Miscelánea Matemática **65** (2018) 85-94 SMM

Gráficas y digráficas $r-$hipohamiltonianas

Teresa Hoekstra Mendoza y Rita Zuazua
Facultad de Ciencias, UNAM
allizdog01@gmail.com, ritazuazua@ciencias.unam.mx

Resumen

Una gráfica G es hamiltoniana si tiene un ciclo hamiltoniano, es decir, un ciclo que recorre todos sus vértices. Uno de los problemas NP-completos más estudiados en la teoría de gráficas es el problema de hamiltonicidad. La existencia de gráficas no hamiltonianas dió lugar a la siguiente pregunta: ¿existirán gráficas no hamiltonianas tal que al quitarles cualquier conjunto de r vértices se obtenga una gráfica que si es hamiltoniana? Las gráficas que responden a la anterior pregunta son llamadas gráficas $r-$hipohamiltonianas. En este trabajo se presenta una vista panorámica de resultados clásicos y actuales en gráficas y orientaciones de gráficas.

1. Conceptos básicos

Los primeros estudios que conocemos sobre las gráficas hipohamiltonianas datan de los años sesenta, ver por ejemplo, Sousselier [7], Gaudin, Herz y Rossi [4] y Lindgren [6].

Sin embargo, el actual artículo está basado en los trabajos posteriores de Carsten Thomassen, [8] y [9].

Una gráfica simple G consiste de un par de conjuntos finitos ($V(G)$ y $A(G)$), donde los elementos del conjunto $V(G)$ son llamados los vértices de G, $A(G) \subset V(G) \times V(G)$ cuyos elementos son llamados las aristas de G y se satisfacen las siguientes dos propiedades:

- si $(v, w) \in A(G)$ implica que $v \neq w$.
- si $(v, w) \in A(G)$ entonces $(w, v) \notin A(G)$.

La primer condición nos dice que la gráfica no tiene lazos y la segunda nos garantiza la existencia de a lo más una arista entre dos vértices.

Keywords and phrases: gráficas, digráficas, ciclos hamiltonianos.

El orden de una gráfica G es la cardinalidad del conjunto de vértices de G.

Con frecuencia escribiremos la arista $a = (v, w)$ como $a = vw$ y diremos que los vértices v y w inciden en la arista a y que son vecinos o adyacentes. Si $v \in V(G)$, $N(v)$, llamada la vecindad de v, es el conjunto de todos sus vecinos, es decir, $N(v) = \{w \in V(G)|vw \in A(G)\}$. La cardinalidad de $N(v)$ o el número de vecinos de v se conoce como el grado de v y se denota como $\delta(v)$. El grado mínimo de una gráfica G se define como $\delta(G) = \text{mín } \delta(v)$ tal que $v \in V(G)$.

Un ciclo C en una gráfica G es una sucesión de aristas $a_1, a_2, \dots, a_p$ con $a_i = v_i v_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, p$ tal que:

- los vértices $v_1, v_2, \dots, v_p$ son todos diferentes, y
- el vértice $v_1 = v_{p+1}$.

La longitud de un ciclo es el número de aristas que recorre. Por la definición de gráfica simple, si C es un ciclo tiene longitud mayor o igual a tres. Un ciclo de longitud $p \geq 3$ se denota como $C_p = (v_1 v_2 \dots v_p)$.

Un ciclo C en una gráfica se llama hamiltoniano si tiene longitud igual al orden de G, es decir, recorre todos los vértices de la gráfica. La gráfica G es hamiltoniana si tiene un ciclo hamiltoniano.

Es claro que no toda gráfica es hamiltoniana, lo cual da lugar al siguiente problema, ¿existirán gráficas no hamiltonianas pero tal que al quitarles un número fijo de vértices se obtenga una gráfica que si es hamiltoniana? Esta pregunta dió lugar a la siguiente definición.

Definición 1.1. Sea r un entero positivo mayor o igual a uno, una gráfica G es $r-$hipohamiltoniana si G no es hamiltoniana, pero al quitar cualquier subconjunto de vértices de G de cardinalidad r y sus aristas adyacentes, se obtiene una gráfica hamiltoniana.

Nos concentraremos primero en el caso de $r = 1$ y diremos simplemente que la gráfica es hipohamiltoniana.

2. Gráficas hipohamiltonianas de orden mínimo

Sea G una gráfica y $v \in V(G)$, denotamos como $G - v$ la gráfica que se obtiene al eliminar en G el vértice v y todas sus aristas adyacentes.

Definición 2.1. Una gráfica hipohamiltoniana G es una gráfica que no es hamiltoniana pero tal que para todo vértice $v \in V(G)$, la gráfica $G - v$ sí es hamiltoniana.

Iniciamos con un lema que nos da una cota inferior y superior para el grado mínimo de una gráfica hipohamiltoniana.

Lema 2.2. *Si G es una gráfica hipohamiltoniana de orden n entonces $3 \leq \delta(G) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.*

Demostración. Supongamos que existe un vértice $v \in V(G)$ tal que $\delta(v) < 3$. Sea w adyacente a v en G, en la gráfica $G - w$, el vértice v tiene grado $\delta(v) < 2$, por lo tanto, no puede haber un ciclo hamiltoniano en $G-w$ que lo contenga, lo cual contradice que $G-w$ sea hamiltoniana.

Ahora supongamos que existe un vértice $v \in V(G)$ con $\delta(v) > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Sea C un ciclo hamiltoniano en $G - v$, por el grado de v, existen dos vértices adyacentes a v, w y z que son consecutivos en el ciclo C, entonces cambiando la arista wz por las aristas wv, vz se tiene un ciclo hamiltoniano en G, lo cual contradice que G no es hamiltoniana. □

Una gráfica G es cúbica si $\delta(v) = 3$ para todo vértice $v \in G$. Es un resultado básico de teoría de las gráficas que para toda gráfica G se cumple la siguiente igualdad, $2|A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \delta(v)$. Lo cual implica directamente que si una gráfica es cúbica entonces tiene orden par.

Lema 2.3. *Si G es una gráfica hipohamiltoniana cúbica entonces G no tiene triángulos o ciclos de longitud tres.*

Demostración. Supongamos que G tiene un ciclo (abc) y sea C un ciclo hamiltoniano en $G - a$. Como G es cúbica, los vértices b y c tienen grado dos en $G - a$ y el ciclo C pasa por la arista bc. Pero entonces $(C - (b, c)) \cup (b, a) \cup (a, c)$ es un ciclo hamiltoniano en G. □

Pregunta 1: ¿cuál es el orden mínimo de una gráfica hipohamiltoniana?

Teorema 2.4. *No existen gráficas hipohamiltonianas de orden $n < 10$.*

Demostración. Los casos $3 \leq n \leq 7$ son inmediatos del lema 2.2.

1. Sea G una gráfica hipohamiltoniana de orden $n = 8$ con $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $C = (1234567)$ un ciclo hamiltoniano en $G - 8$. Por el lema 2.2, G es cúbica, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $N(8) = \{1, 3, 5\}$, con lo cual los vértices $\{1, 3, 5, 8\}$ ya tienen grado tres en G. Por el lema 2.3, en G no puede haber ciclos de longitud tres. Por otro lado, por ser G cúbica, todos sus vértices tienen grado tres por lo que debemos tener las aristas $(2, 6)$ y $(7, 4)$, con lo cual tenemos el ciclo hamiltoniano (762345817) en G, lo cual es una contradicción.
2. Sea G una gráfica hipohamiltoniana de orden $n = 9$ con $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Por el lema 2.2, G no es cúbica y todo vértice tiene grado mínimo tres y máximo cuatro. Sea $v \in V(G)$ con $\delta(v) = 4$. Sea $v = 9$, $C = (12345678)$ un ciclo hamiltoniano en $G - 9$ y supongamos sin pérdida de generalidad que

$N(9) = \{1, 3, 5, 7\}$. El siguiente cuadro nos demuestra que el conjunto de vértices $\{2, 4, 6, 8, 9\}$ es un conjunto independiente, es decir, no existen aristas entre sus vértices, en otro caso llegaríamos a que la gráfica G es hamiltoniana.

Arista agregada	Ciclo hamiltoniano formado en G
$(2, 4)$	(2439567812)
$(2, 6)$	(2654397812)
$(2, 8)$	(8219345678)
$(6, 4)$	(4659781234)
$(8, 4)$	(8432195678)
$(6, 8)$	(6879123456)

Cuadro 1. Ciclos hamiltonianos.

Por otro lado, cada vértice par debe ser adyacente al menos a un vértice impar para tener grado mayor o igual que tres, y cada vértice impar, a excepción del 9 ya tiene grado tres, por lo tanto, el conjunto de vértices $\{1, 3, 5, 7\}$ también es independiente en G. Si $V(G) = V_1 \cup V_2$ donde $V_1 = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ y $V_2 = \{1, 3, 5, 7\}$ y para toda arista $a = vw$, se cumple que $v \in V_1$ y $w \in V_2$, es inmediato ver que en la gráfica $G - \{1\}$ no existen ciclos hamiltonianos, por lo tanto G no es hipohamiltoniana. □

Pregunta 2: ¿Qué sucede para gráficas de orden n mayor o igual que diez?

En el trabajo de tesis de T. Hoekstra ([5]), se demuestran de manera exhaustiva las siguientes dos afirmaciones:

- para $n = 10$ existe, salvo isomorfismo, una única gráfica hipohamiltoniana, a saber, la gráfica de Petersen (figura 1).
- no existen gráficas hipohamiltonianas de orden 11 y 12.

Por otro lado, en [2] se demuestra que no hay gráficas hipohamiltonianas de orden 14 y en [1] se demuestra que no hay gráficas hipohamiltonianas de orden 17.

3. Gráficas hipohamiltonianas de orden $10 \leq n$ y $n \neq 11, 12, 14, 17$

Una vez que sabemos de la existencia de una única gráfica hipohamiltonina de orden mínimo 10, y que no existen gráficas hipohamiltonianas de orden $n \in \{11, 12, 14, 17\}$, es natural hacernos la siguiente pregunta.

Pregunta 3: ¿Existen gráficas hipohamiltonianas diferentes a la gráfica de Petersen?

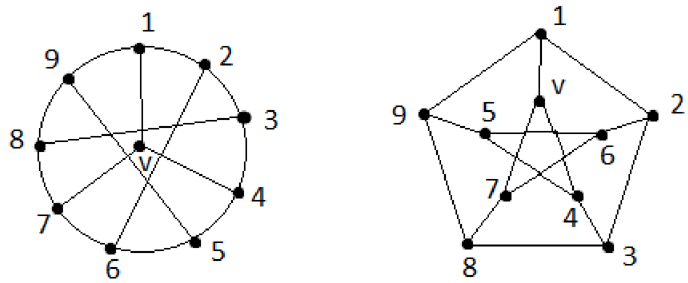

Figura 1. Gráfica de Petersen.

A continuación vamos a definir una familia infinita de gráficas hipohamiltonianas de orden $3m+4$ para $m \geq 2$, conocidas como las gráficas $G_3(m)$, ver [3].

Para $m \geq 2$, se define el conjunto de vértices de $G_3(m)$,

$$V(G_3(m)) = \{b, u_1, u_2, u_3, a_1, a_2, \ldots a_{3m}\}$$

y su conjunto de aristas,

$$A(G_3(m)) = \begin{cases} (a_i, a_{i+1}), (a_{3m}, a_1) & \text{si} \quad i = 1, 2, \ldots, 3m-1 \\ (u_i, b) & \text{si} \quad i = 1, 2, 3 \\ (a_i, u_j) & \text{si} \quad i \equiv j (\text{mod } 3). \end{cases}$$

Teorema 3.1. *Las gráficas $G_3(m)$ son hipohamiltonianas para $m \geq 2$.*

Demostración. Primero veamos que $G_3(m)$ no es hamiltoniana. Supongamos lo contrario y sean γ un ciclo hamiltoniano en $G_3(m)$ y α el ciclo formado por los vértices a_i's. Como γ debe pasar por el vértice b, γ debe contener un segmento de la forma $u_i b u_j$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $i = 1$ y $j = 2$. De la misma forma como γ debe pasar por todos los vértices de α, tenemos que γ contiene a $\alpha - \{(a_k, a_{k+1}), (a_n, a_{n+1})\}$. Esto quiere decir que γ contiene a las aristas (a_k, u_j) y (a_n, u_i) con $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Caso 1: $j = 1$, esto implicaría que existe la arista (a_{k+1}, u_2) por lo que $n = 3$ pero también tendría que existir la arista (a_{n+1}, u_3) lo cual es una contradicción.

Caso 2: $j = 2$, tenemos que existe la arista (a_{k+1}, u_3) por lo que $n = 3$ lo cual genera un ciclo distinto de γ contenido en γ lo cual es una contradicción.

Caso 3: $j = 3$ entonces existe la arista (a_{k+1}, u_1), $n = 2$ y existe la arista (a_{n+1}, u_3) pero en este caso γ sería la unión de dos ciclo ajenos lo cual es una contradicción.

Para ver que $G_3(m) - v$ es hamiltoniana basta considerar 3 casos: $G_3(m) - a_i$, $G_3(m) - u_i$ y $G_3(m) - b$ que contienen los ciclos hamiltonianos que se muestran en la figura 2. $\square$

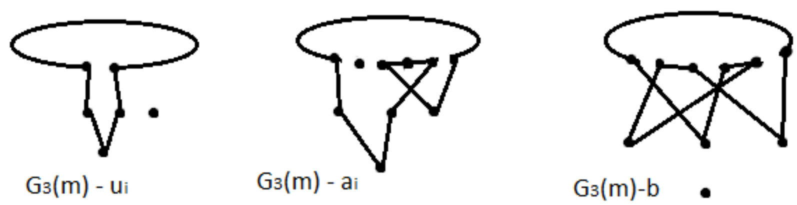

Figura 2. Ciclos en $G_3(m) - v$.

Pregunta 4: ¿Existe alguna operación de gráficas que nos permita construir una gráfica hipohamiltoniana a partir de una o más gráficas?

A continuación, daremos la construcción de Thomassen (ver [8]), para obtener una nueva gráfica hipohamiltoniana a partir de dos gráficas hipohamiltonianas.

Sean G_1 y G_2 dos gráficas hipohamiltonianas que contienen cada una un vértice de grado 3, x y y respectivamente. Sean $N(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $N(y) = \{y_1, y_2, y_3\}$. Sean $H_1 = G_1 - x$ y $H_2 = G_2 - y$.

Entonces nuestra nueva gráfica $G = G_1 * G_2$ es la gráfica obtenida al tomar la unión de H_1 con H_2 identificando los vértices x_i con y_i en un solo vértice para $i = 1, 2, 3$ como se puede ver en la figura 3.

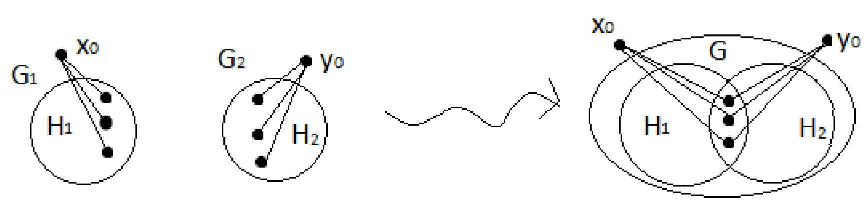

Figura 3. La construcción de Thomassen.

Teorema 3.2. *Si G_1 y G_2 son gráficas hipohamiltonianas entonces la gráfica $G = G_1 * G_2$ es hipohamiltoniana.*

Demostración. Primero veamos que G no es hamiltoniana. Supongamos lo contrario y sea γ un ciclo hamiltoniano en G. Tenemos que $\gamma = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ donde cada P_i es una $x_i x_{i+1}$ trayectoria.

Como $V(H_1) \cap V(H_2) = \{x_1, x_2, x_3\}$ tenemos que $P_i \cup P_j \subset H_k$ con $i, j, k \in \{1, 2\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $i = k = 1$ y $j = 2$. Entonces $P_1 \cup P_2$ es una trayectoria hamiltoniana en H_1 y $P_1 \cup P_2 \cup \{x_1 x x_3\}$ es un ciclo hamiltoniano en G_1 lo cual es una contradicción.

Para ver que $G - z$ es hamiltoniana para todo $z \in V(G)$ tenemos dos casos:

Caso 1: $z \notin H_1 \cap H_2$. Podemos suponer que $z \in H_1$. Sea Γ un ciclo hamiltoniano en $G_1 - z$, entonces $\Gamma - x$ es una $x_i x_j$ trayectoria hamiltoniana en H_1 con $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$. Análogamente sea Γ' un ciclo hamiltoniano en $G_2 - x_k$ con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces $\Gamma' - y$ es una $x_i x_j$ trayectoria hamiltoniana en H_2. Por lo tanto $(\Gamma - x) \cup (\Gamma' - y)$ es un ciclo hamiltoniano en $G - z$.

Caso 2: $z \in H_1 \cap H_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $z = x_1$. Consideremos $G - z$, como G_i es hipohamiltoniana $G_i - z$ tiene un ciclo hamiltoniano Γ_i para $i = 1, 2$. Entonces $\Gamma_i - x$ es una $x_2 x_3$ trayectoria hamiltoniana en H_i. Por lo tanto $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es un ciclo hamiltoniano en $G - z$. □

Observación 3.3. Si los órdenes de las gráficas G_1 y G_2 son m y n, respectivamente, entonces la gráfica $G = G_1 * G_2$ tiene orden $m+n-5$.

Olvidémonos por un momento de la teoría de gráficas y veamos el siguiente teorema de teoría de los números.

Teorema 3.4. *Sean $x, y \in \mathbb{N}$ definimos la operación $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $x * y = x + y - 5$. Sea $A = \{10, 13, 16, 19, 22\}$, entonces dado $x \geq 10 \in \mathbb{N} - \{11, 12, 14, 17\}$ existen $x_1, x_2, \ldots, x_j \in A$ tales que $x = x_1 * x_2 * \cdots * x_j$.*

Demostración. Primero notemos que: $15 = 10 * 10$, $18 = 10 * 13$, $20 = 10 * 10 * 10$, $21 = 10 * 16$.

Procederemos por inducción tomando como base $n = 22$. Sea $k \in \mathbb{N}, k \geq 23$ y supongamos que para todo m tal que $23 \leq m \leq k$ se cumple la hipótesis de inducción. En particular tenemos que existen $x_1, x_2, \ldots, x_j \in A$ tales que $k - 2 = x_1 * x_2 * \cdots * x_j$.

Caso 1: $x_1 \neq 22$. En este caso tenemos que $x_1 + 3 \in A$. Entonces $k + 1 = x_1 + 3 * x_2 * ... * x_j$.

Caso 2: $x_1 = 22$. Observemos que $25 = 10 * 10 * 10 * 10$. Entonces $x_1 + 3 = 25$ y tenemos que $k + 1 = 10 * 10 * 10 * 10 * x_2 * ... * x_j$. □

La construcción de Thomassen junto con este teorema de teoría de los números nos permiten tener el siguiente resultado sobre la existencia de gráficas hipohamiltonianas.

Teorema 3.5. *Para todo $n \geq 10 \in \mathbb{N} - \{11, 12, 14, 17\}$ existe una gráfica hipohamiltoniana de orden n.*

4. Digráficas hipohamiltonianas

Si a las aristas de una gráfica les ponemos orientación o hablamos de pares ordenados de vértices, tenemos flechas en lugar de aristas y damos lugar a lo que se conoce como una digráfica.

Observemos que en el caso de digráficas la flecha $(u, v) \neq (v, u)$. Además en una digráfica G podemos tener un ciclo de longitud dos de la forma (uvu).

Si G es una digráfica y $v \in V(G)$, definimos el exgrado e ingrado de v, respectivamente, como $\delta^+(v) = |N^+(v)| = |\{w \in V(G)|vw \in A(G)\}|$ y $\delta^-(v) = |N^-(v)| = |\{w \in V(G)|wv \in A(G)\}|$, respectivamente.

Un ciclo orientado C en una digráfica se llama hamiltoniano si tiene longitud igual al orden de G. La digráfica G es hamiltoniana si tiene un ciclo orientado hamiltoniano.

De manera similar al caso de gráficas, sea r un entero positivo mayor o igual a uno, una digráfica G es $r-$hipohamiltoniana si G no es hamiltoniana, pero al quitar cualquier subconjunto de vértices de G de cardinalidad r y sus flechas adyacentes, se obtiene una digráfica hamiltoniana.

Si $r = 1$ diremos simplemente que la digráfica es hipohamiltoniana. Veamos ahora dos propiedades básicas de digráficas hipohamiltonianas.

Lema 4.1. *Sea G una digráfica hipohamiltoniana. Entonces para todo $v \in V(G)$ tenemos que $\delta^+(v) \geq 2$ y $\delta^-(v) \geq 2$.*

Demostración. Sea $v \in V(G)$. Consideremos $x \in N^+(v)$. Como G es hipohamiltoniana tenemos que $G - x$ tiene un ciclo hamiltoniano. Esto quiere decir que existe $y \in V(G)$, $y \neq x$ tal que $y \in N^+(v)$. Por lo tanto $\delta^+(v) \geq 2$. Análogamente si tomamos $z \in N^-(v)$ obtenemos que $\delta^-(v) \geq 2$. □

Lema 4.2. *Sea G una gráfica orientada hipohamiltoniana de orden n. Entonces para todo $v \in V(G)$ tenemos que $\delta^+(v) + \delta^-(v) < n - 1$.*

Demostración. Supongamos lo contrario y sea $x \in V(G)$ tal que $\delta^+(x) + \delta^-(x) = n - 1$. Como G es hipohamiltoniana existe un ciclo hamiltoniano C en $G - x$. Como C es hamiltoniano tiene longitud $n - 1$ esto quiere decir que x es adyacente a todos los vértices de C. Pero esto implica que existen $w, v \in C$ tales que la flecha $(w, v) \in C$ y $(w, x), (x, v) \in A(G)$ por lo que podemos sustituir la flecha (w, v) en C por la trayectoria wxv obteniendo un ciclo hamiltoniano en G lo cual es una contradicción. □

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado de C. Thomassen, ver [9].

Teorema 4.3. *Existen digráficas hipohamiltonianas de orden n para toda $n \geq 6$.*

5. Gráficas y digráficas r-hipohamiltonianas para $r \geq 2$

En esta sección presentamos los resultados más actuales y conocidos de gráficas y digráficas r-hipohamiltonianas para $r \geq 2$.

Iniciamos con la siguiente definición que nos permitirá entender el resultado principal de esta sección.

Definición 5.1. Para un entero $n \geq 2$ y un conjunto de saltos $S \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$, la digráfica circulante $\overrightarrow{C}_n\,(S)$ se define como

$$V(\overrightarrow{C}_n\,(S)) = \{0, 1, ..., n-1\}$$

y

$$A(\overrightarrow{C}_n\,(S)) = \{(i, (i+j) \mod n) : 0 \leq i \leq n-1, j \in S\}.$$

Finalizamos nuestro artículo con los siguientes:

- Hasta el momento no se conoce la existencia de gráficas r- hipohamiltonianas para $r \geq 2$.
- Hasta el momento no se conoce la existencia de digráficas r-hipohamiltonianas para $r \geq 3$.
- Las únicas familias de digráficas 2-hipohamiltonianas son las dos siguientes, que pueden verse en detalle en [10].
  1. Si $k = 6m$ y $m \geq 2$, la digráfica circulante $\overrightarrow{C}_{2k}\,(2, 3, k+2)$ es $r-$hipohamiltoniana para $r = 1, 2$.
  2. Si $k = 15m$ y m es impar, la digráfica circulante $\overrightarrow{C}_{2k}\,(5, 6, k+5)$ es $r-$hipohamiltoniana para $r = 1, 2$.

Agradecimientos: Las autoras agradecen el apoyo recibido por los proyectos PAPIIT-IN114415 y PAPIME-PE110616.

Bibliografía

[1] R. Alred, M. D. Brendan y N. Wormald, «Small hypohamiltonian graphs», *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, vol. 23, 1997, 143 –152.

[2] J. B. Collier y E. F. Schmeichel, «Systematic searches for hypohamiltonian graphs», *Networks*, vol. 8, núm. 3, 1978, 193 – 20.

[3] J. Doyen y V. van Diest, «New families of hypohamiltonian graphs», *Discrete mathematics*, 1975, 225–236.

[4] T. Gaudin, J. Herz y P. Rossi, «Solution du probleme no.29», *Rev. Franc. Rech. Operat.*, vol. 8, 1964, 214–218.

[5] M. T. Hoekstra Mendoza, «Gráficas hipohamiltonianas», Asesora R. Zuazua, presentada el 2 de marzo del 2017, Tesis de licencitura.

[6] W. F. Lindgren, «An infinite class of hypohamiltonian graphs», *Amer. Math. Monthly*, vol. 74, 1967, 1087–1089.

[7] R. Sousselier, «Probleme no. 29: Le cercle des irascibles», *Rev. Franc. Rech. Operat.*, vol. 7, 1963, 405–406.

[8] C. Thomassen, «Hypohamiltonian and hypotraceable graphs», *Discrete mathematics*, vol. 9, 1974, 91–96.

[9] ______, *Hypohamiltonian graphs and digraphs. Theory and applications of graphs, (Proc. Internat. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1976)*, Lecture Notes in Math., 642, Springer, Berlin, 1978.

[10] S. A. van Aardt, A. P. Burger, M. Frick, B. Llano y R. Zuazua, «Infinite families of 2−hypohamiltonian/2-hypotraceable oriented graphs», *Graphs Combin.*, vol. 30, núm. 4, 2014, 783–800.