Miscelánea Matemática **65** (2018) 19-28 SMM

Simetría en las funciones polianalíticas y análogos simétricos del polinomio de interpolación de Hermite

Gerardo Soler Leyva
Depto. de Informática
UG - Guantánamo
soler@cug.co.cu

Resumen

Una de las generalizaciones de la teoría de las funciones analíticas de variable compleja lo constituye la teoría de las funciones polianalíticas, cuyo comienzo se debe a matemáticos rumanos, aunque en lo fundamental se elaboró con contribuciones de matemáticos de las exrepúblicas soviéticas, comenzando desde los años cincuenta del siglo pasado.

En el presente trabajo se generaliza el concepto de simetría de las funciones analíticas, introduciendo el concepto de n-simetría para las funciones polianalíticas, el cual puede ser utilizado en la solución del problema de contorno de Riemann para funciones que satisfacen una condición que generaliza la condición de simetría de las funciones analíticas, necesitándose en el caso excepcional, análogos simétricos de polinomio de interpolación de Hermite, que también son construidos.

1. Introducción

El inicio de la Teoría de las funciones polianalíticas se debe a los matemáticos rumanos P. Burgatti [3] y N. Teodorescu [13]. En particular, N. Teodorescu introdujo para estas funciones una fórmula análoga a la fórmula de Cauchy. Las direcciones fundamentales del desarrollo de la teoría moderna de funciones polianalíticas y una amplia lista de trabajos dedicados a estas funciones, pueden encontrarse en el artículo [2] de M.B. Balk y M.F. Zuev.

Sea el plano de variable compleja $z = x + iy$ dividido por el contorno L en dos dominios: D^+ (finito) y D^- (infinito). Una función de la forma $F^+(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$ se llama *polianalítica de orden* n (n-*analítica*) en el dominio D^+, si ella en D^+ posee derivadas parciales continuas con relación a x e y hasta el orden n inclusive y satisface (en D^+) la ecuación

$$\frac{\partial^n F^+(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}^n} = 0, \tag{1}$$

donde $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Esta definición pertenece a P. Burgatti.

Cuando $n = 1$, la ecuación (1) representa la forma compleja de las conocidas condiciones de Cauchy-Riemann y en este caso, F^+ es una función analítica en el dominio D^+. De esta manera, las funciones polianalíticas constituyen una de las generalizaciones de las funciones analíticas.

Es conocido (ver, por ejemplo, [1, p. 189]), que toda función polianalítica de orden n $F^+(z,\bar{z})$ en el dominio D^+ (para mayor sencillez denotémosla por $f^+(z)$) se puede representar en la forma

$$f^+(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k^+(z),$$

donde $f_0^+(z)$, $f_1^+(z)$, $\ldots$, $f_{n-1}^+(z)$ son funciones analíticas en D^+ llamadas *componentes analíticas* de la función polianalítica $f^+(z)$.

Frecuentemente se utiliza la llamada función *polianalítica reducida*

$$f^+(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k z^k \varphi_k^+(z),$$

donde $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1}^+(z)$, son funciones analíticas en D^+.

La función $f^-(z)$ se llama *polianalítica de orden* n *en el dominio* D^- [11] si en una vecindad del punto $z = \infty$ ella tiene la representación

$$f^-(z) = \varphi_0^-(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k z^{-k-1} \varphi_k^-(z),$$

donde $\varphi_0^-(z)$, $\varphi_1^-(z)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1}^-(z)$, son funciones analíticas en D^-.

La función $f(z)$ se llama *polianalítica a trozos de orden* n [6], si ella en los dominios D^+ y D^-, se determina respectivamente por las expresiones de $f^+(z)$ y $f^-(z)$:

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z),\ z \in D^+; \\ f^-(z),\ z \in D^-; \end{cases}$$

donde

$$f^+(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k z^k \varphi_k^+(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k^+(z),$$

$$f^-(z) = \varphi_0^-(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k z^{-k-1} \varphi_k^-(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k^-(z), \tag{2}$$

con la particularidad de que $\varphi_k^\pm(z)$, $f_k^\pm(z)$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$, son funciones analíticas en $D^\pm$ respectivamente, ligadas por las relaciones

$$z^k \varphi_k^+(z) = f_k^+(z); k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\varphi_0^-(z) = f_0^-(z),\ z^{-k-1}\varphi_k^-(z) = f_k^-(z); k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

De aquí se deduce que los órdenes del cero de las funciones $f_k^+(z)$ en el origen de coordenadas no son menores que k respectivamente; los órdenes del cero de las funciones $f_k^-(z)$, $k \geq 1$, en el punto al infinito no es menor que $k+1$ respectivamente y el orden del cero de la función $f_0^-(z)$ en este punto ($z = \infty$), no es menor que cero.

Se dice que la función polianalítica a trozos $f(z)$ es *acotada (desaparece) en el infinito*, si la función $\varphi_0^-(z)$ en la representación (2) es acotada (desaparece) en el infinito. Por otro lado, una función polianalítica se dice que es *regular en el dominio finito* D^+ ([9, p. 104]), si todas sus componentes son regulares en ese dominio.

En lo sucesivo, cuando hablemos de funciones polianalíticas de orden n, vamos a tener en cuenta funciones de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k(z). \tag{3}$$

Una función polianalítica de orden $n = 2$ se llama *bianalítica*.

Las funciones polianalíticas están estrechamente relacionadas con las *funciones poliarmónicas* [6], es decir, con las soluciones de la ecuación $\Delta^n U = 0$, donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es el operador de Laplace. La función $U^\pm(x, y)$ es poliarmónica en $D^\pm$ respectivamente, cuando y solo cuando ella sirve de parte real o imaginaria de una función polianalítica en $D^\pm$ respectivamente.

Especial atención se les presta a las funciones bianalíticas en vista de su relación con las *funciones biarmónicas*, las cuales poseen importantes aplicaciones en la Teoría de la elasticidad.

En la obra [10] de V. V. Pokazeiev se elaboran los fundamentos teóricos de las funciones polianalíticas, automorfas respecto a diferentes grupos de transformaciones fraccionarias lineales que admiten sobre el plano puntos singulares aislados y líneas de discontinuidad de primera especie.

Las bases de la Teoría de funciones analíticas automorfas fueron elaboradas el los trabajos de F. Klein y H. Poincaré. Estas funciones están estrechamente relacionadas con la Teoría de ecuaciones diferenciales, Teoría de las superficies de Riemann, Topología, Geometría no Euclidiana y una serie de otros apartados de la Matemática. Una exposición de los resultados clásicos de esta teoría la da L. Ford [5].

Por primera vez V. Ya. Natanzon [8] construyó una función polianalítica automorfa. Él utilizó en la solución de un problema de la Teoría de la elasticidad la función bianalítica biperiódica

$$\gamma_2(z) = \frac{\bar{z}}{z^3} + \sum_h{}' \left[\frac{\overline{z-h}}{(z-h)^3} - \frac{\bar{h}}{h^3} \right]$$

donde $h = \Gamma_1 h_1 + \Gamma_2 h_2$; Γ_1, Γ_2 números enteros positivos o negativos y h_1, h_2 números complejos distintos de cero que satisfacen la condición $Im(h_1/h_2) \neq 0$.

El problema de Riemann consiste en hallar una función $\Phi(z)$ analítica a trozos ($\Phi^+(z)$ analítica en el dominio D^+ y $\Phi^-(z)$ analítica en el dominio D^-) que satisfaga sobre el contorno L la condición

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

donde $G(t)$ y $g(t)$ son funciones dadas sobre L.

En el caso excepcional, el coeficiente $G(t)$ se reduce a cero e infinito en un número finito de puntos del contorno. Este problema por primera vez fue considerado por F. D. Gajov en [6].

Para eliminar las complicaciones relacionadas con la resolubilidad del sistema de ecuaciones que surge de las condiciones de finitud de la solución en los puntos excepcionales es utilizada una función, construida con ayuda del polinomio de interpolación de Hermite con nodos de interpolación en los puntos excepcionales.

En los trabajos de F. D. Gajov [6] y I. A. Sokólov [12] están formulados cuatro problemas de contorno del tipo de Riemann para las funciones polianalíticas. Estos problemas consisten en la determinación de una función polianalítica $f^{\pm}(z)$ a trozos de orden n, continuamente prolongable sobre el contorno L junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial^{m+p} f(z)}{\partial z^m \partial \bar{z}^p}(m, p \leq n-1)$ y que satisface sobre el contorno L, n condiciones. En la obra [9] de V. I. Pokazeiev, está resuelto el problema para las funciones polianalíticas según condiciones de contorno de la forma

$$\frac{\partial^l f^+(t)}{\partial t^i} = G_l(t) \frac{\partial^l f^-(t)}{\partial t^l} + g_l(t),\ t \in L,\ l = 0, 1, \ldots, n-l, \qquad (4)$$

donde $G_l(t)$ $(G_l(t) \neq 0)$ y $g_l(t)$ son funciones dadas sobre el contorno L.

V. I. Pokazeiev redujo el problema (4) a n problemas de contorno de Riemann para las componentes analíticas. Por esta razón, el problema (4) constituye un análogo directo del problema de Riemann para las funciones analíticas.

En el libro [4, pp. 136-155] es estudiado por L. I. Chibrikova el problema de contorno de Riemann para las funciones analíticas simétricas respecto a la circunferencia unitaria en los casos cuando la línea de discontinuidades descansa dentro de la línea de simetría y cuando es la línea de simetría.

Al generalizar el concepto de simetría para las funciones polianalíticas, puede estudiarse el problema de Riemann en esta nueva clase de funciones. Además, en el caso excepcional, ya sea para las funciones analíticas simétricas o para la nueva clase de funciones polianalíticas, se necesita construir análogos del polinomio de interpolación de Hermite en esas clases de funciones.

2. Funciones analíticas simétricas

Sea C una circunferencia cualquiera del plano complejo. La función $\Phi(z)$, la cual en los puntos simétricos z y z^* respecto a C toma valores complejos conjugados es llamada *simétrica* y la relación

$$\overline{\Phi(z^*)} = \Phi(z) \tag{5}$$

condición de simetría.

Para mayor sencillez, vamos a tomar en calidad de C, la circunferencia unitaria $L_0 : |z| = 1$. En este caso la ley de simetría representa la transformación de inversión

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}}. \tag{6}$$

En este caso, el punto $z = 0$ corresponde al punto $z = \infty$.

Si la función $\Phi(z)$, simétrica respecto a L_0, es analítica en cierto dominio S, entonces ella también será analítica en el dominio simétrico S^*.

Cuando en una vecindad de cierto punto z_0, para la función simétrica $\Phi(z)$ se tiene la representación

$$\Phi(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

donde n es un número entero y $\varphi(z)$ es una función analítica en las cercanías de z_0, para la cual $\varphi(z) \neq 0$ cuando $n > 0$, entonces en una vecindad del punto $z_0^* = \frac{1}{\bar{z}}$ tendremos

$$\overline{\Phi(z^*)} = (\frac{1}{z} - \overline{z_0})^n \overline{\varphi(z^*)},$$

es decir, la función simétrica tiene simultáneamente en los puntos z_0 y z_0^* ceros o polos de un mismo orden.

En el estudio de las funciones analíticas a trozos simétricas, solo es necesario considerarlas sobre L_0 y en una de las dos partes del plano en que L_0 lo divide: en la segunda parte del plano, simétrica respecto a L_0, las propiedades de estas funciones se determinan mediante la condición de simetría.

Finalmente, si $\Phi_1(z),\dots,\ \Phi_n(z)$ son funciones simétricas linealmente independientes, entonces su combinación lineal $\Phi(z) = c_1\Phi_1(z) + \cdots + c_n\Phi_n(z)$ será una función analítica, cuando y sólo cuando las constantes $c_1,\dots,c_n$ son reales.

3. Funciones polianalíticas n-simétricas

Si tomamos para las funciones polianalíticas la definición de simetría respecto a cualquier circunferencia del plano complejo, exactamente como se da para las funciones analíticas, entonces una función polianalítica de orden n de la forma (3) la llamaríamos *simétrica respecto a C*, si ella satisface la condición (5).

Sin embargo, la función $\overline{f(z^*)}$ en general no es polianalítica, lo cual veremos a continuación.

Sea la circunferencia unitaria $L_0 : |z| = 1$ la línea de simetría. En este caso la ley de simetría para los puntos simétricos respecto a L_0 está dada por la igualdad (5) y es fácil ver que la función $\overline{f(z^*)}$ no es polianalítica. En efecto, la función

$$\overline{f(z^*)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\bar{z}^k}\overline{f_k(z^*)}$$

no es representable en la forma (5). Además, se ve que ella no satisface la condición

$$\frac{\partial^n f(z)}{\partial \bar{z}^n} = 0.$$

Consideremos la función $\bar{z}^{n-1}\overline{f(z^*)}$. Esta función es polianalítica en la esfera de Riemann, excepto posiblemente en el punto $z = \infty$. Efectivamente, tenemos que:

$$\bar{z}^{n-1}\overline{f(z^*)} = \bar{z}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\bar{z}^k}\overline{f_k(z^*)} = \sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^{n-k-1}\overline{f_k(z^*)} = \sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k P_k(z), \quad (7)$$

donde $P_k(z) = \overline{f_{n-k-1}(z^*)}$.

Por otro lado, por cuanto la componente analítica $f_k(z)$ tiene en el origen de coordenadas un orden no inferior a k ([4, p. 315]), su desarrollo en serie en una vecindad de este punto tiene la forma

$$f_k(z) = c_j z^j + c_{j+1} z^{j+1} + \cdots = z^j \varphi_k(z)$$

donde $\varphi_k(z) = c_j + c_{j+1} z + \ldots$, $\varphi_k(0) = c_j \neq 0$ y $j \geq k$.

De aquí se tiene que

$$\overline{f_k(z^*)} = \frac{1}{z^j} \overline{\varphi_k(\frac{1}{\bar{z}})},$$

con la particularidad de que

$$\overline{\varphi_k(\frac{1}{\bar{z}})} = \overline{c_j} + \frac{\overline{c_{j+1}}}{z} + \frac{\overline{c_{j+2}}}{z^2} + \ldots.$$

Por eso la función $\overline{f_k(z^*)}$ tiene en el infinito un orden no inferior a k, por lo que la función $P_k(z) = \overline{f_{n-k-1}(z^*)}$ tiene en este punto un cero de orden no inferior a $n - k - 1$.

Se infiere que la función $\bar{z}^{n-1}\overline{f(z^*)}$ es polianalítica en el plano complejo, excepto el punto $z = \infty$, en el cual ella puede tener un polo de orden no mayor que $n - 1$.

Las funciones polianalíticas que satisfacen la condición

$$f(z) = \bar{z}^{n-1}\overline{f(z^*)} \tag{8}$$

las llamaremos *n-simétricas (respecto a L_0)* y la condición (8), *condición de n-simetría.*

Ejemplo. La función $f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \bar{z}(1 + z)$ es 2-simétrica bianalítica en $\mathbb{C}$, excepto en los puntos $z = 0$ y $z = \infty$, en los cuales posee polos de primer y segundo órdenes respectivamente.

Cuando $n = 1$, la condición de n-simetría para las funciones polianalíticas coincide con la conocida condición de simetría (5) para las funciones analíticas. Por eso podemos considerar la condición de n-simetría para las funciones polianalíticas como una de las generalizaciones de la condición de simetría para las funciones analíticas.

4. Polinomio de interpolación de Hermite

Es conocido el siguiente problema generalizado de interpolación, considerado por el matemático francés Charles Hermite (1822–1901) (ver [7]): «Construir un polinomio $P(x)$ de grado n, tal que en s puntos diferentes x_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) tome junto a sus derivadas de orden h ($h = 0, 1, \ldots, \alpha_k - 1$) los valores dados $y_k^{(h)}$ según las condiciones:

$$P^{(h)}(x_k) = y_k^{(h)}$$

con la particularidad de que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = n + 1$».

Los puntos x_k son llamados *nodos de interpolación* y los números α_k son sus multiplicidades respectivamente.

El polinomio obtenido, denominado *Fórmula de Hermite*, tiene la forma:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{A(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}} \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} f^{(k)}(x_i) \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left\{ \frac{(x-x_i)}{A(x)} \right\}^{\alpha_i} \right]_{(x_i)}^{\alpha_i - k - 1}, \quad (9)$$

donde $A(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \ldots (x-x_s)^{\alpha_s}$ y $\frac{1}{k!}\left\{\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}\right\}_{(x_i)}^{\alpha_i-k-1}$ es la suma de los términos del desarrollo de la función $\frac{1}{k!}\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{A(x)}$ en serie de Taylor en una vecindad del punto x_i, cuyas potencias no son mayores que $\alpha_i - k - 1$.

Observación 4.1.

a) Si las multiplicidades de los nodos α_i son iguales a 1, es decir, si todos los nodos son simples, la fórmula (9) *se convierte en la conocida fórmula de Lagrange*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{s} f(x_i) \frac{A(x)}{(x-x_i)A'(x_i)}.$$

b) Si se tiene un solo nodo $x = a$ de multiplicidad α, entonces $A(x) = (x-a)^{\alpha}$ y en lugar de (9) *se tendrá un truncamiento de la serie de Taylor del desarrollo de la función $f(x)$ en la vecindad del punto a:*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

5. Análogo analítico simétrico del polinomio de interpolación de Hermite

Sea $Q_1(z)$ el polinomio de interpolación de Hermite de la función analítica $f(z)$ con nodos de interpolación α_k; $k = 1, 2, \ldots, \mu$ tal que:

$$Q_1^{(j_k)}(\alpha_k) = f^{(j_k)}(\alpha_k),\ j_k = 0, 1, \ldots, m_k - 1,\ k = 1, 2, \ldots, \mu. \quad (10)$$

Es fácil ver que la función $\overline{Q_1(z^*)}$ es de interpolación para la función $\overline{f(z^*)}$, con nodos α_k^*. Estas funciones satisfacen condiciones análogas a las condiciones (10) en los puntos α_k^*.

Sean las funciones $Q(z) = Q_1(z) + \overline{Q_1(z^*)}$ y $F(z) = f_1(z) + \overline{f_1(z^*)}$. Es evidente que estas funciones son simétricas y satisfacen condiciones de la forma (10) en los puntos α_k y α_k^* . Luego, es válido el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *La función $Q(z)$ es el análogo simétrico del polinomio de interpolación de Hermite con nodos de interpolación α_k de multiplicidades m_k respectivamente para la función $F(z)$.*

6. Análogo polianalítico n-simétrico

Sea la función polianalítica $f(z)$ con componentes $f_k(z)$, dada por la expresión (3). Según (7), la función $F(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[f_k(z) + \overline{f_{n-k-1}(z^*)} \right] \bar{z}^k$ es polianalítica n-simétrica.

Sean $\hat{Q}_k(z)$ los conocidos polinomios de interpolación de Hermite para las funciones $f_k(z)$ con nodos de interpolación α_k de multiplicidades m_k respectivamente.

Para nosotros ya es conocido que estas funciones satisfacen condiciones de la forma

$$\begin{gathered} \hat{Q}_l^{(j_k)}(\alpha_k) = f_l^{(j_k)}(\alpha_k); \quad j_k = 0, 1, \ldots, m_k - 1; \\ k = 0, 1, \ldots, \mu; \quad l = 0, 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{11}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se infiere que las funciones

$$Q_l(z) = \hat{Q}_l(z) + \overline{\hat{Q}_{n-l-1}(z^*)}; \quad l = 0, 1, \ldots, n-1$$

y las componentes de la función polianalítica n-simétrica $F(z)$ satisfacen condiciones análogas a las condiciones (11) en los puntos α_k y α_k^*. Luego, se verifica el siguiente teorema:

Teorema 6.1. *La función $Q(z)$ con componentes $Q_l(z)$ es el análogo polianalítico n-simétrico del polinomio de interpolación de Hermite para la función polianalítica n-simétrica con nodos de interpolación α_k de multiplicidades m_k respectivamente; $k = 1, 2, \ldots, \mu$; $l = 0, 1, \ldots, n-1$.*

La construcción de los análogos del polinomio de interpolación de Hermite se ha hecho sobre la base de la construcción de las propias funciones analítica simétrica y polianalítica n-simétrica respectivamente; teniendo en cuenta que en la solución de algunos problemas donde se precisa de análogos del polinomio de interpolación de Hermite, su construcción está subordinada a la construcción de funciones, a cuya clase pertenecerán dichos análogos.

Bibliografía

[1] M. Balk., *Polyanalytic functions*, Akad. Verlag, Berlin, 1991.

[2] M. Balk y M. Zuev, «Sobre las funciones polianalíticas», *Éxitos de las Ciencias Matemáticas*, vol. 25, núm. 5, 1970, 203–226.

[3] P. Burgatti, «Sulla funzioni analytiche d'ordini p», *Bolletino della Unione mathem. Italiana*, vol. 1, núm. 1, 1992, 8–12.

[4] L. Chibrikova, *Problemas de contorno fundamentales para las funciones analíticas*, Edit. Univ. De Kazán, 1977.

[5] L. Ford, *Funciones automorfas*, –M. –L: ONTI, 1936.

[6] F. Gajov, *Problemas de contorno*, MIR, Moscú, 1980.

[7] V. L. Goncharov, *Teoría de interpolación y aproximación de funciones*, Editorial estatal de literatura teórica de mecánica. Moscú, 1954.

[8] V. Y. Natanzon, «Acerca de las tensiones en una lámina estirada debilatada mediante perforaciones dispuestas en orden ajedrecístico», *Colec. Mat.*, vol. 42, núm. 5, 1935, 617–633.

[9] V. I. Pókazeiev, «Funciones polianalíticas no regulares», *Pub. de los centros de Educ. Sup. Matemática*, núm. 6, 1975, 103–113.

[10] V. V. Pokazeiev, «Problemas de contorno para algunas clases de funciones polianalíticas», tesis de doctorado, Universidad Estatal de Kazán, 1981.

[11] I. A. Sokolov, «Acerca del problema de contorno del tipo de riemann para las funciones polianalíticas sobre la circunferencia», *Pub. de la A.C. de la RSSB, serie ciencias Fis. –Mat.*, núm. 5, 1969, 64–71.

[12] ———, «Acerca de los problemas de contorno del tipo de riemann para las funciones polianalíticas», tesis de doctorado, Universidad Estatal de Minsk, 1970.

[13] N. Teodoresco, *La derivée areolaire*, Thése, Paris, 1931.