LOS CONJUNTOS.

Por Manuel López Mateos (*)

Lo primero que se nos viene a la cabeza al oír hablar de este tema es lo siguiente: bueno, y ¿qué es un conjunto? Esta no es una pregunta fácil. Escuchemos:

- Un conjunto es una colección de objetos.
- Muy bien, y ¿qué es una colección?
- ¡Ah! Una colección es una reunión de objetos.
- ¡Oh!, y... ¿qué es una reunión?
- Ejem, ejem, una re..., una reunión...
- Si, dime ahora que es una reunión
- Una reunión es un..., ¡ya se!, es algo así como un montón de objetos, como un conjunto de objetos.
- Y, ¿qué es un conjunto?
- ai muere.

Nos damos cuenta en el diálogo anterior que en cada intento de definir *conjunto*, empleamos un sinónimo. ¡Nada más lejano de la definición de <u>definición</u>!

Esto no significa que es imposible definir el concepto de conjunto, pero si nos hace ver que la manera de definirlo debe ser muy complicada , y de hecho lo es. Pero el que no podamos definir por ahora el concepto de conjunto no nos impedirá manejar

(*) Profesor de Carrera de la Facultad de Ciencias, UNAM.

lo (todavía no está muy claro lo que es el *tiempo* y nadie se inmuta cuando en la XEQK dicen muy serios -...ponga a tiempo su reloj. Son las 11 hrs. con 13 minutos...piip).

Así que partamos de lo siguiente: Todos tenemos un conocimiento intuitivo del concepto de conjunto. Esto quiere decir que si, por ejemplo, hablamos del conjunto de personas - inscritas en Cálculo 1 en la Facultad de Ciencias de la UNAM, sabremos de qué estamos hablando. Queremos decir con esto que si nos muestran cualquier persona o cosa, tendremos capacidad de saber si la persona o cosa en cuestión pertenece o nó al conjunto.

Pues bien, esto es precisamente lo que vamos a exigir de un conjunto: que dado cualquier objeto podamos decir si ese objeto pertenece o no pertenece al conjunto, entendiendo que no se puede pertenecer y no pertenecer al mismo tiempo a un conjunto.

(Es posible que mucha gente no esté de acuerdo con la ultima frase, pero actualmente se maneja así la Teoría de Conjuntos).

Un ejemplo: Consideremos el conjunto de calificaciones finales obtenidas por los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la UNAM el segundo semestre de 1974.

Este conjunto está bien definido, es decir, que si mostramos cualquier objeto somos capaces de decir si pertenece o nó al conjunto. Por ejemplo: el número 3.14159265358979323846... comunmente llamado Π, no pertenece al conjunto, mientras que las letras MB sí pertenecen al conjunto; el último discurso de Echeverría no pertenece al conjunto, mientras que las letras juntas NA sí pertenecen al conjunto. De hecho, los elementos del conjunto en cuestión son los objetos NA, S, B, MB. Para saber si algún objeto pertenece o nó al conjunto que nos ocupa, bastará comprobar si es o nó uno de los elementos mencionados.

Parecería entonces que cada vez que dijéramos: sea C el conjunto de objetos con determinada propiedad, estaríamos hablando de un conjunto *bien definido*. La cuestión no es así de simple. Construiremos a continuación un "conjunto" que no esté bien definido. Es decir, construiremos algo a lo que no podremos llamar un conjunto. Para ello escuchemos el siguiente relato:

HISTORIA DEL ALFAJEME AS-SAMET, EL SILENCIOSO

(noches 1002 a 1004)

Dijo Schahrasad:

- He podido averiguar, ye monarca el afortunado, que había en los tiempos antiguos y en épocas y siglos pretéritos en una ciudad de Az-Zin un barbero, ducho en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar pies y piernas y en poner ventosas y sanguijuelas.

Al contrario de sus hermanos de oficio este alfajeme mostraba discresión al hablar. Además su rostro reflejaba el dolor causado por un constante pesar.

Así las cosas, un día de los días, se presentó en la ciudad un muy bien vestido viajero que dijo a su criado:

- Ve al zoco y tráeme un barbero que sea callado y listo, que no me mareé con su hablar desmedido.

Fuese allá el criado y volvió en compañía de As-Samet, el cual al entrar lo saludó con el selam, contestando el viajero en igual forma. Y después dijo:

- ¡Ahuyente Alá tus penas y tus pesares y tus tristezas y tus males!

- Que Alá te oiga- respondió el viajero.

- Sidi ¿Quieres que te pele o que te sangre?

- Aféitame la cabeza en seguida.

Al oír esto el barbero con cara seria exclamó

- ¡Ye mulai! No tomes a mal lo que te pregunto pero necesito saber por que no lo haces tu mismo, porque *si tu puedes yo no puedo y si tu no puedes yo si puedo*.

A lo cual contestó asombrado el viajero:

- ¿Qué es esto? Me ahogas y mareas, yo te llamé tan solo para que me afeitases la cabeza y tu me sales con frases incomprensibles. ¿Qué es eso de poder y no poder? Déjate de sandeces.

- Por Alà -dijo el barbero- que si supieras de lo que se trata, comprenderías mi congoja y no me reprocharías con esas palabras. Que tú por venir de lejos no puedes saber del peli--

gro que corre mi cabeza.

El viajero era un hombre muy sabio y conocía muchas extrañas y raras historias, mostró interés por oír la del barbero, pensando que le haría conocer nuevas cosas y aumentar su sabiduría y guiar mejor sus pasos. Y se acordó de los versos del poeta:

" Siempre que algo hayas de hacer
consulta a hombre de experiencia
y déjate guiar de él "

Así que dijo:

- ¿Cuál es tu historia?

A lo cual contestó el barbero...

Pero al llegar aquí sorprendió a Schahrasad la aurora y cortó el hilo de sus palabras seductoras.

Y LA NOCHE 1003 PROSIGUIO SU RELATO EN ESTA FORMA:

- Ha llegado a mis oídos, ye monarca el afortunado, que el viajero de mi cuento le dijo al barbero:

- Cuéntame entonces tu historia.

A lo que el barbero respondió diciendo

- ¡Ye, sidi! Has de saber (pero Alá es el más sabio) que el emir de los creyentes dándose cuenta de la escasez de maestros en mi oficio, que el nuestro es de categoría y ya dijo un poeta nombrado:

" Son los oficios todos comparables
al hilo de un collar
y el barbero la perla inapreciable
que en él prendida vá .

En el saber a todos aventaja
y es tanto su poder
que los reyes agachan la cabeza
bajo la mano de él".

- Por favor -dijo el viajero- continúa con la historia.

Y así siguió diciendo el barbero

- Pues ante la escasez de maestros en mi oficio, el emir - de los creyentes dió órdenes de que *los barberos afeitáramos - sólo aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas.*

- Justo es, me parece -comentó el viajero-

- ¡Guay de mí ! No permita Alá que lo dude. Y es por eso, - ye el viajero, lo que me quita el sueño; el pensar si he desobedecido o nó a mi señor.

- ¡Ye scheij ! Explícame que no acierto a comprender

- El asunto es así, poderoso señor, que *al afeitarme el -- viernes* (pues cuentan de Ibn-Abbás que decía: "A quien se pela en día viernes, libralo Alá de setenta enfermedades") *pienso - que puedo afeitarme por mí mismo y entonces no debería afeitarme el barbero ¡que soy yo¡*

Otras veces pienso que si no me afeito, entonces como no -- puedo hacerlo, lo debe hacer un barbero por mí, ¡Pero no hay - más barbero aquí que yo¡ ¿Comprendes ahora mi tribulación?

Al oír esto el viajero se levantó admirado de la profundidad de pensamiento del barbero y le dijo

- Ye barbero, el discreto, me parece que nunca (Alá lo sabe) había oído historia tan interesante. Cesen tus tribulaciones, estás ante el emir de los creyentes.

Pero al llegar aquí sintió Schahrasad que venía ya la mañana y atajó el flujo de sus fluyentes palabras.

Y LA NOCHE 1004 SIGUIO DICIENDO LA MUCHACHA:

- He llegado a saber, ye monarca el afortunado, que el rey de Az-Zin, maravillado por las palabras de As-Samet, se le dió a conocer, al instante el barbero cayó al suelo postrado e invocando el nombre de Alá dijo, como anunciaban el selam del viernes en los alminares.

- ¡B-Ismi-l-lahi-r-rahmani-r-rahimi!

No hay mas dios que el Dio y Mohammed es, con toda verdad, el profeta de Alá

Regocijose el rey de Az-Zin al ver y oír esto y rompió a reir con tal gana que perdió el sentido.

Llamó después el rey de Az-Zin a Ira-Ma, la más bella de sus concubinas y mandó que pusiesen aquella historia por escrito y así lo hicieron sus cronistas y luego la colocaron en la alhacena del soberano.

En seguida dijo al barbero que no temiera, que podía afeitarse cuantas veces quisiera. Acto seguido lo gratificó con un traje de honor. le asignó estipendios y le nombró, además, barbero del reino y su comensal.

Y vivió, el barbero, de allí en adelante vida regalada, - de contínua delicia y no interrumpida dicha, hasta que fue por él, la rematadora de los goces y dispersadora de reuniones.

Nota aclaratoria: Esta historia guarda alguna semejanza con la "Historia del Alfajeme de Bagdad" (noches 33 a 37) y no aparece en ninguna de las 1001 noches porque Schahrasad la guardaba como último recurso. ¡Pero Alá es el más sabio!

Tratemos de construir un conjunto con personajes del relato anterior.

Sea **B** el conjunto de personas a las que afeita el barbero.

¿ **B** es un conjunto?

¿Dado cualquier objeto, podemos decir si pertenece o nó a **B**?

Llamemos **b** al barbero.

1. ¿Pertenece b al conjunto B?
2. ¿No pertenece b al conjunto B?

Supongamos que la respuesta a la pregunta 1 sea: Sí,b pertenece a B. Es decir que **b** está en el conjunto de personas a las que afeita el barbero;¡pero b es el barbero¡, es decir, que al barbero lo afeita el barbero; se desprende de aquí que **b** es una persona que se puede afeitar a sí misma y por lo tanto a **b** no lo puede afeitar el barbero (el barbero solo afeita a aquellos que no lo pueden hacer por sí mismos), es decir que ¡¡¡ **b** no pertenece a B !!!

El suponer que **b** pertenece a B nos lleva a concluir que **b** no pertenece a B.

De manera análoga, si suponemos que **b** no pertenece a **B** tendremos que **b** no es de las personas a las que afeita el barbero (B es el conjunto de las personas a las que afeita el barbero), es decir que **b** es de las personas que se pueden afeitar por sí mismas, pero **b** es el barbero y el que **b** se afeite por sí mismo quiere decir que a **b** lo afeita el barbero, esto nos conduce a afirmar que ¡**b** es un elemento del conjunto **B**¡

Al suponer que **b** no pertenece a **B** llegamos a la conclusión de que **b** pertenece a B.

Podemos sacar en claro lo siguiente:

El "conjunto" **B** no está bien definido ya que hay al menos un objeto, a saber **b** (el barbero), del cual no podemos decir si pertenece o nó al "conjunto".

Pues bien, a este tipo de cosas no les llamaremos conjuntos. Para que a algo le podamos llamar conjunto debemos ser capaces de decir acerca de *cualquier* objeto, si es elemento o nó del conjunto en cuestión.

Supongamos que A es un conjunto y **x** es un objeto. Si **x** es un elemento del conjunto A , escribiremos $x \in A$; que se puede leer: " **x** es un elemento de **A**", " **x** pertenece a **A**" ó " **x** está en **A**".

Si x no es un elemento del conjunto **A**, escribiremos $x \notin A$; que se puede leer: " x no es un elemento de A ", " x no pertenece a A " ó " x no está en A ".

Por ejemplo, si denotamos por N el conjunto de los números naturales, sabemos que:

$1 \in \mathbf{N}$, $-3 \notin \mathbf{N}$, $1/3 \notin \mathbf{N}$, $\pi \notin \mathbf{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$, $8624 \in \mathbf{N}$, $0 \notin \mathbf{N}$. Si denotamos por **Z** el conjunto de los números enteros, sabemos que:

$1 \in \mathbf{Z}$, $-3 \in \mathbf{Z}$, $1/3 \notin \mathbf{Z}$, $\pi \notin \mathbf{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$, $8624 \in \mathbf{Z}$, $0 \in \mathbf{Z}$.

Y si denotamos por Q al conjunto de los números racionales, sabemos que:

$1 \in Q$, $-3 \in Q$, $1/3 \in Q$, $\pi \notin Q$, $\sqrt{2} \notin Q$, $8624 \in Q$, $0 \in Q$.

Asimismo si denotamos por **I** el conjunto de los números irracionales sabemos (y si no lo sabemos, lo sabremos dentro de poco) que:

$1 \notin \mathbf{I}$, $-3 \notin \mathbf{I}$, $1/3 \notin \mathbf{I}$, $\pi \in \mathbf{I}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{I}$, $8624 \notin \mathbf{I}$, $0 \notin \mathbf{I}$.

Y si (¡uf¡) por último, denotamos por R a los números reales, sabemos que:

$1 \in \mathbf{R}$, $-3 \in \mathbf{R}$, $1/3 \in \mathbf{R}$, $\pi \in \mathbf{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$, $8624 \in \mathbf{R}$, $0 \in \mathbf{R}$,

Cuando hablamos de un conjunto lo podemos hacer, esencialmente, de dos maneras: diciendo explícitamente cuales son sus elementos ó enunciando alguna propiedad que caracteriza a esos elementos, es decir, alguna propiedad que cumplan los elementos del conjunto pero que *solo ellos* cumplan. Por ejemplo:

Si **B** es el conjunto de los múltiplos de 10 comprendidos entre el 1 y el 100, podemos escribir:

$$B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$$

ó

$$B = \{x \quad N \mid x = 10n \ ; \ n = 1, \ldots, 10\}$$

Si **P** es el conjunto de los pares positivos, podemos escribir:

$$\mathbf{P} = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

o bien

$$\mathbf{P} = \{x \in \mathbf{Z} \mid x = 2n,\ n \in \mathbf{N}\}$$

En cada caso escogeremos la notación más adecuada.

Consideremos ahora los conjuntos **N** y **Q**. Vemos que cada elemento de **N** es un elemento de **Q**, es decir que cada número natural lo podemos representar como el cociente de dos enteros; esto lo podemos escribir simbólicamente de la siguiente manera:

$$x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{Q},$$

que se puede leer: "Si x está en **N**, entonces x está en **Q**" ó "x en **N**, implica $x \in \mathbf{Q}$". Todo lo anterior lo expresamos diciendo que **N** está contenido en **Q** ó que **Q** contiene a **N** ó que **N** es un subconjunto de **Q**.

Es natural entonces definir la contención de la siguiente manera:

Definición. Sean A y B dos conjuntos. Decimos que A *está contenido en* B (o que A es un *subconjunto* de B) si cada elemento de A es a su vez un elemento de B.

Simbólicamente:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Sabemos por ejemplo que:

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \ ; \ \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$$

Definición. Diremos que los conjuntos **A** y **B** son iguales y lo escribiremos $A = B$ si A es un subconjunto de B y B es un subconjunto de A. i,e,

$$\text{si} \quad A \subseteq B \quad \text{y} \quad B \subseteq A$$

Esto es equivalente a decir que $A=B$ si $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Definición. **A** es un subconjunto *propio* de B si:

i) $A \subseteq B$

ii) existe algún $x \in B$ tal que $x \notin A$,

es decir si A es un subconjunto de B pero <u>no</u> es B, o sea que existe algún elemento de B que <u>no</u> está en A.

Ejemplo: Sea **N** el conjunto de los números naturales, y

$P = \{ x \in \mathbf{N} \mid x = 2n, \ n \in \mathbf{N} \}$ el conjunto de los pares.

Vemos claramente que $P \subseteq \mathbf{N}$ y que hay elementos de **N**, a saber cualquier número impar, que no son elementos de P. Por lo tanto, P es un subconjunto propio de **N**.

Cuando trabajamos con conjuntos, generalmente lo hacemos pensándolos como subconjuntos de un conjunto "mayor" --

(la palabra"mayor" está perfectamente mal empleada. Más adelante, cuando veamos correspondencia biunívoca, aclararemos el porqué), como subconjuntos de un conjunto con otros elementos, además del ó de los conjuntos considerados, A ese conjunto"más general" ó a ese conjunto que nos sirve de contexto, lo llamaremos **conjunto universal** y lo denotaremos por Ω . (fig. 1)

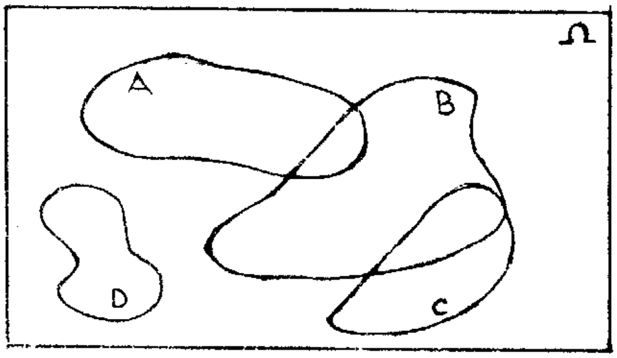

Fig. 1

Por ejemplo, si estamos hablando de números **naturales** y estamos trabajando con conjuntos cuyos elementos son números naturales, y no vamos a emplear mas que este tipo de números, es claro que nuestro conjunto universo será el conjunto **N.**

Dado el conjunto $A\subset\Omega$ podemos construir un conjunto asociado al conjunto **A**, a ese conjunto lo llamaremos el *complemento* de A y está definido como el conjunto de "puntos" de Ω que no pertenecen a A. Este conjunto será denotado por A^c . Tenemos entonces que:

$$A^c = \{ x \in \Omega \mid x \notin A \}$$

Podemos representar gráficamente a $\mathbf{A}^c$ por medio de los - llamados "Diagramas de Venn" (fig. 2)

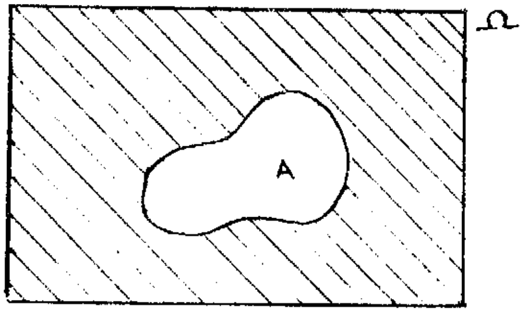

Fig. 2

La parte sombreada de la figura 2 representa a los puntos de $\mathbf{\Omega}$ que no están en **A.** Representan a "lo que le falta a **A** para ser Ω".

Aseguramos lo siguiente: que $(\mathbf{A}^c)^c = \mathbf{A}$

Para mostrar que la afirmación anterior es cierta, debemos hacer ver que se cumple la definición de igualdad entre conjuntos, es decir, que:

i) $(A^c)^c \subseteq A$

y ii) $A \subseteq (A^c)^c$

(i) Para que $(A^c)^c$ sea un subconjunto de **A**, debemos tener que cada elemento de $(A^c)^c$ sea un elemento de A (definición de subconjunto).

Sea entonces $x \in (A^c)^c$.

El que x sea un elemento del complemento de A^c significa que $x \notin A^c$. Los elementos de A^c cumplen la propiedad de no pertenecer a A. El que $x \notin A^c$ quiere decir que x no cumple esa propiedad, por lo tanto $x \in A$.

Tenemos entonces que $x \in (A^c)^c \Rightarrow x \in A$, lo cual demuestra - (i).

La demostración de (ii) es análoga y la sugerimos como -- ejercicio.

Pues bien, al haber demostrado

(i) $(A^c)^c \subseteq A$

y (ii) $A \subseteq (A^c)^c$

hemos demostrado que $(A^c)^c = A$

A continuación definiremos algunas operaciones entre con-- juntos y enunciaremos sus propiedades fundamentales como propo siciones.

La Intersección.

Definición. Sean A y B dos conjuntos. La *intersección* de - A y B se denota por $A \cap B$ y es el conjunto formado por los ele mentos comunes de A y B. i.e.

$$A \cap B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \text{ y } x \in B \}$$

La zona sombreada de la figura 3 representa $A \cap B$

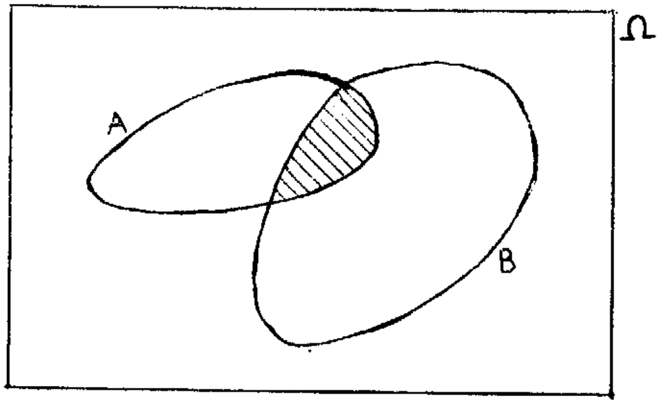

Fig. 3

Ejemplos.

1. Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{2,4,5,7,8\}$, tendremos que:

$$A \cap B = \{2,4,5\}$$

2. Si $C = \{a,c,d,f,h\}$ y $D = \{d,h,j,i,x\}$, entonces:

$$C \cap D = \{d,h\}$$

3. Si $E = \{1,3,5,9\}$ y $F = \{2,4,6,8,10\}$ vemos no existe algún elemento común a E y F. En este caso diremos que la intersección es *vacía* y escribimos $E \cap F = \phi$

De hecho consideraremos a ϕ como un conjunto, como un conjunto *sin* elementos y le llamaremos el *conjunto vacío*. Este conjunto ϕ será subconjunto de cualquier conjunto, es decir, tendremos que: $\phi \subseteq A$ para cualquier conjunto A.

Definición. Si A y B son conjuntos diferentes del vacío y tales que $A \cap B = \phi$, diremos que son *ajenos*.

Así, el conjunto Q de los números racionales y el conjunto I de los números irracionales son ajenos.

La operación $\cap$ es una operación *idempotente*, es decir que para cada conjunto A, se tiene que $A \cap A = A$. La demostración de esta propiedad queda como ejercicio.

La operación $\cap$ es *conmutativa*, es decir que dados dos conjuntos arbitrarios A y B, se tiene que $A \cap B = B \cap A$. Para mostrar que esto es cierto, hay que mostrar que para cualesquiera A y B:

$$\text{i) } A \cap B \subseteq B \cap A$$

$$\text{y} \quad \text{ii) } B \cap A \subseteq A \cap B$$

(i) Si $x \in A \cap B$ entonces $x \in A$ y $x \in B$. Podemos decir que $x \in B$ y $x \in A$, esto es, por definición de intersección, $x \in B \cap A$. Tenemos entonces que:

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in B \cap A,$$

es decir que $A \cap B \subseteq B \cap A$.

La demostración de (ii) es análoga y se deja como ejercicio.

La operación $\cap$ es *asociativa*, es decir $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Proposición 1. Si A y B son dos conjuntos diferentes del vacío, se cumple que:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

El enunciado de la proposición nos dice que si A es subconjunto de B, entonces la intersección $A \cap B$ es el conjunto A, y viceversa, Si A y B son dos conjuntos tales que $A \cap B = A$, entonces

$A \subseteq B$. Entonces hay dos cosas por demostrar:

$$\text{i)} \quad A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$\text{ii)} \quad A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B = A$$

Ataquemos primero a (i)

i) Nuestra hipótesis es que $A \subseteq B$. Es decir que cada vez que $x \in A$, tendremos que $x \in B$. A partir de esto y de las definiciones de intersección y de igualdad de conjuntos, queremos demostrar que $A \cap B = A$. Como de costumbre, tenemos que hacer ver que:

a) $A \cap B \subseteq A$

y

b) $A \subseteq A \cap B$

(a) Sea $x \in A \cap B$. Si x es un elemento de la intersección, entonces x tiene que ser un elemento de A. i.e.

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A.$$

Por lo tanto $A \cap B \subseteq A$.

(b) Sea $x \in A$. Por hipótesis $A \subseteq B$, es decir que $x \in A \Rightarrow x \in B$, por lo tanto

$$x \in A \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in B$$

ó lo que es lo mismo

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$$

i.e.

$$A \subseteq A \cap B$$

Hemos demostrado que (a) y (b) se cumplen bajo la hipótesis de que $A \subseteq B$. Es decir hemos demostrado (i).

Concentremos ahora nuestras fuerzas sobre (ii)

ii) En este caso la hipótesis es que A y B son conjuntos tales que $A \cap B = A$. Tenemos que demostrar que cada vez que pasa esto, se tiene que $A \subseteq B$.

Sea $x \in A$. Como $A = A \cap B$,

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B.$$

Y si $x \in A \cap B$, x tiene que estar en B. Es decir

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B.$$

Finalmente

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

i.e.

$$A \subseteq B$$

Con esto queda demostrado (ii), y con ello la proposición.

q.e.d.

De acuerdo a la definición de intersección de dos conjuntos, vemos que los conjuntos A y A^c son ajenos ya que no tienen elementos comunes. De hecho A^c es el conjunto de objetos que *no* son elementos de A. Podemos entonces escribir:

$$A \cap A^c = \phi$$

La Unión.

Definición. Sean A y B dos conjuntos. La *unión* de A y B, que denotamos por $A \cup B$, es el conjunto de objetos que son elementos de A ó de B ó de ambos, i.e.

$$A \cup B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \text{ ó } x \in B \}$$

donde el "ó" utilizado es *inclusivo*. La zona sombreada de la - figura 4 representa a $A \cup B$.

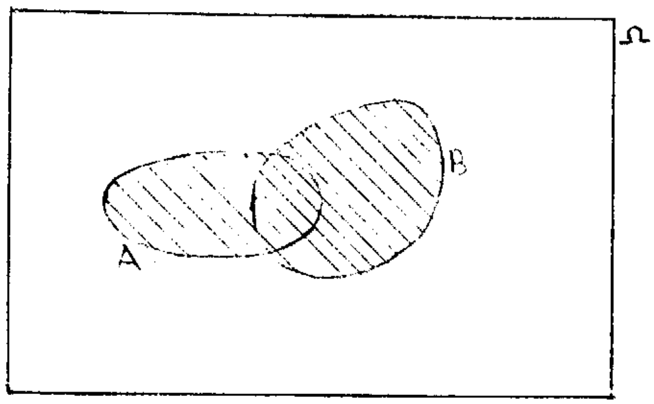

Fig. 4

Ejemplos

1. Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{2,4,5,7,8\}$, entonces:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,8\}$$

2. Si $C = \{a,c,d,f,h\}$ y $D = \{d,x,h,j,i\}$, entonces:

$$C \cup D = \{a,c,d,f,h,x,j,i\}$$

3. La unión del conjunto de números racionales Q y el conjunto de los números irracionales I, es el conjunto R de los números reales.

$$Q \cup I = R$$

Como en el caso de la intersección, la operación *unión* ($\cup$) es una operación:

i) idempotente

ii) conmutativa

y iii) asociativa.

Se deja como ejercicio demostrar que la operación $\cup$ cumple con las propiedades mencionadas.

Proposición 2. Si A y B son dos conjuntos diferentes del vacío, se cumple que:

$$A \cup B = B \iff A \subseteq B$$

Demostración

i) Supongamos que $A \cup B = B$.

Sea $x \in A$. Claramente x es elemento de la unión de A con *cualquier* conjunto, en particular con B. Es decir $x \in A \cup B$. Pero por hipótesis $A \cup B = B$, esto es, $x \in B$.

Hemos mostrado que $x \in A \Rightarrow x \in B \therefore A \subseteq B$

Conclusión: $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$.

ii) Supongamos ahora que $A \subseteq B$. Tenemos que demostrar que $A \cup B = B$.

Sea $x \in A \cup B$, por definición de $\cup$, tenemos que

$$x \in A \text{ ó } x \in B.$$

Pero por hipótesis $A \subseteq B$ (i.e. $x \in A \Rightarrow x \in B$) $\therefore$ $x \in B$

Hemos mostrado que $x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$

i.e. $A \cup B \subseteq B$

Obviamente $B \subseteq A \cup B$.

$\therefore$ $A \cup B = B$.

(i) y (ii) demuestran la proposición.

q.e.d.

Hay dos propiedades que relacionan a las operaciones de unión e intersección. Las llamaremos *leyes distributivas* y las enunciaremos en la siguiente

Proposición 3. Si A, B y C son conjuntos cualesquiera, tenemos que

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demostración.

i) Para corroborar la igualdad de los conjuntos $A \cap (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, debemos mostrar que se cumple la contención mutua, es decir, que se cumple

$$a)\ A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$y\quad b)\ (A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cap(B\cup C)$$

(a) Debemos mostrar que cada elemento del primer conjunto es un elemento del segundo conjunto.

Sea pues

$$x \in A\cap(B\cup C)$$

por definición de intersección, tenemos que

$$x \in A \quad y \quad x \in B\cup C$$

esto quiere decir que x es un elemento de A y al menos de uno de los conjuntos B ó C. Por lo tanto x es un elemento de $A\cap B$ ó x es un elemento de $A\cap C$, es decir

$$x \in A\cap B \text{ ó } x \in A\cap C.$$

Esto implica que

$$x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

lo cual demuestra la afirmación (a).

(b) Si x es un elemento arbitrario de $(A\cap B)\cup(A\cap C)$, x por la definición de unión deberá pertenecer al menos a uno de los conjuntos $A\cap B$ ó $A\cap C$. Es decir

$$x \in (A\cap B)\cup(A\cap C) \Rightarrow x \in A\cap B \text{ ó } x \in A\cap C.$$

Vemos entonces que x es siempre elemento de A y le queda la alternativa de pertenecer a B ó a C.

De aquí que podamos afirmar que

$$x \in A \quad y \quad x \in B \cup C,$$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

lo cual demuestra la afirmación (b).

(a) y (b) corroboran que la parte (i) de la proposición es cierta.

La parte (ii) se demuestra de manera análoga.

q.e.d.

Podemos preguntarnos como se transforman las propiedades anteriores al obtener su complemento. A esto nos ayudarán las llamadas Leyes de De Morgan.

Proposición 4. (Leyes de De Morgan) Si A y B son dos conjuntos arbitrarios, se cumple que:

$$\text{i)} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$y \quad \text{ii)} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

i) Mostremos que se cumple la contención mutua.

Sea $x \in (A \cup B)^c$. El que x sea un elemento del complemento de $A \cup B$ significa que x *no* es un elemento del conjunto

$A \cup B$. Y esto a su vez significa que x *no* pertenece *ni* a A *ni* a B (bastaría que perteneciera a alguno de los dos para pertenecer a la unión).

Tenemos entonces hasta ahora que:

$$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B$$
$$\Rightarrow x \notin A \quad y \quad x \notin B$$

Por definición de complemento, esto implica que

$$x \in A^c \quad y \quad x \in B^c$$

y de aquí que

$$x \in A^c \cap B^c$$

Hemos mostrado que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

Sea ahora $x \in A^c \cap B^c$. Esto implica que

$$x \in A^c \quad y \quad x \in B^c$$
$$\Rightarrow x \notin A \quad y \quad x \notin B$$

Si x *no* pertenece a A *ni* a B entonces será imposible que pertenezca a la unión de esos conjuntos i.e.

$$x \notin A \cup B,$$

de donde obtenemos que $x \in (A \cup B)^c$.

Hemos mostrado que $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

Es decir, se cumple la doble contención y por lo tanto la igualdad (i).

(ii) Sea $x \in (A \cap B)^c$. Por definición de complemento,

$$x \notin A \cap B$$

Como x no pertenece a la intersección de A y B, se tendrá entonces que x no pertenece a A ó que x no pertenece a B (si perteneciera a los dos, pertenecería a la intersección), es decir

$$\begin{aligned} & x \notin A \quad ó \quad x \notin B \\ \Rightarrow\ & x \in A^c \quad ó \quad x \in B^c \\ \Rightarrow\ & x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos demostrado que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$

Si $x \in A^c \cup B^c$, entonces $x \in A^c$ ó $x \in B^c$, esto implica que $x \notin A$ ó $x \notin B$, tendremos que x no podrá pertenecer a la intersección de esos conjuntos (se necesita que pertenezca a los dos), por lo tanto podemos escribir

$$x \notin A \cap B$$

y de aquí

$$x \in (A \cap B)^c$$

Esto es $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$

Hemos mostrado la doble contención y con ello la igualdad (ii)

q.e.d.

Ejercicios

1.- Demostrar que es una relación transitiva , es decir que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

2.- ¿Cuál es Ω^c? y ¿ϕ^c?

3.- Demostrar que $A \subseteq (A^c)^c$

4.- Demostrar que

i) $A \cap A = A$

ii) $B \cap A \subseteq A \cap B$

5.- Demostrar que

i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ii) $A \cap \phi = \phi$

iii) $A \cap \Omega = A$

6.- Demostrar que

i) $A \cup A = A$

ii) $A \cup B = B \cup A$

iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

7.- Demostrar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

8.- Demostrar que $(A \cap (B \cup C))^c = A^c \cup (B^c \cap C^c)$

y $(A \cup (B \cap C))^c = A^c \cap (B^c \cup C^c)$