Miscelánea Matemática **67** (2018) 119-132 SMM

Programación lineal finita e infinita: Problemas del transporte

Miríam G. Báez Hernández,
Eloisa Benitez-Mariño
y
José Rigoberto Gabriel Argüelles
Facultad de Matematicas Universidad Veracruzana
jgabriel@uv.mx

Resumen

En este artículo panorámico, se presenta el problema del transporte el cual se puede estudiar como un problema de programación lineal en $\mathbb{R}^n$. También se muestra el problema de transferencia de masas de Monge-Kantorovich, el cual se puede formular como un problema de programación lineal en dimensión infinita y resulta que la discretización de este problema es precisamente el problema del transporte. Lo mismo ocurre con el problema de transbordo de Kantorovich-Rubinstein y su versión en $\mathbb{R}^n$ y el problema de flujo en redes.

1. El Problema del Transporte

En algún momento de la historia de la humanidad aparece el núcleo familiar. Las familias se unen en comunidades y estas se rigen bajo algún sistema de gobierno. Dentro de estos sistemas se llevan a efecto varias actividades, la caza, la pesca, la agricultura, entre otras. En algún momento dos o más comunidades entran en contacto y se origina el comercio, el cual en un principio se da mediante el trueque (intercambio) y después se utiliza el dinero (monedas) para las operaciones de compra y venta.

Lo anterior genera de manera natural el transporte de individuos y/o mercancía, lo cual produce un costo. A continuación se presenta un ejemplo de problemas de transporte.

Supongamos que una compañía elabora un producto en sus plantas de producción. Una cierta cantidad del producto debe ser trasladado a los centros de venta. El costo del transporte es variado y depende del lugar de la planta y del destino. También, se deben satisfacer los requerimientos de producción y de demanda. Lo anterior se debe hacer al mínimo costo. Para poder encontrar un modelo matemático para este problema del transporte, necesitamos la siguiente notación:

- Sea r el número de plantas de producción (fuente) de la compañía.
- s es el número de centros de venta (destino) del producto.
- x_{ij} para $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$ es la cantidad de producto que será transportado de la fuente i al destino j.
- c_{ij} para $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$ es el costo unitario del transporte del producto de la fuente i al destino j.
- a_i para $1 \leq i \leq r$ es la cantidad de producto que se produce (oferta) en la fuente i.
- b_j para $1 \leq j \leq s$ es la cantidad de producto que se requiere (demanda) en el destino j.

La figura 1 ilustra las variables y los parámetros de este problema. Para transportar x_{ij} unidades del producto de la fuente i al destino j, se requiere un costo $c_{ij}x_{ij}$.

	Destino 1	Destino 2	...	Destino s	Oferta
Fuente 1	x_{11} / c_{11}	x_{12} / c_{12}	...	x_{1s} / c_{1s}	a_1
Fuente 2	x_{21} / c_{21}	x_{22} / c_{22}	...	x_{2s} / c_{2s}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Fuente r	x_{r1} / c_{r1}	x_{r2} / c_{r2}	...	x_{rs} / c_{rs}	a_s
Demanda	b_1	b_2	...	b_s	

Figura 1. Un problema del transporte.

La función de costo de este problema se construye sumando todos los costos de transporte de la fuente i al destino j ($c_{ij}x_{ij}$). Por lo tanto, el costo total es

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}x_{ij}. \tag{1}$$

Si suponemos que la demanda total es igual a la oferta total, entonces sumando por filas en la figura 1, se debe cumplir las siguientes relaciones

$$\sum_{j=1}^{s} x_{ij} = a_i, \quad \forall i = 1, 2, 3, \ldots, r. \tag{2}$$

Si sumamos por columnas en la figura 1, obtenemos las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{r} x_{ij} = b_j, \quad \forall j = 1, 2, 3, \ldots, s. \tag{3}$$

Usando (1),(2) y (3) obtenemos la formulación matemática del Problema de transporte

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} x_{ij}, \tag{4}$$

$$\text{sujeto a: } \sum_{j=1}^{s} x_{ij} = a_i, \quad \forall i \ \text{ con } \ 1 \leq i \leq r, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{r} x_{ij} = b_j, \quad \forall j \ \text{ con } \ 1 \leq j \leq s,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \ \text{ con } \ 1 \leq i \leq r, \ \forall j \ \text{ con } \ 1 \leq j \leq s. \tag{6}$$

Utilizando matrices apropiadas el problema de transporte puede ser planteado en forma matricial de la siguiente forma

$$\text{Minimizar } \langle X, C \rangle, \tag{7}$$

$$\text{sujeto a: } AX = B \ \text{ y } \ X \geq 0. \tag{8}$$

donde X, A, C, B son ciertas matrices y

$$\langle X, C \rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} x_{ij}.$$

Para mayor información sobre el problema del transporte se puede ver [2]. Otro problema de optimización que tiene varias aplicaciones es el Problema de Flujo en Redes o también llamado Problema de Transbordo (Transshipment problem) véase [3], el cual consiste en transportar artículos de una fuente A a un destino B, pasando por los nodos intermedios, véase la figura 2.

Una versión del Problema de Flujo en Redes con costo mínimo (véase [2]) es el siguiente:

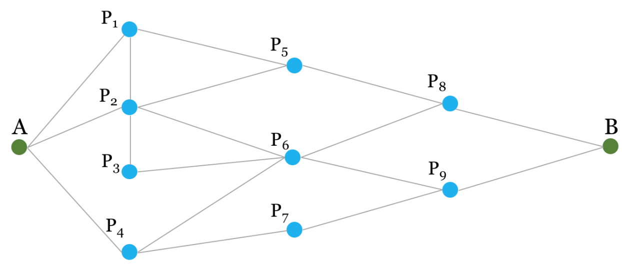

Figura 2. Una red de flujo.

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} c_{ij}\lambda_{ij}, \tag{9}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{r}\lambda_{kj} - \sum_{i=1}^{r}\lambda_{ik} = d_k, \tag{10}$$

$$\forall k = 1, 2, \ldots, r, \;\; \forall i, j = 1, 2, \ldots, r.$$

con $d_k = a_k - b_k$, donde a_k es el flujo total que llega al nodo P_k y b_k es el flujo total que sale del nodo P_k.

2. Programas Lineales en $\mathbb{R}^n$

En matemáticas uno de los temas que contempla varias aplicaciones es la programación lineal (finita). Para definir un programa lineal se requiere una matriz A, con coeficientes reales, con m filas y n columnas. Además de dos vectores fijos c en $\mathbb{R}^n$ y b en $\mathbb{R}^m$. Con esto, el problema primal se define como

$$\text{PF} \quad \text{Minimizar } \langle x, c\rangle, \tag{11}$$

$$\text{sujeto a } Ax = b, \quad x \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

donde $\langle x, c\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k c_k$ y $x \geq 0$ significa que todas las componentes del vector x son no negativas.

El problema primal tiene asociado otro problema el cual se llama programa dual y se define de la siguiente manera

$$\text{PF}^* \quad \text{Maximizar } \langle b, w\rangle, \tag{13}$$

$$\text{sujeto a } A^*w \leq b, \quad w \in \mathbb{R}^m, \tag{14}$$

donde A^* es la matriz autoadjunta de A, y al ser A una matriz con coeficientes reales entonces A^* es la matriz simétrica de A.

Algunas definiciones básicas que se requieren son las siguientes: un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución factible para el problema PF si satisface las restricciones (12) además se dice que el programa es consistente si tiene al menos una solución factible.

Si el problema PF es consistente, entonces su valor óptimo se define como

$$\inf \{\langle x, c\rangle | x \text{ es factible para PF}\}.$$

El programa PF es soluble si existe una solución factible x^* donde se alcanza su valor óptimo, en este caso a x^* se le llama solución óptima para el programa PF, y el valor óptimo se denota por min(PF).

Un vector $w \in \mathbb{R}^m$ es una solución factible para el programa PF* si satisface las restricciones (14) y PF* es consistente si tiene una solución factible. El valor PF* se define como

$$\sup(\text{PF}^*) := \sup\{\langle b, w\rangle | w \text{ es factible para PF}^*\}.$$

Si w^* es una solución factible de PF* que alcanza el valor óptimo, entonces se dice que PF* es soluble, y el valor sup(PF*) se escribe como máx(PF*).

Un resultado clásico que asocia a los problemas primal y dual es el siguiente:

Teorema 2.1. Dualidad Fuerte *Si el problema primal y el dual son consistentes entonces sus valores óptimos se alcanzan, más aún*

$$\min(\text{PF}) = \max(\text{PF}^*). \tag{15}$$

En la segunda guerra mundial, un problema al que se enfrentaron los aliados era la distribución de armamento y comida en los diferentes frentes de batalla, este problema fue planteado como un problema de programación lineal llamado el problema del transporte. George Dantzing, que en algún momento perteneció al ejercito, trabajó en este problema. Cabe aclarar que la palabra *programación* no proviene del área de la informática, mas bien su origen se debe a un programa militar. En 1947 George Dantzing creó un algoritmo para resolver programas lineales en $\mathbb{R}^n$ el cual llamó método Simplex desde entonces se ha convertido en un método muy usado para resolver programas lineales, debido a la sencillez para llevarlo a la práctica, además de que proporciona una solución al problema. El método simplex es aplicable cuando el número de variables no es muy grande. Sin embargo, en las últimas décadas gracias a los avances en los equipos de computo, se han desarrollado métodos alternativos para resolver estos tipos de problemas, por ejemplo, los algoritmos de punto interior.

Existe una gran variedad de problemas que se pueden modelar mediante la programación lineal finita, entre ellos están: el Problema de

Transporte, el Problema de Flujo en Redes, el Problema de Asignación, Juegos Matriciales, Problemas de Control de Markov con Horizonte Finito. Para una revisión más extensa sobre el tema véase [2] y [3].

3. Programación Lineal Infinita

Extender la teoría de programación lineal a un escenario más general requiere de conocimientos matemáticos en Análisis Funcional y en Espacios Vectoriales Topológicos. De los primeros ejemplos de un problema de programación lineal en un escenario diferente de $\mathbb{R}^n$ planteado por Dantzing y Wald en 1951, véase [4]. En 1957, Bellman examinó un problema lineal de control óptimo originado en un modelo de sistemas de producción. El problema de control fue planteado como un programa lineal en un espacio de funciones de una variable a tiempo continuo. Estos tipos de problemas dieron lugar a programas lineales planteados en espacios vectoriales abstractos, véase [1].

La diferencia esencial entre la programación lineal finita y la programación lineal infinita consiste en lo siguiente: en la primera el conjunto de soluciones factibles, tanto del problema primal, como del dual son un subconjunto en $\mathbb{R}^n$, mientras que en la segunda el conjunto de soluciones factibles, tanto del problema primal como el dual están en espacios de dimensión infinita, lo cual requiere conocer conceptos matemáticos más abstractos.

Para plantear un problema de programación lineal infinita se requieren de algunos conceptos de topología y análisis funcional. Un espacio vectorial topológico es un conjunto con dos estructuras compatibles; una de ellas algebraica y la otra topológica. El que las dos estructuras sean compatibles, quiere decir, que las operaciones de suma vectorial y multiplicación de un escalar por un vector son continuas en los respectivos espacios y con las topologías involucradas.

Para poder generalizar la programación lineal de $\mathbb{R}^n$, es necesario contar con un concepto similar al de producto interno, este concepto es el de forma bilineal, el cual nos lleva de manera natural a definir las parejas duales de espacios vectoriales.

Definición 3.1. Sean X, Y espacios vectoriales sobre el campo de los números reales, una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $X \times Y$ es una función con valores reales que satisface:

(i): El mapeo $x \mapsto \langle x, y \rangle$ es lineal en X para cada $y \in Y$,
(ii): El mapeo $y \mapsto \langle x, y \rangle$ es lineal en Y para cada $x \in X$.

Definición 3.2. La pareja (X, Y) con forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una pareja dual si satisface:

- Para cada $x \neq 0$ en X, existe algún $y \in Y$ con $\langle x, y\rangle \neq 0$,
- Para cada $y \neq 0$ en Y, existe algún $x \in X$ con $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Al tener una pareja dual (X, Y) se puede dotar de una topología tanto como a X como a Y, hay varias maneras de generar esa topología. Una de ellas es mediante el concepto de seminorma. En algunos otros casos, esta topología también puede ser generada de manera directa con vecindades.

Definición 3.3. Sea (X, Y) una pareja dual, para cada $y \in Y$ se define una seminorma p_y de la siguiente manera

$$p_y(x) := |\langle x, y\rangle| \quad \forall x \in X.$$

La topología débil sobre X es la topología que tiene menos abiertos tal que hace continuas todas estas seminormas y se denota por $\sigma(X, Y)$.

Para una revisión de los conceptos anteriores, véase [13].

Sea (X, Y) una pareja dual, se definen las siguientes funcionales lineales en X,

$$f_y(x) := \langle x, y\rangle \text{ para un } y \text{ fijo en } Y.$$

Cada y en Y genera una funcional lineal, a través de la forma bilineal. Por lo tanto, se pueden identificar a Y como un subconjunto del dual algebraico de X. Se puede probar que Y es el dual topológico de X bajo la topología $\sigma(X, Y)$, más aún, la topología débil es la topología que tiene menos abiertos en X bajo la cual todas las funcionales lineales en Y son continuas. Análogamente se puede por la simetría entre X y Y continuar $\sigma(Y, X)$ en Y.

Por otra parte, se observa que el programa dual en programación lineal finita tiene asociado una desigualdad (14). Nuestro siguiente objetivo es generar un «orden» en un espacio abstracto para poder tener desigualdades. Para lo anterior, se requiere el concepto de cono con punta.

Definición 3.4. Un conjunto $\mathcal{P}$ en un espacio vectorial X, se dice que es un cono con punta si satisface lo siguiente:

(a) 0 está en $\mathcal{P}$,
(b) $x_1 + x_2$ está en $\mathcal{P}$ para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ y
(c) $\lambda x \in \mathcal{P}$ para todo $x \in \mathcal{P}$ y $\lambda \geq 0$.

Observación 3.1. *Ejemplos de conos con punta son los siguientes:*

(a) En $\mathbb{R}$ un cono con punta son los números reales no negativos.
(b) En $\mathbb{R}^n$ un cono con punta es

$$\mathcal{P} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k \geq 0, \forall k \text{ con } 1 \leq k \leq n\}.$$

(c) Sea X un espacio métrico y $C(X)$ el conjunto de las funciones continuas en X. Un cono con punta en este espacio es el conjunto

$$\mathcal{P} = \{f \in C(X) \mid f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X\}.$$

Observación 3.2. *Ejemplos de conos sin punta son los siguientes:*

(a) En $\mathbb{R}^2$ es

$$\mathcal{Q} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a > 0, b > 0\}.$$

(b) Sea X un espacio métrico y $C(X)$ el conjunto de las funciones continuas en X. Un cono sin punta en este espacio es el conjunto

$$\mathcal{Q} = \{f \in C(X) \mid f(x) > 0 \quad \forall x \in X\}.$$

Si $\mathcal{P}$ es un cono con punta en X, entonces para x_1, x_2 en X se define la siguiente desigualdad

$$x_1 \leq x_2 \text{ si solo si } x_2 - x_1 \in \mathcal{P}.$$

Sea (X, Y) un par dual y $\mathcal{P}$ un cono en X. El cono dual de $\mathcal{P}$ en Y se define como

$$\mathcal{P}^* = \{y \in Y | \langle x, y\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{P}\}.$$

Observación 3.3. *El cono dual $\mathcal{P}^*$, es un cono con punta*

Ahora podemos generalizar la programación lineal de $\mathbb{R}^n$ a espacios de dimensión infinita, para ello sean (X, Y) y (Z, W) parejas duales de espacios vectoriales. Se supondrá que los espacios X y Y están dotados con las topologías débiles $\sigma(X, Y)$ y $\sigma(Y, X)$, respectivamente, y análogamente para Z y W. Sean X_+, Z_+ conos en X, Z, respectivamente; Y_+, W_+ los conos duales de X_+ y Z_+. Sea $A : X \to Z$ un operador lineal, $(\sigma(X, Y) - \sigma(Z, W))-$continuo, con adjunto $A' : W \to Y$, el cual está definido por la relación

$$\langle Ax, w\rangle_2 = \langle x, A'w\rangle_1, \ \forall x \in X, w \in W,$$

donde $\langle\, ,\, \rangle_1 : X \times Y \to \mathbb{R}$ y $\langle\, ,\, \rangle_2 : Z \times W \to \mathbb{R}$.

El respectivo programa lineal con restricciones de igualdad, está dado por:

$$\text{PI}: \ \text{Minimizar} \quad \langle x, c\rangle, \tag{16}$$

$$\text{sujeto a:} \quad Ax = b, \ x \in X_+. \tag{17}$$

El problema dual es:

$$\text{PI}^*: \ \text{Maximizar} \quad \langle b, w\rangle, \tag{18}$$

$$\text{sujeto a:} \quad -A'w + c \in Y_+, \ w \in W. \tag{19}$$

De manera análoga como en el caso finito se dice que un vector $x \in X$ es una solución factible para el programa PI si satisface las restricciones del programa (17), además se dice que el programa es consistente si tiene al menos una solución factible.

Si el problema PI es consistente, entonces su valor óptimo se define como

$$\text{ínf}(\text{PI}) := \text{ínf}\left\{\langle x, c\rangle | x \ \text{ es factible para PI}\right\}.$$

El programa PI es soluble si existe una solución factible x^* en la que alcanza su valor óptimo. En este caso, x^* es la solución óptima para el programa PI, y el valor óptimo se denota como min(PI).

Un vector $w \in W$ es una solución factible para el programa PI* si satisface las restricciones del programa y PI* es consistente si tiene una solución factible. El valor PI* se define como

$$\sup(\text{PI}^*) := \sup\{\langle b, w\rangle | w \text{ es factible para PI}^*\}.$$

Si w^* es una solución factible de PI* que alcanza su valor óptimo, entonces PI* es soluble, y el valor sup(PI) se escribe como máx(PI*)

En programación lineal finita se tiene el resultado de la dualidad fuerte, la cual afirma que bajo el supuesto de consistencia los valores óptimos de ambos programas son iguales. Sin embargo, en programación lineal infinita no se tiene este resultado. Aquí se cuenta con una relación entre los valores óptimos la cual se llama dualidad débil.

Cuando los valores óptimos del programa primal y dual son iguales a estos se le llama la condición de no abertura de dualidad.

Teorema 3.1. ***Dualidad débil*** *Si los programas primal y dual son consistentes, entonces*

$$\text{ínf}(\text{PI}) \geq \sup(\text{PI}^*),$$

además ambos valores son finitos.

Los problemas de programación lineal infinita han sido estudiados desde varios enfoques y perspectivas. Sin embargo, al ser problemas de optimización, una propuesta de esquema para su estudio es la siguiente:

1. Probar que los problemas primal y dual son consistentes.
2. Mostrar que los problemas primal y dual son solubles.
3. Demostrar que no existe abertura de dualidad.
4. Buscar soluciones exactas tanto para el problema primal como para el dual.
5. Encontrar esquemas de aproximación para la solución de los problemas primal y dual.
6. Desarrollar e implementar algoritmos para encontrar aproximaciones numéricas de las soluciones.
7. Estudiar fenómenos (naturales, sociales, económicos, etc.) que sean modelados mediante la programación lineal infinita.

Algunos problemas matemáticos que han sido modelados mediante la programación lineal infinita son: el Problema de Transferencia de Masas de Monge-Kantorovich y el Problema de Transbordo de Masas de Kantorovich-Rubinstein, véase [1], [9],[11] ; Problemas de Control de Markov, véase [10]; el Problema de Capacidad General, véase [12]; Programación Semi-infinita y Problemas de Flujo Continuo, véase [1], entre otros. Existe una literatura amplia sobre estos problemas, donde se han abordado varios de los temas del esquema anterior. Sin embargo, existen problemas abiertos en este tema, por ejemplo, dar condiciones generales para la consistencia, la solubilidad y la no abertura de dualidad de un problema de programación lineal infinita. No existe el equivalente a un método simplex para el caso de dimensión infinita, más aún son muy pocos los esquemas generales de aproximación para un problema de este tipo, en realidad existen esquemas particulares para algunos problemas específicos. También se requiere mejorar los algoritmos numéricos de aproximación a las soluciones de los problemas de programación lineal infinita. Existe una gran área de oportunidad para estudiar aplicaciones de estos problemas en diferentes ramas tanto de las matemáticas como de la ciencia en general.

4. Problemas de Transporte Continuos

Dos problemas que han sido estudiados desde el enfoque de la programación lineal infinita, son el Problema de Transferencia de Masas de Monge-Kantorovich y el Problema de Transbordo de Masas de Kantorovich-Rubinstein. Su formulación matemática es la siguiente:

Sean X, Y espacios métricos compactos, con sus σ-álgebras de Borel $\mathbb{B}(X)$ y $\mathbb{B}(Y)$ respectivamente, se considera además una función Borel medible $c : X\times Y \to \mathbb{R}$. También se toman dos medidas de probabilidad ν_1 en $\mathbb{B}(X)$ y ν_2 y en $\mathbb{B}(Y)$. Si μ es una medida con signa finita, las marginales de esta medida μ se denotan por $\Pi_1\mu$ y $\Pi_2\mu$, se definen como

$$\begin{aligned}\Pi_1\mu(B) :=&\mu(B \times Y)\,\forall\, B \in \mathbb{B}(X) \qquad\qquad \text{y}\\ \Pi_2\mu(B) :=&\mu(X \times B)\,\forall\, B \in \mathbb{B}(X).\end{aligned}$$

Con lo anterior, el Problema de Transferencia de Masas está definido por

$$\text{MT}: \text{ Minimizar } \quad \langle \mu, c\rangle := \int_{X\times Y} c d\mu, \tag{20}$$

$$\text{sujeto a:} \quad A\mu = (\nu_1, \nu_2), \quad \mu \geq 0, \tag{21}$$

donde $A\mu := (\Pi_1\mu, \Pi_2\mu)$.

El respectivo problema dual es

$$\begin{aligned} \text{MT}^*: \quad & \text{Maximizar} \quad \langle(\nu_1, \nu_2), (f, g)\rangle := \int_X f d\nu_1 + \int_Y g d\nu_2 && (22) \\ & \text{sujeto a:} \quad A^*(f, g) \leq c, && (23) \end{aligned}$$

donde $A^*(f, g)(x, y) := f(x) + g(y)$ y $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$.

En el caso en que $X = Y$, el Problema de Transbordo de Masas KR se define como

$$\begin{aligned} \text{KR}: \quad & \text{Minimizar} \quad \langle\mu, c\rangle := \int_{X\times X} c d\mu, && (24) \\ & \text{sujeto a:} \quad A\mu = \nu_1 - \nu_2, \quad \mu \geq 0, && (25) \end{aligned}$$

donde $A\mu := \Pi_1\mu - \Pi_2\mu$.

Su respectivo problema dual,

$$\begin{aligned} \text{KR}^*: \quad & \text{Maximizar} \quad \langle(\nu_1 - \nu_2), f\rangle := \int_X f d(\nu_1 - \nu_2), && (26) \\ & \text{sujeto a:} \quad A^* f(x, y) \leq c(x, y), && (27) \end{aligned}$$

donde $A^* f(x, y) := f(x) - f(y)$, $f : X \to \mathbb{R}$.

Si las medidas de probabilidad ν_1 y ν_2 tienen soporte en un conjunto finito, entonces se puede probar que el problema de transferencia de masas, en este caso, es el siguiente problema del transporte:

$$\begin{aligned} \text{TP}: \quad & \text{Minimizar} \quad \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} c_{kj}\lambda_{kj}, && (28) \\ & \text{sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{t} \lambda_{kj} = \nu_1(\{x_k\}) := a_k, \quad 1 \leq k \leq s, && (29) \\ & \sum_{k=1}^{s} \lambda_{kj} = \nu_2(\{y_j\}) := b_j, \quad 1 \leq j \leq t, && (30) \\ & \lambda_{kj} \geq 0, \quad \forall 1 \leq k \leq s, \quad 1 \leq j \leq t. && (31) \end{aligned}$$

Donde $\{x_1, x_2, \ldots x_s\}$ y $\{y_1, y_2, \ldots y_t\}$ son los soportes de ν_1 y ν_2 respectivamente.

En el caso del Problema de Transbordo de Masas de Kantorovich-Rubinstein lo que se obtiene es el siguiente problema de flujo en redes.

$$\text{NF}: \quad \text{Minimizar} \quad \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\lambda_{kj}c_{kj}, \tag{32}$$

$$\text{sujeto a:} \quad \sum_{k=1}^{M}\lambda_{ki} - \sum_{j=1}^{M}\lambda_{ij} = d_i, \quad \forall 1 \leq i \leq M \tag{33}$$

$$\text{con} \quad 0 \leq \lambda_{kj}, \text{ para todo } \quad k, j = 1, \ldots, M, \tag{34}$$

Donde $\{x_1, x_2, \ldots x_M\}$ y $\{y_1, y_2, \ldots y_M\}$ son los soportes de ν_1 y ν_2 respectivamente y

$$a_k := \nu_1(\{x_k\}), \quad \text{y} \quad b_k := \nu_2(\{y_j\}) \quad \text{y} \quad d_k := a_k - b_k \quad \forall 1 \leq k \leq M.$$

Una de las aplicaciones que tienen los problemas MT y KR en los procesos estocásticos, consiste en que se pueden definir dos métricas en el espacio de medidas de probabilidad, a continuación se definen dichas métricas.

Sea $\mathbb{P}(X)$ el espacio de medidas de probabilidad sobre $\mathbb{B}(X)$. Si ν_1, ν_2 están en $\mathbb{P}(X)$ se define:

La métrica de Kantorovich para ν_1, ν_2 como

$$d_1(\nu_1, \nu_2) := \text{mín}\left\{\int_{X\times X} c d\mu \,\middle|\, \Pi_1\mu = \nu_1,\, \Pi_2\mu = \nu_2 \text{ y } \mu \geq 0\right\},$$

y la métrica de Fortet-Mourier para ν_1, ν_2 como:

$$d_2(\nu_1, \nu_2) := \text{máx}\left\{\int_X f d\nu_1 - \int_X f d\nu_2 \,|f(x) - f(y) \leq c(x, y), \forall x, y \in X\right\}$$

La métrica de Kantorovich y la métrica de Fortet-Mourier han sido usadas en diferentes áreas de la matemática, como teoría de la medida, teoría ergódica, análisis funcional, estadística, procesos estocásticos y otros. Además, han sido aplicadas en: el registro de imágenes [6], para analizar la estabilidad cuantitativa de modelos de dos etapas [8], en métricas probabilisticas [11], en control de radioterapia de cáncer [7], teoremas límites [5] y ecuaciones de recursividad estocástica [12], entre otros el registro de imágenes [6].

Para finalizar este artículo, se dará una breve reseña sobre la historia de los problemas antes mencionados. El matemático francés Gaspard Monge nació el 9 de mayo de 1746 en Beaune, Francia. Él estudió en la Escuela de Ingenieros Militares Mézières. En 1781 Monge plantea un problema matemático que modela la construcción de un camino entre dos lugares. El planteamiento fue el siguiente: se quiere construir un camino recto entre el punto A y el punto B, se encuentra que habrá un excedente de tierra sobre el camino, lo cual formará montículos de tierra y también existirán huecos sobre el camino, los cuales habrá que rellenar. Por lo tanto, se tendrá que trasladar la tierra de los montículos a los hoyos. Monge se imaginó que para hacer esta transferencia de masas, se debería dividir el montículo de tierra en pequeños granitos y encontrar una función que nos diera la posición del granito de tierra en los hoyos, más aún, el propuso que la transferencia de masas debía ser al mínimo costo, que en este caso es recorrer la distancia más pequeña entre la posición inicial del granito y su posición final, a esto se le conoce como un acoplamiento óptimo o el problema de Monge.

El 19 de enero de 1912 nació en San Petersburgo el matemático ruso Leonid Kantorovich, quien en 1942 planteó el problema de translocación de masas, el cual consiste en minimizar el trabajo cuando se mueve una distribución de masa inicial a una distribución de masa final. Para este problema Kantorovich trabajó en espacios métricos compactos, conjuntos de Borel y una función de costo continua no negativa. En 1948, Kantorovich se da cuenta que si la función de costo es la distancia del espacio métrico entonces el problema de translocación de masas es una generalización del problema de Monge, desde esta fecha a este problema se le ha llamado el Problema de Transferencia de Masas de Monge-Kantorovich. Entre 1957 y 1958, L.V. Kantorovich y G.S. Rubinstein estudian un problema similar al problema de transferencia de masas, con un ligero cambio en las restricciones. Ellos prueban que si la función de costo es la distancia, entonces ambos problemas son equivalentes y por lo tanto se pueden utilizar ambos problemas para definir métricas probabilísticas (métrica de Kantorovich, métrica de Fortet-Mourier).

Bibliografía

[1] E. Anderson y P. Nash, *Linear programming in infinite-dimensional spaces: theory and applications*, Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization, Wiley, 1987.

[2] M. Bazaraa, J. Jarvis y H. Sherali, *Linear programming and network flows*, Wiley, 2011.

[3] G. Dantzig y M. Thapa, *Linear programming 1: Introduction*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer New York, 2006.

[4] G. B. Dantzig y A. Wald, «On the Fundamental Lemma of Neyman and Pearson», *Ann. Math. Statist.*, vol. 2, 1951, 87–93.

[5] S. Haker, L. Zhu, A. Tannenbaum y S. Angenent, «Optimal mass transport for registration and warping», *International Journal of Computer Vision*, vol. 60, núm. 3, 2004, 225–240.

[6] L. G. Hanin, S. T. Rachev y A. Y. Yakovlev, «On the optimal control of cancer radiotherapy for non-homogeneous cell populations», *Advances in Applied Probability*, vol. 25, núm. 1, 1993, 1–23.

[7] ———, «On the optimal control of cancer radiotherapy for non-homogeneous cell populations», *Advances in Applied Probability*, vol. 25, núm. 1, 1993, 1–23.

[8] H. Heitsch y W. Romisch, «A note on ncenario reduction for two-stage stochastic programs», *Operations Research Letters*, vol. 35, núm. 6, 2007, 731 – 738.

[9] Hernández-Lerma y J. Lasserre, «Approximation schemes for infinite linear programs», *SIAM Journal on Optimization*, vol. 8, núm. 4, 1998, 973–988.

[10] O. Hernandez-Lerma y J. Lasserre, *Discrete-time markov control processes: Basic optimality criteria*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer New York, 2012.

[11] S. Rachev, *Probability metrics and the stability of stochastic models*, Wiley series in probability and mathematical statistics: Applied probability and statistics, Wiley, 1991.

[12] S. Rachev y L. Rüschendorf, *Mass transportation problems: Volume 1: Theory*, Probability and Its Applications, Springer New York, 2006.

[13] W. J. Robertson y A. P. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1980.