibe cuando es considerado el sistema dinámico discreto a que da lugar.

En la presentación de esas propiedades (y en la demostración de algunas afirmaciones) haremos uso de algunos resultados conocidos del Cálculo Diferencial e Integral y de un primer curso de Análisis Matemático (en particular el Teorema del Valor Intermedio y del Teorema de Baire). Para evitar que nuestra presentación sea excesivamente larga, algunas de las afirmaciones no vienen acompañadas de su demostración. La lectora y el lector están invitados a aportar, en estos casos, los argumentos necesarios.

De aquí en adelante, salvo que se indique algo distinto, todas las funciones que consideraremos serán elementos de la familia $\mathcal{L}$.

3 Propiedades dinámicas.

Dada $f \in \mathcal{L}$ definimos $f^0 = id$, $f^1 = f$, y para toda $n \geq 2$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

De manera inmediata tenemos tres implicaciones:

i) Si $g \in \mathcal{L}$, entonces $h = f \circ g$ también es elemento de $\mathcal{L}$.

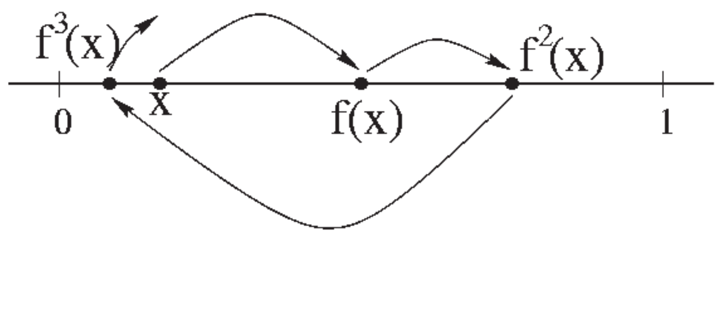
ii) Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n \in \mathcal{L}$.

iii) Para toda $x \in I$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(x) \in I$.

Esto nos permite definir para cada punto x en I el siguiente conjunto:

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), ...\} \subset I,$$

que llamaremos la *órbita* de x bajo f.



La *dinámica* de f aparece cuando consideramos cada órbita, $o(x, f)$, como las distintas posiciones que va recorriendo un objeto al paso del tiempo. En $t = 0$ estaba en x; en $t = 1$ en $f(x)$; en $t = 2$ en $f^2(x)$; y así sucesivamente.

$$\begin{array}{lllllll} \text{tiempos} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \text{posiciones} & x & f(x) & f^2(x) & f^3(x) & \cdots & f^n(x) \end{array}.$$

Cada x en I da lugar a una órbita, es decir, a una secuencia de movimientos. Bajo este punto de vista la función f genera un *sistema dinámico discreto.* Decir que nos interesa estudiar las propiedades dinámicas de f es sólo otra manera de expresar que nos interesa conocer cómo son todas las órbitas que ella y los puntos de I producen.

Definición 2. Sea $x \in I$. Decimos que x es:

i) un punto fijo de f si $f(x) = x$;

ii) un punto periódico de f de período n, $n \in \mathbb{N}$, si $f^n(x) = x$ y para toda $1 \leq k < n$ se tiene que $f^k(x) \neq x$;

iii) un punto preperiódico de f si existen un punto periódico de f, digamos z, y una $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = z$.

Dada x en I, la órbita de x bajo f es un conjunto. Si lo pensamos un poco más, la $o(x, f)$ es también una sucesión: el primer elemento es x, el segundo es $f(x)$, el tercer elemento es $f^2(x)$, y así sucesivamente. Por ejemplo si x es un punto fijo de f, entonces $o(x, f) = \{x\}$ o, sin faltar a la verdad, podríamos decir que $o(x, f) = \{x, x, x, \ldots\}$, una sucesión constante.

Obsérvese que si x es un punto fijo de f, entonces el punto $(x, f(x))$ pertenece tanto a la gráfica de f como a la gráfica de la función identidad, $id : I \to I$, $id(x) = x$ para todo $x \in I$. Consideraremos a los puntos fijos como puntos periódicos de período 1. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos $Per(f)$. Si x es un punto periódico, diremos que x tiene una *órbita periódica.* De manera similar definimos *órbita preperiódica.*

Sean $[s, t]$ y $[c, d]$ dos subintervalos de I. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[c, d] \subset f^n([s, t])$. A partir de la continuidad de f^n se pueden demostrar las siguientes dos afirmaciones:

i) Existe un subintervalo $[\alpha, \beta] \subset [s, t]$ tal que $[c, d] = f^n([\alpha, \beta])$.

ii) Si $[c, d] = [s, t]$, entonces existe un punto $x \in [s, t]$ tal que es periódico bajo f.

Un elemento muy importante de la familia $\mathcal{L}$ es la función $T : I \to I$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Obsérvese que la $o\left(\frac{1}{9}, T\right)$ es preperiódica, y la $o\left(\frac{2}{7}, T\right)$ es periódica de período 3.

En la literatura matemática en inglés, la función T, es conocida como *tent map* (nosotros le llamaremos simplemente T). El sistema dinámico que ella genera usualmente aparece como uno de los primeros ejemplos cuando se estudia *dinámica caótica* en el intervalo (ver [Dev]).

Definición 3. Decimos que x es un punto asintóticamente periódico (tiene órbita asintóticamente periódica) de f si existe $y \in Per(f)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

Es inmediato que todo punto periódico o preperiódico es asintóticamente periódico.

Sea $g : I \to I$ dada por $g(x) = x^2$. Considera la órbita de $x = \frac{1}{2}$ bajo g. Se puede probar (la lectora queda invitada a hacerlo) que esta órbita cumple las siguientes características:

i) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 < g^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) < g^n\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$, y

ii) $\lim_{n\to\infty} g^n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Por lo tanto la $o\left(\frac{1}{2}, g\right)$ no es periódica ni preperiódica bajo g, pero sí es asintóticamente periódica.

Mostraremos a continuación que una función quebradita no tiene órbitas asintóticamente periódicas distintas a las órbitas periódicas o preperiódicas.

Proposición 4. *Si $x \in I$ es un punto asintóticamente periódico de f, entonces x es un punto periódico o preperiódico.*

Demostración: Sea $P = \{t_0 = 0, t_1, \ldots, t_l = 1\}$ la partición mencionada en la definición de f. Llamaremos a los puntos t_i, $i = 0, 1, \ldots, l$, los *puntos críticos* de f. Sea $z \in Per(f)$. Esta órbita tiene dos opciones: $o(z, f) \cap P = \phi$ ó $o(z, f) \cap P \neq \phi$.

Caso 1. $o(z, f) \cap P = \phi$.

Supongamos que el período de z es k, y que $o(z, f) = \{z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}\}$ donde $z_j = f^j(z)$.

Sea $\delta = \min\{|z_j - t_i| \,|0 \leq j \leq k-1, 0 \leq i \leq l\} > 0$. Supongamos que para algún $x \in I$ la $o(x, f)$ es asintóticamente periódica a la órbita de z. Como el $\lim_{m\to\infty} |f^m(x) - f^m(z)| = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$|f^n(x) - f^n(z)| < \delta.$$

Dada la definición de δ, el intervalo $[f^n(x), f^n(z)]$, o, en su caso, el intervalo $[f^n(z), f^n(x)]$, está totalmente contenido en alguno de los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ si $n \geq n_0$.

Sean m_i la pendiente de la gráfica de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, y

$$m_f = \min\{|m_i| \, |1 \leq i \leq l\}.$$

Si suponemos que para toda $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $f^m(x) \neq f^m(z)$, entonces para toda $\eta \geq 0$ se tiene lo siguiente:

i) $|f^{n_0+\eta}(x) - f^{n_0+\eta}(z)| < \delta$, y

ii) $|f^{n_0+\eta}(x) - f^{n_0+\eta}(z)| \geq (m_f)^\eta |f^{n_0}(x) - f^{n_0}(z)|$.

Como $|f^{n_0}(x) - f^{n_0}(z)| > 0$ y el $\lim_{\eta\to\infty}(m_f)^\eta = \infty$ (ya que $m_f > 1$), obtenemos una contradicción. Por tanto, si la $o(x, f)$ es asintóticamente periódica, entonces ella es periódica o preperiódica.

Caso 2. $o(z, f) \cap P \neq \phi$.

Consideremos ahora en la definición de δ sólo las cantidades $|z_j - t_i|$ cuando ellas son distintas de cero.

$$\delta = \min\{|z_j - t_i| \neq 0 \, |0 \leq j \leq k-1, 0 \leq i \leq l\}.$$

Siguiendo el argumento empleado en el caso anterior se concluye también en este caso que si una órbita es asintóticamente periódica a la órbita de z, entonces esa órbita es preperiódica o periódica. □

No es sencillo, pero se puede demostrar que para la función $T : I \to I$ sucede lo siguiente: $x \in I$ es un punto periódico o preperiódico si y sólo si x es un número racional.

Los tipos de órbitas mencionados hasta ahora representan *movimientos sencillos*. En todas las órbitas de estos tres tipos (periódicas, preperiódicas y asintóticamente periódicas) se tiene que la sucesión de valores que va tomando $f^n(x)$ tiende a un movimiento periódico cuando n tiende a infinito.

En el caso de que la órbita de x sea asintóticamente periódica a la órbita de y, punto periódico de período m, $o(y, f) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, tenemos que dada $\varepsilon > 0$ muy pequeña, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f^n(x) - f^n(y)| < \varepsilon$. Esto quiere decir que a partir de un cierto momento la órbita de x esta muy cerca de m puntos del intervalo. De hecho, a partir n_0, toda la órbita de x se encuentra en la unión de m bolas de radio ε cuyos centros son los puntos de la órbita periódica de y,

$$\{f^n(x) \, |n \geq n_0\} \subset \cup_{i=1}^m B_\varepsilon(y_i).$$

La siguiente definición nos servirá para formalizar lo que entenderemos por *movimientos sencillos.*

Definición 5. Sean x y z dos puntos en I. Decimos que z es punto límite de la órbita de x si existe una subsucesión de $o\left(x,f\right)$,

$$\left\{ f^{n_i}\left(x\right) | n_1 < n_2 < n_3 < \cdots \right\},$$

tal que $\lim_{n_i \to \infty} f^{n_i}\left(x\right) = z$. Al conjunto de todos los puntos límite de $o\left(x,f\right)$ lo llamaremos el omega conjunto límite de x, y lo denotaremos por $\omega\left(x,f\right)$.

Sea $T : I \to I$ la función que definimos antes. Entonces

i) $\omega\left(\frac{2}{3},T\right) = \left\{\frac{2}{3}\right\}$, ya que $o\left(\frac{2}{3},T\right) = \left\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\ldots\right\}$.

ii) $\omega\left(\frac{2}{7},T\right) = \left\{\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7}\right\}$, ya que $o\left(\frac{2}{7},T\right) = \left\{\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7},\ldots\right\}$ y toda subsucesión de ella convergente es constante a partir de un cierto momento.

iii) $\omega\left(\frac{1}{28},T\right) = \left\{\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7}\right\}$, ya que $T^3\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{2}{7}$ y a partir de ese momento la órbita de $\frac{1}{28}$ es, en esencia, la órbita de $\frac{2}{7}$.

Sea $g : I \to I$ una función no necesariamente en nuestra familia. Observa que si $x \in I$ es asintóticamente periódico bajo g, digamos a la órbita de z, $z \in Per\left(g\right)$, entonces $\omega\left(x,g\right) \subset o\left(z,g\right)$. En particular, la cardinalidad de $\omega\left(x,g\right)$ es finita. Órbitas asintóticamente periódicas tienen ω conjuntos límite de cardinalidad finita. El siguiente teorema contiene la afirmación recíproca a este hecho. Su demostración se encuentra en la página 72 de [Blo].

Teorema 6. *Sean $x \in I$ y $g : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Si la cardinalidad de $\omega\left(x,g\right)$ es finita, entonces x es un punto asintóticamente periódico.* □

Dado un punto, $x \in I$, diremos que el movimiento representado por su órbita es *sencillo* si la cardinalidad de su $\omega\left(x,f\right)$ es finita. Observa que las órbitas sencillas corresponden a movimientos que convergen a órbitas periódicas.

Definición 7. Sea x un punto en I. Decimos que x es un punto aperiódico (o tiene órbita aperiódica) de f si la cardinalidad su $\omega\left(x,f\right)$ es infinita.

Las órbitas aperiódicas describen movimientos no sencillos (a veces llamados *complejos*, *complicados* o *caóticos*). Dedicaremos el final de esta sección a la demostración de que tales órbitas sí se presentan en funciones continuas definidas en el intervalo. En particular demostraremos que todos los elementos de la familia $\mathcal{L}$ presentan este tipo de órbitas. De hecho, una de nuestras metas es demostrar que dada $f \in \mathcal{L}$, existe un conjunto denso en I, digamos Γ (que depende de cada f), tal que si $x \in \Gamma$, entonces la órbita de x bajo f es aperiódica.

Considera nuevamente la función $T : I \to I$. De seguro ya puedes demostrar lo siguiente:

i) Si $x \in \mathbb{Q} \cap I$, entonces $\omega(x, T)$ tiene cardinalidad finita.

ii) Si $x \notin \mathbb{Q} \cap I$, entonces $\omega(x, T)$ tiene cardinalidad infinita.

Proposición 8. *Sea $f \in \mathcal{L}$. Entonces existe $x \in I$ tal que la cardinalidad de su $\omega(x, f)$ es infinita.*

Demostración: Es suficiente mostrar que debe existir un punto $x \in I$ tal que su órbita no es periódica ni preperiódica.

La función f es monótona en una cantidad finita de subintervalos de I. En cada uno de ellos la pendiente es distinta de 1. Por tanto el conjunto $\{z \in I \,|\, f(z) = z\}$ tiene cardinalidad finita. El mismo argumento dice que para toda $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\{z \in I \,|\, f^n(z) = z\}$$

tiene cardinalidad finita. Y así el conjunto

$$E = \cup_{n=1}^{\infty} \{z \in I \,|\, f^n(z) = z\}$$

es numerable, de hecho es infinito numerable. La parte de que la cardinalidad de E es infinita no es necesaria en esta argumentación, así que su demostración la presentaremos en la siguiente sección.

Es casi inmediata la siguiente igualdad: $E = Per(f)$ (la demostración se deja a la lectora).

Ahora, sea $z \in Per(f)$. Nuevamente por el hecho de que f es monótona en una cantidad finita de subintervalos, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ la cardinalidad del conjunto

$$\{y \in I \,|\, f^n(y) = z\}$$

es finita. Por lo tanto el siguiente conjunto es numerable ya que es la unión numerable de conjuntos numerables:

$$F = \cup_{z \in Per(f)} \{y \in I \,|\, f^n(y) = z \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}.$$

Así el conjunto formado por todos los puntos periódicos de f y por todos los puntos preperiódicos de f, esto es F, es un conjunto numerable. Por tanto, su complemento en $[0,1]$ es denso en I e infinito no numerable.

Cada $x \in I \setminus F$ tiene órbita que no es periódica ni preperiódica, por tanto no es asintóticamente periódica. Y con ello la cardinalidad de su $\omega(x, f)$ es infinita. $\square$

En la siguiente sección daremos otra demostración de la existencia de estas órbitas aperiódicas para elementos de nuestra familia. La argumentación que desarrollaremos es más general en tanto que se puede aplicar también a funciones que no necesariamente son quebraditas. Además de esta ventaja, tal argumentación nos llevará de la mano al descubrimiento, para elementos de nuestra familia, de puntos cuyo omega conjunto límite no sólo es de cardinalidad infinita sino que contiene un intervalo con interior distinto del vacío.

4 Órbitas aperiódicas.

La existencia de órbitas aperiódicas está relacionada con una propiedad llamada *transitividad topológica*. He aquí su definición.

Definición 9. Sea $f : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Decimos que f es topológicamente transitiva (o sólo transitiva) en I si para todo par de intervalos abiertos no vacíos, $A = (a, b)$ y $B = (\alpha, \beta)$, $A \subset I$ y $B \subset I$, existen $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) \in B$ (o, de manera equivalente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A) \cap B \neq \phi$).

Esta definición puede modificarse para el caso de conjuntos no vacíos e invariantes bajo f. Sea $J \subset I$ un conjunto cerrado e invariante bajo f, $f(J) \subset J$. Decimos que $f|_J : J \to J$ es transitiva en J si para todo par de subintervalos abiertos de I, $A = (a, b)$ y $B = (\alpha, \beta)$, tales que $A \cap J \neq \phi$ y $B \cap J \neq \phi$, existen $x \in A \cap J$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) \in B \cap J$.

Un ejemplo, y una nueva tarea para el lector, lo da la función $T : I \to I$ que definimos anteriormente. Demuestra estimado lector que T es transitiva en I.

El concepto de la transitividad nos ayudará mucho. Resulta que, como veremos en seguida, transitivo implica aperiódico para funciones definidas en el intervalo.

La herramienta principal en esta sección es el llamado *Teorema de Baire*. A continuación te presentamos una versión de él. Su demostración la puedes encontrar en [Roy], página 139.

Teorema 10. (Baire). *Sea J un subconjunto cerrado no vacío de $\mathbb{R}$. Sea $\{O_1, O_2, \ldots\}$ una colección numerable de subconjuntos de J, abiertos y densos en J. Entonces la intersección de todos ellos forma un conjunto distinto del vacío, $\cap_{n=1}^{\infty} O_n \neq \phi$.* □

Ahora te mostraremos un puente entre la idea de transitividad y la existencia de órbitas aperiódicas.

Teorema 11. *Sea $f : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Si f es transitiva en I, entonces existe $x \in I$ tal que su órbita es aperiódica. Más aún, si f es transitiva en I, entonces existe $x \in I$ tal que su órbita es densa en I.*

Demostración: Construiremos una familia numerable de conjuntos abiertos y densos en el intervalo I. Por el Teorema de Baire, la intersección de todos ellos será no vacía. Mostraremos luego que cada punto en esta intersección tiene una órbita aperiódica. De hecho, la órbita de cada punto en esa intersección formará un conjunto denso en I.

Sean $B_{11}=\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $B_{12}=\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Afirmación 1. La unión infinita $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})$ es un conjunto denso y abierto en el intervalo I.

Observa que f y cada una de sus iteraciones, $f^2, f^3, \ldots$, es una función continua. Dado un subconjunto abierto en el intervalo, digamos A, la imagen inversa de él bajo cada iteración de f es a su vez un conjunto abierto en I. Además, $f^{-n}(A) = (f^n)^{-1}(A)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Y, por último, la unión de conjuntos abiertos es a su vez un conjunto abierto. Por lo tanto la $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})$ forma un conjunto abierto.

Mostremos ahora que esa unión forma un conjunto denso en I.

Sea (a, b) un intervalo no vacío en I. Es suficiente mostrar que $(a, b) \cap \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}) \neq \phi$.

Como f es transitiva en I, existe $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (a, b)$ tales que $f^k(x) \in B_{11}$. Por tanto, $(a, b) \cap f^{-k}(B_{11}) \neq \phi$, y con ello, $(a, b) \cap \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}) \neq \phi$.

De manera similar a como hemos procedido se puede argumentar que la unión infinita $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12})$ forma un conjunto abierto y denso en I.

Sea $N_1 = (\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12}))$. Es inmediato (el lector es llamado a aportar los detalles) que N_1 es un conjunto abierto y denso en I. Nótese que si $x \in N_1$, entonces existen dos números naturales, k y l, tales que $f^k(x) \in B_{11}$ y $f^l(x) \in B_{12}$.

Para construir N_2 procederemos de manera análoga. Consideramos ahora $4 = 2^2$ subintervalos abiertos en el intervalo I. Sean $B_{21}=\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $B_{22}=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $B_{23}=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, y $B_{24}=\left(\frac{3}{4}, 1\right)$. La prueba de la siguiente afirmación se obtiene haciendo cambios mínimos a la argumentación utilizada en la demostración de la *Afirmación 1.*

Afirmación 2. Las siguientes uniones de conjuntos son, cada una de ellas, conjuntos densos y abiertos en el intervalo I :

$$\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{21}), \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{22}), \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{23}) \; y \; \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{24}).$$

Definimos N_2 así:

$$N_2 = \cap_{k=1}^{4} \left(\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{2k})\right).$$

Nuevamente es inmediato que N_2 es un conjunto abierto y denso en I. Además, si $x \in N_2$, entonces su órbita visita, en distintos momentos, los cuatro intervalos B_{2k}, $k = 1, 2, 3, 4$.

Para definir N_k, k un número natural cualquiera, seguimos el procedimiento descrito anteriormente.

Primero. Sean $B_{kl}=\left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right)$, $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^k$.

Segundo. Los conjuntos $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{kl})$ son abiertos y densos en I para cada $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^k$.

Tercero. Sea $N_k = \cap_{l=1}^{2^k} (\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{kl}))$. Este conjunto es abierto y denso en I.

Por último, una vez que hemos definido para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto N_k, sea $N = \cap_{k=1}^{\infty} N_k$. Por el Teorema de Baire, este conjunto es no vacío.

Afirmación 3. Si $x \in N$, entonces la órbita de x forma un conjunto denso en I. Es decir, la cerradura del conjunto $o(x, f)$ es todo el intervalo I.

Tomemos $x \in N$. Sea (a, b) un intervalo no vacío en I. Es suficiente demostrar que $(a, b) \cap o(x, f) \neq \phi$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{3}$. Es inmediato que existe $l \in \left\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\right\}$, tal que $\left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right) \subset (a, b)$. Como $x \in N_k$, $x \in \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{kl})$. Por tanto existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(x) \in \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right)$. Y con ello nuestra afirmación es cierta.

Afirmación 4. Si $x \in N$, entonces $\omega(x, f) = I$.

Sean $x \in N$ y $y \in I$. La idea es construir una subsucesión de la órbita de x que sea convergente a y.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ considera $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. El primer elemento de nuestra subsucesión lo determinamos de la siguiente manera: Como la $o(x, f)$ es densa en I, existe n_1 tal que $|f^{n_1}(x) - y| < \varepsilon_1$. Para decidir el segundo elemento de la subsucesión consideramos a ε_2. Como el conjunto

$$o(x, f) \setminus \{x, f(x), \ldots, f^{n_1}(x)\}$$

es denso en I, existe $n_2 > n_1$ tal que $|f^{n_2}(x) - y| < \varepsilon_2$. Y así nos seguimos. Supongamos que ya escogimos a n_k con las dos propiedades siguientes: $n_k > n_{k-1}$ y $|f^{n_k}(x) - y| < \varepsilon_k$. Dado que, nuevamente, el conjunto que se obtiene al quitarle a la órbita de x una cantidad finita de puntos es denso en I, es claro que existe n_{k+1} con propiedades similares a las mencionadas: $n_{k+1} > n_k$ y $|f^{n_{k+1}}(x) - y| < \varepsilon_{k+1}$. Es ahora inmediato que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$.

Con las afirmaciones anteriores en la mano podemos concluir que si $x \in N$, entonces la cardinalidad de $\omega(x, f)$ es infinita (de hecho, es infinita no numerable ya que $\omega(x, f) = I$). Y con ello, la órbita de cada punto del conjunto N es aperiódica. $\square$

Las siguientes dos observaciones son interesantes y sus demostraciones parecen no ser difíciles:

i) El conjunto N, encontrado en el teorema anterior, es infinito no numerable.

ii) Si f tiene una órbita densa en I, entonces f es transitiva en I.

Un poco más adelante utilizaremos una versión del teorema que acabamos de presentar ligeramente distinta. A continuación la redactaremos. Su demostración es, con ligeros cambios, la misma que ya ofrecimos.

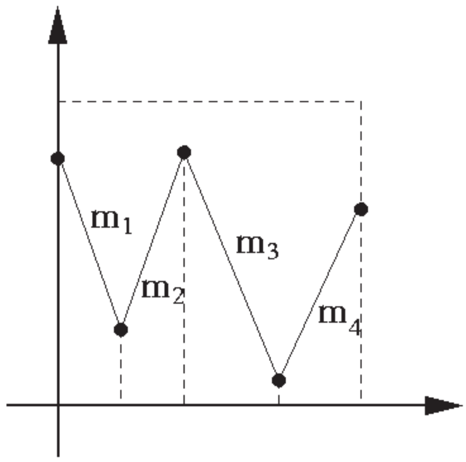
Teorema 12. *Sea $f : I \to I$ una función continua (no necesariamente en nuestra familia). Sea J un subconjunto de I cerrado y de cardinalidad infinita. Supongamos que J es invariante bajo f, $f(J) \subset J$. Si $f|_J : J \to J$ es transitiva en J, entonces existe $x \in J$ tal que su órbita es aperiódica (de hecho, densa en J).* $\square$

Para que esta idea de transitividad tenga utilidad en la búsqueda de órbitas aperiódicas para funciones de nuestra familia, $f \in \mathcal{L}$, es necesario encontrar un subconjunto J de I, cerrado e infinito, tal que sea invariante bajo f y tal que $f\,|_J : J \to J$ sea transitiva en J. Las secciones 5 y 6 se orientan a esta meta. En la sección 5 proporcionamos algunos lemas técnicos y en la 6 obtenemos el conjunto J (pasando en el camino por el concepto de *caos*).

5 Regreso a la familia.

En esta sección presentamos algunas propiedades que cumplen los elementos de la familia $\mathcal{L}$. Y luego en la siguiente haremos uso de ellas.

Sea $f \in \mathcal{L}$. Sea $P = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_l = 1\}$ la partición mencionada en la definición de f, y sean $m_1, m_2, \ldots, m_l$, las pendientes de los segmentos de recta que componen la gráfica de f.



Sea $m_f = \min\{|m_i|\,|1 \leq i \leq l\}$.

Lema 13. *La siguiente desigualdad es cierta:* $m_{f^2} \geq (m_f)^2$. *De hecho, para toda* $n \geq 2$, *se tiene que* $m_{f^n} \geq (m_f)^n$.

Demostración: Sea $x \in I$ tal que $x \neq t_i$ y tal que $f(x) \neq t_i$ para toda i, $1 \leq i \leq l$. Utilizando la regla de la cadena obtenemos lo siguiente:

$$\left|\left(f^2\right)'(x)\right| = |f'(f(x))|\,|f'(x)| \geq (m_f)^2,$$

de aquí se sigue que $m_{f^2} \geq (m_f)^2$.

Por un argumento similar y utilizando inducción matemática obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $m_{f^n} \geq (m_f)^n$. $\square$

Una observación antes de continuar. Como $m_f > 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} m_{f^n} = \infty.$$

Lema 14. *Supongamos que* $m_f > 2$. *Sea* $\delta_f = \min\{t_i - t_{i-1} \,|1 \leq i \leq l\}$. *Sea* J *un subintervalo de* I *con interior distinto del vacío, int* $(J) \neq \phi$. *Entonces existe* $k \geq 1$ *tal que la longitud de* $f^k(J)$ *es mayor que* δ_f. *Denotaremos esto último así:* $l\left(f^k(J)\right) > \delta_f$.

Demostración: Sea J un intervalo con las características mencionadas. Supongamos que para todo $k \geq 1$ se tiene que $l\left(f^k(J)\right) \leq \delta_f$. Se sigue que para cualquier k el intervalo $f^k(J)$ tiene en su interior a lo más un punto de la partición P. Por tanto las longitudes de los intervalos $f^k(J)$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{rcl} l(f(J)) & \geq & \dfrac{m_f}{2} l(J), \\ l\left(f^2(J)\right) & \geq & \left(\dfrac{m_f}{2}\right)^2 l(J), \\ \vdots & & \vdots \\ l\left(f^k(J)\right) & \geq & \left(\dfrac{m_f}{2}\right)^k l(J). \end{array}$$

Dado que $\frac{m_f}{2} > 1$, tenemos que $\left(\frac{m_f}{2}\right)^k \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Y así, $l\left(f^k(J)\right) \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Pero esto último es una contradicción ya que siempre nos mantenemos en el intervalo $[0, 1]$. □

Corolario 15. *Dada* $f \in \mathcal{L}$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo subintervalo* J *de* I *con interior distinto del vacío, int* $(J) \neq \phi$, *existe* $k \geq 1$ *tal que* $l\left(f^k(J)\right) > \delta$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_{f^n} > 2$. Sea $\delta = \delta_{f^n} > 0$, donde δ_{f^n} es el siguiente mínimo:

$$\delta_{f^n} = \min\{t_i - t_{i-1} \,|1 \leq i \leq l\},$$

y donde $P = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_l = 1\}$ es la partición que se mencionaría en la definición de f^n.

Sea J un intervalo con interior distinto del vacío. Por el lema anterior se concluye que existe $m \geq 1$ tal que $l(f^{nm}(J)) = l((f^n)^m(J)) > \delta$. Tomando $k = mn$ la demostración está completa. □

6 La familia $\mathcal{L}$ y las digráficas.

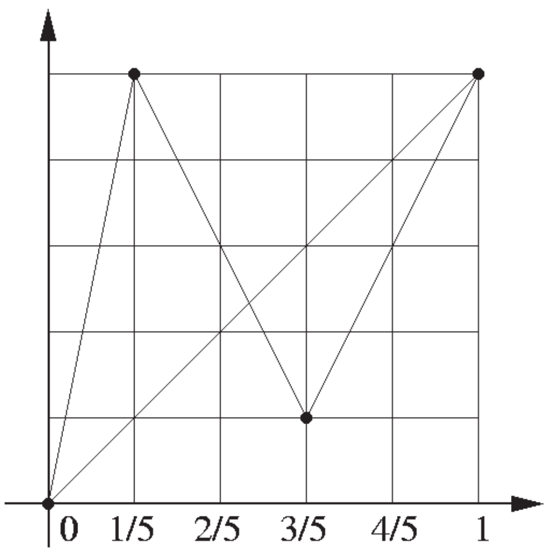
En esta sección a cada miembro de nuestra familia le asociaremos una digráfica.

Sea $f \in \mathcal{L}$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo subintervalo J de I con interior distinto del vacío, $int\,(J) \neq \phi$, existe $n \geq 1$ tal que $l\,(f^n\,(J)) > \delta$. Considera una partición, $Q = \{s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots, s_m = 1\}$, de I cuya norma cumpla la siguiente propiedad: $\|Q\| < \frac{\delta}{2}$.

Las digráficas están formadas por una colección de vértices y una colección de flechas. Dada f y la partición Q construimos la digráfica G. Pondremos un vértice por cada uno de los m intervalos de la forma $[s_{i-1}, s_i] = A_i$. Por comodidad llamaremos a esos m vértices también A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Pondremos una flecha de A_i hacia A_j si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A_i) \supset A_j$ y la longitud del intervalo $f^n(A_i)$ es mayor o igual que δ, $l\,(f^n(A_i)) \geq \delta$.

A continuación ofrecemos un ejemplo de f y su digráfica G.

Ejemplo 16. Sea $f : I \to I$ la función cuya gráfica es así:



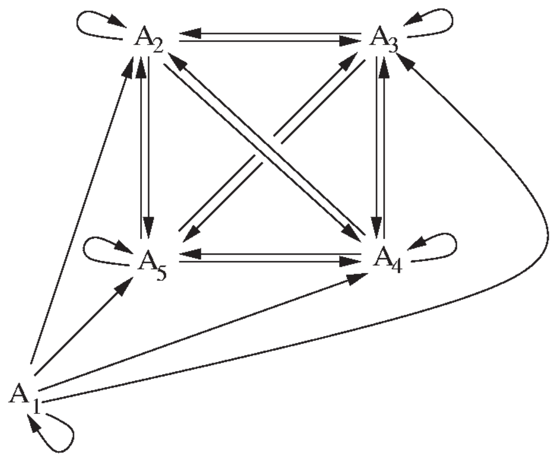
Sea $\delta = \frac{1}{2}$. No es inmediato pero la lectora está invitada a probar lo siguiente:

i) Si $(a, b) \subset \left[\frac{1}{5}, 1\right]$, $a < b$, entonces existe $n \geq 1$ tal que $f^n\,((a, b)) = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$.

ii) Si $(a,b) \subset \left[0, \frac{1}{5}\right]$, $a < b$, entonces existe $n \geq 1$ tal que $f^n((a,b)) = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$.

De estas dos afirmaciones se sigue que para todo subintervalo de I con interior distinto del vacío, llamemosle J, existe un número natural k tal que $l\left(f^k(J)\right) > \delta$.

La partición $Q = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$ cumple la condición $\|Q\| < \frac{\delta}{2} = \frac{1}{4}$. La digráfica asociada a f, y que Q nos ayuda a construir, es la siguiente:



Regresemos a nuestra argumentación general. La función f, la $\delta > 0$, y la digráfica G cumplen las condiciones que mencionamos antes del ejemplo.

Los siguientes dos lemas describen propiedades de G.

Lema 17. *Desde cada vértice A_i, $1 \leq i \leq m$, sale al menos una flecha.*

Demostración: Dada i, $1 \leq i \leq m$, es inmediato que existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $l\left(f^{n_i}(A_i)\right) \geq \delta$ (ya que A_i tiene interior distinto del vacío). Como para cualquier j tenemos que $l(A_j) < \frac{\delta}{2}$ (ya que $\|Q\| < \frac{\delta}{2}$), podemos encontrar un A_j tal que $A_j \subset f^{n_i}(A_i)$. $\square$

Lema 18. *Si existe una flecha que va de A_i a A_j y existe una flecha que va de A_j hacia A_k, entonces existe una flecha que va de A_i a A_k.*

Demostración: Las flechas $A_i \to A_j$ y $A_j \to A_k$ nos proporcionan dos números naturales n_i y n_j tales que $f^{n_i}(A_i) \supset A_j$ y $f^{n_j}(A_j) \supset A_k$. Además, $l\left(f^{n_i}(A_i)\right) \geq \delta$ y $l\left(f^{n_j}(A_j)\right) \geq \delta$. Por lo tanto $f^{n_i+n_j}(A_i) \supset f^{n_j}(A_j) \supset A_k$, y $l\left(f^{n_i+n_j}(A_i)\right) \geq \delta$. $\square$

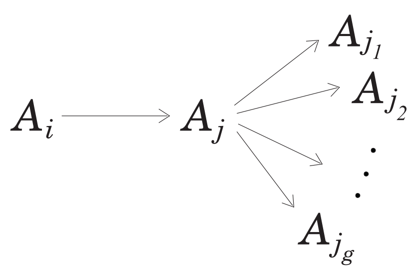
El *grado* de A_i, que denotaremos por $gd(A_i)$, será el número de flechas que inician en A_i. Si existe una flecha de A_i hacia A_j diremos que A_j es *accesible* desde A_i.

Observación. Es inmediato, a partir del lema 18, que si A_j es accesible desde A_i, entonces $gd(A_i) \geq gd(A_j)$. Todos los vértices que son accesibles desde A_j son también accesibles desde A_i.

Tomemos un número fijo i, $1 \leq i \leq m$, y consideremos el vértice A_i. De entre todos los vértices accesibles desde A_i escogemos el vértice A_j que cumple la siguiente propiedad:

$$gd(A_j) = \min \{gd(A_k) \,|A_k \text{ es accesible desde } A_i\}.$$

Sea $g = gd(A_j)$ y sean $A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_g}$ los g vértices accesibles desde A_j.



Como cualquier A_{j_k}, $1 \leq k \leq g$, es accesible desde A_i, entonces $gd(A_{j_k}) \geq g = gd(A_j)$. Por otro lado, $gd(A_{j_k}) \leq gd(A_j) = g$. Así, para cualquier A_{j_k} se tiene que $gd(A_{j_k}) = g$. De hecho, como todo vértice accesible desde A_{j_k} es accesible desde A_j, los g vertices accesibles desde cada uno de los A_{j_k} deben ser $A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_g}$.

Tomemos ahora el intervalo A_{j_1} y con todas sus posibles imágenes bajo las distintas iteraciones de f formamos el siguiente conjunto:

$$B = \cup_{n=1}^{\infty} f^n(A_{j_1}).$$

Las demostraciones de las siguientes observaciones no son difíciles.

Observaciones:

i) $\left(A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup ... \cup A_{j_g}\right) \subset B$.

ii) Para cualquier par de números k y l, $1 \leq k \leq g$, $1 \leq l \leq g$, se tiene que:

$$\cup_{n=1}^{\infty} f^n(A_{j_k}) = \cup_{n=1}^{\infty} f^n(A_{j_l}).$$

iii) $f(B) = B$.

Sea A la cerradura del conjunto B, $A = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} f^n (A_{j_1})}$. En el conjunto A, como veremos en seguida, la función f muestra propiedades muy interesantes desde el punto de vista del estudio de su dinámica.

Lema 19. *El conjunto A satisface las siguientes tres condiciones:*

i) $int(A) \neq \phi$.

ii) *Para cada $x \in A$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un intervalo cerrado $[c, d] \subset I$, con $c < d$, tal que $[c, d] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y $[c, d] \subset A$. Observa que esta condición implica que todo punto de A es punto de acumulación de A (y con ello, A es un conjunto perfecto).*

iii) $f(A) = A$.

Demostración: i) Es inmediata, ya que $int(B) \neq \phi$.

ii) Observemos primero que f cumple la siguiente condición: Si C es cualquier subintervalo de I con la propiedad de que $int(C) \neq \phi$, entonces $int(f(C)) \neq \phi$ también.

Ahora, sean $x \in A$ y $\varepsilon > 0$. Existe $y \in \cup_{n=1}^{\infty} f^n (A_{j_1})$ tal que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in f^{n_1}(A_{j_1})$. Por tanto,

$$f^{n_1}(A_{j_1}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \phi.$$

Como $f^{n_1}(A_{j_1})$ es un intervalo cerrado con interior distinto del vacío, existen u y $\eta > 0$ tales que

$$\begin{aligned} (u - \eta, u + \eta) &\subset f^{n_1}(A_{j_1}) \text{ y} \\ (u - \eta, u + \eta) &\subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon). \end{aligned}$$

Tomando $[c, d] = \left[u - \frac{\eta}{2}, u + \frac{\eta}{2}\right]$ la demostración de ii) está completa.

Conviene aquí hacer la siguiente observación: Como $[c, d] \subset f^{n_1}(A_{j_1})$, entonces existe un subintervalo de A_{j_1} con interior distinto del vacío, $[s, t] \subset A_{j_1}$, tal que $f^{n_1}([s, t]) = [c, d]$.

iii) Sea $y \in f(A)$ y sea $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Sea $\{b_i\}$ una sucesión que cumple lo siguiente: $\{b_i\} \subset B$ y $\lim_{i \to \infty} b_i = x$. Como f es continua se sigue que la sucesión $\{f(b_i)\}$ converge a $f(x) = y$. Y como $f(B) = B$, concluimos que $\{f(b_i)\} \subset B$, y con ello $y \in \overline{B} = A$. Por tanto $f(A) \subset A$.

Dado que $B = f(B) \subset f(A)$, y que $f(A)$ es un conjunto cerrado, entonces $A = \overline{B} \subset f(A)$. $\square$

Proposición 20. *El conjunto de los puntos periódicos de* $f\mid_A : A \to A$ *forma un conjunto denso en* A.

Demostración: Sea $(a,b) \subset I$ tal que $(a,b) \cap A \neq \phi$. Es suficiente demostrar que la intersección $Per\,(f\mid_A) \cap ((a,b) \cap A)$ es distinta del vacío.

Gracias a la parte ii) del lema 19, existen dos subintervalos cerrados con interior distinto del vacío, $[c,d]$ y $[s,t]$, y un número natural n_1 tales que

a) $[s,t] \subset A_{j_1}$,

b) $[c,d] \subset ((a,b) \cap A)$, y

c) $f^{n_1}([s,t]) = [c,d]$.

Por otro lado, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $l\,(f^{n_2}([c,d])) > \delta$. Por tanto $f^{n_2}([c,d])$ contiene a algún A_{j_k}.

La flecha $A_{j_k} \to A_{j_1}$ nos proporciona un tercer número natural, n_3, con la propiedad de que $A_{j_1} \subset f^{n_3}(A_{j_k})$.

En suma, $[c,d] \subset f^n([c,d])$ donde $n = n_1 + n_2 + n_3$. y con ello concluimos que existe $y \in [c,d]$ tal que $f^n(y) = y$. Es inmediato que $y \in Per\,(f\mid_A) \cap ((a,b) \cap A)$. □

Obsérvese que la proposición anterior implica que para cada f en nuestra familia el conjunto $Per\,(f)$ tiene cardinalidad infinita. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto de puntos periódicos de período n es finito. Por tanto, existen puntos periódicos de f de período arbitrariamente grande.

Proposición 21. *La función* $f\mid_A : A \to A$ *es transitiva en* A.

Demostración: Sean $E = (a,b)$ y $C = (\alpha,\beta)$ dos subintervalos de I. Supongamos que las intersecciones $E \cap A$ y $C \cap A$ ambas son distintas del vacío. Por el lema 19, existen dos subintervalos cerrados con interior distinto del vacío, $[c,d]$ y $[s,t]$, y un número natural n_1 tales que

a) $[s,t] \subset A_{j_1}$,

b) $[c,d] \subset (C \cap A)$, y

c) $f^{n_1}([s,t]) = [c,d]$.

Sea D un subintervalo de $E \cap A$ con interior distinto del vacío. Sean $n_2 \in \mathbb{N}$ y A_{j_k} tales que $A_{j_k} \subset f^{n_2}(D)$. Y sea n_3, otro número natural, con la propiedad de que $A_{j_1} \subset f^{n_3}(A_{j_k})$.

Es inmediato que $f^{n_1+n_2+n_3}(D) \cap (C \cap A)$ es distinto del vacío. Como $D \subset E \cap A$, la demostración está completa. □

Una observación (y una nueva invitación a la estimada lectora): El conjunto A es, en realidad, una unión finita de intervalos cerrados.

Otra observación: Para los que conocen el concepto de sistema dinámico discreto *caótico* según la definición propuesta por R. L. Devaney (ver [Dev] página 50) es conveniente hacer aquí un pequeño alto en el camino. La función $f|_A : A \to A$ es transitiva en A y su conjunto de puntos periódicos forma una conjunto denso en A. Es sabido que estas dos condiciones implican, cuando trabajamos en conjuntos perfectos (ver [Ban]), que $f|_A$ tiene *sensibilidad a las condiciones iniciales* en A (esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $x \in A$ y para toda bola abierta con centro en x, digamos $B_\eta(x)$, $\eta > 0$, existen $y \in B_\eta(x) \cap A$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $|f^m(x) - f^m(y)| > \varepsilon$). Estas tres condiciones (transitividad, densidad de puntos periódicos y sensibilidad) nos dicen que $f|_A : A \to A$ induce un sistema dinámico *caótico* en A.

Algunos lectores tal vez sospechen que es posible demostrar que $f|_A : A \to A$ es sensible a las condiciones iniciales en A sin recurrir al argumento *externo* que mencionamos antes: *transitividad y densidad de puntos periódicos implican sensibilidad.* Y estos lectores tienen razón. Para ellos es la siguiente invitación: Demuestren por favor que si $f \in \mathcal{L}$, entonces

i) $f|_A : A \to A$ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en A.

ii) f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en I.

Una vez cubierta la invitación, la demostración de la siguiente proposición está completa.

Proposición 22. *La función $f|_A : A \to A$ es caótica en A.* □

El siguiente resultado resume nuestros avances en la búsqueda de órbitas aperiódicas para elementos de nuestra familia a través de la búsqueda de lugares donde se presente transitividad. Su demostración es inmediata a partir de lo realizado hasta aquí.

Proposición 23. *Dada $f \in \mathcal{L}$, existe un conjunto A con interior distinto del vacío y existe un subconjunto de A denso en A, llamémosle J, tal que para todo $x \in J$ se tiene que $\omega(x, f) = A$. Con ello la cardinalidad del $\omega(x, f)$ es infinita no numerable.*

Demostración: De los teoremas 11 y 12, y de la proposición 21, se sigue la afirmación contenida en esta proposición. □

Para finalizar discutiremos un poco sobre los siguientes dos conjuntos: El conjunto de todos los puntos en I cuya órbita es aperiódica,

Γ, y el conjunto de todos los puntos cuya órbita es asintóticamente periódica, Ψ. Es decir,

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{x \in I \,|\text{la cardinalidad de } \omega(x,f) \text{ es infinita}\} \\ \Psi &= I \setminus \Gamma = \{x \in I \,|\text{la cardinalidad de } \omega(x,f) \text{ es finita}\}.\end{aligned}$$

Ya demostramos, en la proposición 8, que Γ es denso en I. La siguiente proposición contiene otra argumentación de este mismo hecho además de información extra sobre el conjunto Ψ.

Proposición 24. *Los conjuntos Γ y Ψ son ambos conjuntos densos en I.*

Demostración: Sean $x \in I$ y $\varepsilon > 0$. Iniciemos modificando ligeramente la partición que definimos al inicio de esta sección. Además de la condición que ya cumple, $\|Q\| < \frac{\delta}{2}$, le pediremos que también cumpla lo siguiente: La norma de Q es tal que existe un subintervalo A_i que está totalmente contenido en $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [0,1]$. Para este vértice A_i encontramos los vértices A_j y $A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_g}$ como hicimos antes.

Gracias a las flechas $A_i \to A_j$ y $A_j \to A_{j_1}$ y a la definición del conjunto A, existe un número natural m tal que el conjunto $f^m(A_i) \cap A$ tiene interior distinto del vacío. Por tal razón existen $a \in I$ y $b \in I$ tales que $|x-a| < \varepsilon$, $|x-b| < \varepsilon$, $f^m(a) \in Per(f|_A)$ y $f^m(b) = c$ donde c es un punto aperiódico bajo f. Esto implica que $\omega(a,f)$ tiene cardinalidad finita y $\omega(b,f)$ tiene cardinalidad infinita. $\square$

Una posible redacción más simple de lo que hemos demostrado es la siguiente: Lector(a) toma un lápiz; dibuja una línea quebrada en el cuadradito $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Comenzando en el punto $(0,a)$, manteniendo el trazo de izquierda a derecha y terminando en el punto $(1,b)$, $0 \leq a, b \leq 1$. Cuida de que en cada segmento de recta la pendiente sea mayor que uno o menor que menos uno. Al final obtendrás la gráfica de una función definida del $[0,1]$ en el $[0,1]$ con las siguientes propiedades: los puntos que tienen órbita aperiódica forman un conjunto denso en $[0,1]$; los puntos cuya órbita es asintóticamente periódica también forman un conjunto denso en $[0,1]$; y existe un subconjunto cerrado, invariante, con interior distinto del vacío, donde la función presenta *caos* desde el punto de vista de R. L. Devaney.

Agradecimientos. Estas notas nacieron a partir de una conferencia que el autor ofreció en el marco del XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (Guadalajara, 1999). Todas las gráficas fueron realizadas por Héctor Miguel Cejudo Camacho del Laboratorio de Visualización Matemática (Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM). Pilar Valencia Saravia leyó una versión preliminar y sus comentarios ayudaron a mejorar esta versión final. El profesor Jefferson King sugirió el acertado (cree el autor) título de *LAS QUEBRADITAS*.

Referencias

[Ban] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, Amer. Math. Monthly, 1992, 332-334.

[Blo] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension,* Lecture Notes in Math. **1523**, Springer Verlag, 1991.

[Dev] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Addison Wesley, 1989.

[Roy] H. L. Royden, *Real Analysis.* Segunda edición. Macmillan Company, 1968.

[Sma] S. Smale, *Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965, 63-80.