Miscelanea Matemática 24 (1996) 15–22 SMM

El gran juego de la oca

Andrés Díaz
Departamento de Físico-Matemáticas
Universidad de las Américas

Guillermo Pastor
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

El objetivo de esta nota es presentar algunos conceptos y resultados clásicos de la teoría de las cadenas de Markov absorbentes a través de un análisis del juego de la oca. Deseamos expresar nuestro agradecimiento a Rafael Ramos y a Araceli Reyes por su valiosa ayuda en el manejo computacional de las matrices.

1 Descripción del juego

El juego de la oca clásico emplea un tablero con sesenta y tres casillas. Hay trece ocas colocadas en las casillas congruentes a cero y cinco módulo nueve. Los jugadores, que alternan turnos, tiran un par de dados y avanzan de acuerdo al total de puntos obtenidos. Se tienen además las siguientes reglas:

i) Si al comienzo del juego salieran en los dados los números 5 y 4, se pondrá la ficha en la casilla 26, y si salieran 6 y 3 se pondrá en la casilla 53.

ii) El que llegue a una casilla ocupada por otro, sacará a éste de allí y el sacado tendrá que ocupar la casilla del que lo sacó.

iii) Cuando al tirar los dados se deba ir a una de las casillas que tengan oca, se contará de nuevo los mismos tantos hasta llegar a donde no lo haya.

iv) El jugador que al comienzo saque 6 puntos colocará su ficha en la casilla 12.

v) Cuando se llegue a la venta (casilla 19) se permanecerá en ella hasta que cada jugador juegue dos veces.

vi) El que llegue al pozo (casilla 31) o a la cárcel (casilla 52) permanecerá ahí hasta que otro le saque.

vii) El que llegue al laberinto (casilla 42) volverá a la casilla 39.

viii) Quien llegue a la muerte (casilla 58) comenzará de nuevo el juego.

ix) Quien saque más puntos del 63, volverá atrás tantos puntos como sacó de más, y si llega a una oca, seguirá contando hasta donde no lo haya.

x) El venturoso jugador que llegue a la casilla 63 ganará el juego.

2 Juego de la oca solitario

En esta sección supondremos, para facilitar tanto la descripción del modelo como los cálculos numéricos, que hay un único jugador. A cada una de las casillas a las que puede llegar el jugador a lo largo del juego les llamaremos un *estado del juego*. Si tomamos en cuenta la posición fuera del tablero, en que estamos, por ejemplo, al inicio del juego y que llamaremos casilla 0, hay en total 64 casillas. Sin embargo, no es necesario considerar las trece casillas con ocas, pues el jugador nunca puede quedar ahí. Debemos excluir también la casilla 1, a la que nunca se puede llegar. Las casillas 42 (laberinto) y 58 (muerte) las identificaremos con las casillas 0 y 39, respectivamente. Debemos añadir finalmente dos casillas fantasmas, la 19' y la 19''. Diremos que el jugador se encuentra en la casilla 19 (la venta) si acaba de caer ahí, en la casilla 19' si ya perdió un turno, y en la 19'' si ya perdió los dos turnos de la regla (v). Así, tenemos un total de cincuenta estados posibles.

De estos cincuenta estados, tres son *absorbentes*, pues si llegamos al pozo, la cárcel o venturosamente a la casilla 63, debemos permanecer ahí. Los cuarenta y siete estados restantes son *no-absorbentes*.

Es conveniente numerar los estados posibles colocando primero a los estados absorbentes. Los estados 1, 2 y 3 corresponderán a las casillas 31 (pozo), 52 (cárcel) y 63, respectivamente. Los cuarenta y siete estados no-absorbentes los tomaremos de acuerdo al orden en que aparecen las casillas, de manera que el estado 4 corresponde a la casilla 0, el estado 5 a la casilla 2, y así sucesivamente, hasta que al estado 50 le corresponde a la casilla 62.

Al inicio del juego el jugador se encuentra fuera del tablero, en la casilla 0. Las casillas a las que tiene acceso en el primer turno son la 2, 3, 4, 7, 8, 26, 53, 10, 11 y 12. Observemos primero que avanzará a la casilla 2 únicamente cuando al tirar los dados obtiene 1 y 1; a la casilla 3 si obtiene 1 y 2, o bien, 2 y 1; a la casilla 4 si obtiene en los dados las combinaciones 1 y 3, 2 y 2, o bien, 3 y 1, etcétera. Puesto que hay 36 maneras distintas de tirar los dados, es fácil calcular las diferentes probabilidades con las que el jugador puede llegar a las casillas arriba mencionadas. La siguiente tabla muestra las casillas accesibles en el primer turno con sus probabilidades.

2	3	4	7	8	10	11	12	26	53
1/36	2/36	3/36	6/36	5/36	7/36	2/36	6/36	2/36	2/36

Por ejemplo, para llegar a la casilla 10 es necesario obtener cinco o diez puntos con los dados. Como hay cuatro combinaciones de los dados que suman cinco, y tres combinaciones que suman diez, en total hay siete combinaciones que nos llevan a la casilla 10.

De manera análoga calculamos las probabilidades con que podemos pasar del estado i a los otros estados. Esta información la podemos expresar por medio de una matriz P de tamaño 50×50, donde el elemento p_{ij} es la probabilidad de pasar del estado i al estado j. Así, por ejemplo, el cuarto renglón de P coresponde a las probabilidades de pasar del estado 4 (casilla 0) a los otros estados, por lo que es de la forma

$$\frac{1}{36}(0,0,0,0,1,2,3,0,6,5,7,2,6,0,\ldots,0,2,0,\ldots,0,2,0,\ldots,0)\ .$$

A P se le conoce como la *matriz de transición del juego.* De hecho, P tiene la forma

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz identidad 3×3, 0 es la matriz cero 3×47, R es una matriz 47×3 y Q es una matriz 47×47.

¿Es posible que el juego pueda continuar indefinidamente? Es claro que de cada estado no-absorbente j es posible alcanzar un estado absorbente. Sea n_j el mínimo número de turnos necesarios para alcanzar un estado absorbente, partiendo del estado j. Sea p_j la probabilidad de que partiendo del estado j no alcancemos un estado absorbente en n_j turnos. Entonces, $p_j < 1$. Sea n el máximo de las n_j y sea p el máximo de las p_j. Así, la probabilidad de no alcanzar un estado absorbente en n turnos es menor o igual a p, la probabilidad de no alcanzar un estado absorbente en $2n$ turnos es menor o igual a p^2, etcétera. Como $p < 1$, estas probabilidades tienden a cero. De modo que hemos probado nuestro primer resultado.

Teorema 1 *La probabilidad de que el jugador caiga en el pozo, la cárcel o la casilla 63 es 1.*

Las potencias de P tienen una interpretación muy útil. La probabilidad de pasar del estado i al estado j en dos turnos viene dada por

$$\sum_{k=1}^{50} p_{ik}p_{kj}$$

que es la entrada ij de la matriz P^2. En general, tenemos que las entradas de la matriz P^n corresponden a las probabilidades de pasar del estado i al estado j en n turnos. El teorema anterior es por tanto equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} Q^n = 0\,.$$

Entonces la serie geométrica

$$I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots$$

converge a la matriz $N = (I - Q)^{-1}$. La entrada n_{ij} de esta matriz es la suma de las probabilidades de pasar del estado no-absorbente i al estado no-absorbente j en cero turnos, un turno, dos turnos, tres turnos, etcétera. Si pensamos en estas probabilidades como las fracciones de tiempo de los diferentes turnos que estamos en promedio en el estado j, cuando partimos del estado i, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2 *Las entradas n_{ij} de la matriz N representan el número esperado de veces que pasamos en el estado no-absorbente j si partimos del estado no-absorbente i.*

Con la ayuda de una computadora personal calculamos la matriz N. Su primer renglón viene dado, redondeando a dos decimales, por

($\underline{1.66}$, 0.05, 0.09, 0.14, $\underline{0.01}$, 0.30, 0.26, 0.39, 0.18, 0.38, 0.13, 0.19, 0.21, 0.21, 0.22, 0.22, 0.22, 0.23, 0.23, 0.20, 0.23, 0.20, 0.33, 0.21, 0.23, 0.22, 0.22, 0.23, 0.21, 0.19, 0.20, 0.42, 0.20, 0.28, 0.30, 0.22, 0.24, 0.24, 0.36, 0.27, 0.52, 0.46, 0.55, $\underline{0.66}$, 0.73, $\underline{0.86}$, 0.85)

Vemos entonces, que en promedio, antes dé ser absorbidos caemos en la muerte (casilla 58) 0.66 veces. La casilla que menos visitamos, en promedio, es la seis, mientras que la más visitada, después de la casilla 0 de la que debemos empezar, es la 61. También podemos apreciar que los estados cercanos al 63 son más visitados que los otros estados. Esto es una consecuencia de la regla (ix) que señala que el jugador rebota en la casilla 63.

Si sumamos ahora todas las entradas del renglón i de N obtenemos el número promedio de turnos que pasamos en los diferentes estados no-absorbentes cuando partimos del estado i. El siguiente resultado se sigue fácilmente.

Teorema 3 *La suma de las entradas de cada uno de los renglones de la matriz N es el número esperado de turnos antes de caer en el pozo, la cárcel o la casilla 63, partiendo de los diferentes estados no-absorbentes.*

La suma de los renglones de N es el vector

($\underline{15.14}$, 15.12, 14.75, 14.86, 14.56, 14.45, 14.36, 14.15, 14.16, 14.04, 14.10, 11.98, 13.6, 13.67, 14.23, 13.23, 12.23, 12.98, 12.77, 12.56, 11.83, 12.33, 12.29, 12.98, 13.32, 13.11, 13.50, 13.16, 13.15, 13.19, 11.00, 13.22, 12.45, 11.89, 11.52, 11.86, 11.97, 11.52, 12.53, 13,17, 12.54, 10.78, 11.48, 11.86, $\underline{10.72}$, 13.09, 12.90)

Así, un juego de la oca solitario toma alrededor de 15.14 jugadas antes de terminar. Una vez que llegamos a la casilla 60, nos toma, en promedio, 10.72 jugadas antes de ser absorbidos.

Es fácil ver que

$$P^n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Y_n & Q^n \end{pmatrix},$$

donde la matriz Y_n es el producto de la n-suma parcial de la serie de N con R, esto es,

$$Y_n = \left(I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots + Q^{n-1}\right) R.$$

Puesto que Y_n tiene como entradas las probabilidades de haber caído en el pozo, la cárcel o la casilla 63 en n turnos, partiendo de un estado no-absorbente, al hacer tender a infinito el número de turnos se llega a nuestro último resultado.

Teorema 4 *Las probabilidades de caer en el pozo, la cárcel o la casilla 63 partiendo de los distintos estados no-absorbentes vienen dadas por las entradas de la matriz NR.*

El primer renglón de NR es

$$(0.226, 0.373, 0.401)$$

El pozo es el estado absorbente en el que menos caemos. Las probabilidades de caer en la cárcel o en la casilla 63 son casi iguales, siendo un poco mayor la probabilidad de terminar en esta última.

Los renglones 12 y 42 de NR, dados por

$$(0.337, 0.322, 0.341)$$

y

$$(0.097, 0.301, 0.602)\,,$$

son los renglones donde la probabilidad de caer en la casilla 63 es menor y mayor. Estos renglones corresponden a las casillas 15 y 55, respectivamente.

3 Juego de la oca con dos o más jugadores

Cuando hay dos o más jugadores, el juego resulta mucho más interesante. Aún cuando teóricamente el análisis del juego puede hacerse como en la sección anterior, computacionalmente se complica demasiado. Como consecuencia de la segunda regla, que obliga al que llegue a una casilla ocupada por otro, sacar a éste de allí y al sacado ocupar la casilla del que lo sacó, el número de estados posibles aumenta considerablemente con el número de jugadores. En el caso de sólo dos jugadores, un estado consiste de a pareja (x, y) de enteros entre 1 y 50, donde únicamente permitimos que los enteros sean iguales para $x = y = 4$ (la casilla 0). Hay entonces $50 \times 49 + 1 = 2451$ estados posibles. Los estados absorbentes son aquellos de la forma $(x, 3)$,

$(3, y)$, además de $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Recordemos que los estados 1, 2 y 3 corresponden al pozo, la cárcel y la casilla 63, respectivamente. Hay entonces 100 estados absorbentes. El lector curioso no tendrá dificultad en comprobar que en caso de tres jugadores hay 117,748 estados posibles, de los cuales 7,059 son absorbentes.

En el caso de juegos semejantes, como *serpientes y escaleras*, donde dos o más jugadores pueden compartir una casilla, el análisis del juego con varios jugadores es muy sencillo [G].

Los resultados que a continuación presentamos fueron obtenidos por medio de un programa de cómputo que simulaba el juego de la oca con varios jugadores. Se hicieron varias corridas con 10,000 simulaciones cada una. Cabe recordar, que a diferencia de los resultados obtenidos arriba, estos representan únicamente aproximaciones de las probabilidades reales. La siguiente tabla muestra el promedio de tiradas del ganador del juego, el número promedio por juego de ocasiones en que algún jugador llega a una casilla ocupada (colisiones), el número promedio de veces que algún jugador cae en el pozo y en la cárcel, así como las correspondientes probabilidades de ser rescatado, es decir, de que otro jugador caiga en el pozo o cárcel y lo sustituya.

jugadores	tiradas	colisiones	caídas en pozo	probabilidad rescate	caídas en cárcel	probabilidad rescate
2	20.8	1.06	0.44	0.15	0.74	0.33
3	20.2	2.87	0.63	0.29	0.99	0.47
4	14.7	5.05	0.75	0.32	1.05	0.48
5	12.4	7.50	0.87	0.35	1.10	0.49
6	11.2	10.35	0.99	0.39	1.14	0.50
7	10.5	13.50	1.11	0.42	1.20	0.51

La probabilidad de que el juego termine en un empate, que puede ocurrir únicamente en el caso de dos jugadores cuando éstos terminan en el pozo y la cárcel, es de 0.22. En la mayoría de la serie de simulaciones se observa que no todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar el juego, de hecho, el primer jugador tiene una ligera ventaja sobre el segundo, el segundo a su vez tiene una ligera ventaja sobre el tercero, etcétera.

En relación a la longitud del número de tiradas del ganador, el juego más largo que simulamos fue de 126 tiradas, mientras que con cierta frecuencia obtuvimos juegos donde el ganador llegaba a la casilla 63 en únicamente dos tiradas. Esto sucede únicamente cuando en el primer tiro los dados muestran 6 y 3, y en el segundo se obtiene 10. Para el caso de un jugador, esta probabilidad es 0.0046 y corresponde a la entrada (4, 63) de la matriz P^2. En el caso de varios jugadores, la probabilidad de que el juego termine en dos tiradas es el producto de la probabilidad de que al menos uno de los jugadores tire 6 y3 en su primer tiro por la probabilidad de obtener 10 en el segundo tiro. La siguiente tabla muestra la probabilidad de que el juego termine en 2 tiradas.

jugadores	1	2	3	4	5	6	7
probabilidad de terminar en dos tiradas	0.005	0.009	0.013	0.017	0.021	0.024	0.028

Referencias

[1] Gadbois, S. *Mr. markov plays chutes and ladders*, The undergraduate mathematics and its applications journal 4 (1993), 31–38.

[2] Kemeny, J., Schleifer, A. Snall, L. and Thompson, G. *Finite mathematics with business applications*, Prince-Hall, 1972.