MISCELANEA MATEMÁTICA **24** (1996) 39–43 SMM

Identidades para la resolución de ecuaciones cúbicas y cuárticas

José Leonardo Sáenz Cetina

División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Introducción. El objetivo de este artículo es mostrar el empleo de dos identidades algebráicas y una trigonométrica que condensan, de una manera muy clara, el camino que se requiere seguir para obtener las raíces de las ecuaciones cúbicas y cuárticas con coeficientes complejos por las fórmulas tradicionales.

1 Ecuaciones cúbicas. El método de Cardano

Como es sabido, el método de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas se apoya en el empleo de una ecuación cuadrática auxiliar a partir de cuyas raíces se construyen las de la cúbica. Para simplificar la obtención de las *fórmulas de Cardano* nosotros sugerimos el uso de la siguiente identidad compleja

$$(A+B+C)\left(A+\omega B+\omega^2 C\right)\left(A+\omega^2 B+\omega C\right)=A^3+B^3+C^3-3ABC\,,$$

en la que ω es una raíz cúbica compleja de la unidad distinta del uno. Veamos ahora cómo se aplica esta identidad. Dada la ecuación cúbica general con coeficientes complejos

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\,,$$

en la que $a\neq 0$, multipliquemos ambos miembros por $27a^2$

$$27a^3x^3+27a^2bx^2+27a^2cx+27a^2d=0\,.$$

Ahora, transformando sucesivamente la ecuación se puede exhibir de las siguientes formas,

$$\begin{aligned}
(3ax)^3 + 3(3ax)^2 b + 9(3ax)ac + 27a^2d &= 0\,,\\
(3ax+b)^3 - 3(3ax)\left(-3ac+b^2\right) + 27a^2d - b^3 &= 0\,,\\
(3ax+b)^3 + 27a^2d - 9abc + 2b^3 - 3(3ax+b)\left(-3ac+b^2\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Comparando esta última expresión con el miembro derecho de la identidad encontramos que si hacemos

$$A = 3ax+b, \quad B^3 + C^3 = 27a^2d - 9abc + 2b^3 \quad \text{y} \quad BC = -3ac + b^2\,,$$

podemos resolver por medio de ésta la ecuación. Para esto, únicamente faltan por determinar los valores de B y C. De las relaciones siguientes

$$\begin{aligned}
B^3 + C^3 &= 27a^2d - 9abc + 2b^3\,,\\
B^3C^3 &= \left(-3ac+b^2\right)^3\,,
\end{aligned}$$

tenemos que B^3 y C^3 no son más que las raíces de la ecuación cuadrática

$$t^2 - \left(27a^2d - 9abc + 2b^3\right)t + \left(-3ac+b^2\right)^3 = 0$$

a la que se suele llamar la *resolvente* de la ecuación cúbica. Sólo hay que tener en cuenta, en adición, que B y C deben cumplir con que

$$BC = -3ac + b^2\,.$$

2 Ecuaciones cúbicas. El método trigonométrico

Para resolver la ecuación cúbica por medio de funciones trigonométricas se usará la siguiente identidad cúbica del seno del ángulo triple:

$$4\operatorname{sen}^3\theta - 3\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}3\theta = 0\,.$$

Necesitamos preparar esta identidad para adaptarla a nuestros propósitos. Para esto, multipliquémosla por 2 y reescribámosla a continuación:

$$\begin{aligned}
8\operatorname{sen}^3\theta - 6\operatorname{sen}\theta + 2\operatorname{sen}3\theta &= 0\,,\\
(2\operatorname{sen}\theta)^3 - 3(2\operatorname{sen}\theta) + 2\operatorname{sen}3\theta &= 0\,.
\end{aligned}$$

Ahora, dada la ecuación cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,,$$

en la que $a \neq 0$, por la sección 1 sabemos que puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$(3ax + b)^3 - 3\,(3ax + b)\left(-3ac + b^2\right) + 27a^2d - 9abc + 2b^3 = 0\,.$$

Una precisión antes de continuar: el caso en que $-3ac + b^2$ es igual a cero, tiene una resolución bastante conocida y por ésto se omitirá. Luego, en lo que sigue de esta sección siempre se supondrá que $-3ac + b^2 \neq 0$. Escojamos un número complejo r tal que

$$r^2 = -3ac + b^2\,.$$

Dividamos ahora la ecuación cúbica entre r^3 y transformemos sucesivamente sus términos para obtener la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned} \frac{(3ax+b)^3}{r^3} - \frac{3\,(3ax+b)\,(-3ac+b^2)}{r^3} + \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{r^3} &= 0\,, \\ \left(\frac{3ax+b}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{3ax+b}{r}\right) + \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{r^3} &= 0\,. \end{aligned}$$

Por lo que, comparando esta igualdad final con la identidad cúbica de seno tenemos que haciendo

$$2\mathrm{sen}\,\theta = \frac{3ax+b}{r} \quad \text{y} \quad 2\mathrm{sen}\,3\theta = \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{r^3}\,,$$

podemos resolver el polinomio cúbico. Para ello, escojamos un número complejo φ cualquiera tal que

$$\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{2r^3}\,.$$

Luego θ y φ se relacionan de la siguiente manera:

$$3\theta = \varphi + 2n\pi, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2\,.$$

Es decir,

$$\theta = \frac{\varphi + 2n\pi}{3}\,, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2\,.$$

3 Ecuaciones cuárticas. El método de Euler

Para el caso de la ecuación cuártica, los métodos que suelen usarse para su resolución son los de Ferrari y de Descartes; sin embargo, a nuestro juicio estos dos métodos no se comparan, en cuanto a sencillez se refiere, con el método de Euler, cuya formulación por medio de una identidad daremos a continuación. El producto notable que sugerimos emplear para facilitar la obtención de las *fórmulas de Euler* es el siguiente:

$$(A+B+C-D)\,(A+B-C+D)\,(A-B+C+D)\,(A-B-C-D)=$$
$$=A^4+B^4+C^4+D^4-2A^2B^2-2A^2C^2-2A^2D^2-2B^2C^2-2B^2D^2-$$
$$-2C^2D^2-8ABCD\,.$$

Para esto, reescribamos la identidad con su lado derecho expresado de la siguiente forma:

$$(A+B+C-D)\,(A+B-C+D)\,(A-B+C+D)\,(A-B-C-D)=$$
$$=A^4-2A^2\left(B^2+C^2+D^2\right)-8ABCD-4\left(B^2C^2+B^2D^2+C^2D^2\right)+$$
$$+\left(B^2+C^2+D^2\right)^2\,.$$

Apliquemos ahora esta identidad. Dada la ecuación cuártica general con coeficientes complejos

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\,,$$

en la que $a\neq 0$, multipliquemos ambos miembros por $256a^3$:

$$256a^4x^4+256a^3bx^3+256a^3cx^2+256a^3dx+256a^3e=0\,.$$

Como en el caso de la cúbica, usemos transformaciones para exhibirla en las siguientes formas:

$$(4ax)^4+4(4ax)^3b+16(4ax)^2ac+64(4ax)a^2d+256a^3e=0\,,$$

$$(4ax+b)^4-2(4ax)^2(-8ac+3b^2)+(4ax)(64a^2d-4b^3)+256a^3e-b^4=0\,,$$

$$(4ax+b)^4-2(4ax+b)^2(-8ac+3b^2)-8(4ax+b)(-8a^2d+4abc-b^3)+$$
$$+256a^3e-64a^2bd+16ab^2c-3b^4=0\,.$$

Comparando lo anterior con el producto notable, encontramos que si hacemos

$$A = 4ax + b, \quad B^2 + C^2 + D^2 = -8ac + 3b^2, \quad BCD = -8a^2d + 4abc - b^3$$

y

$$-4\left(B^2C^2 + B^2D^2 + C^2D^2\right) + \left(B^2 + C^2 + D^2\right)^2 = 256a^3e - 64a^2bd + 16ab^2c - 3b^4,$$

podemos resolver por medio de éste la ecuación. Para lograr ésto notemos que

$$\begin{aligned}
-4\left(B^2C^2 + B^2D^2 + C^2D^2\right) &= 256a^3e - 64a^2bd + 16ab^2c - 3b^4 - \\
&\quad - \left(B^2 + C^2 + D^2\right)^2 \\
&= 256a^3e - 64a^2bd + 16ab^2c - 3b^4 - 64a^2c^2 + \\
&\quad + 48ab^2c - 9b^4 \\
&= -4\left[-64a^3e + 16a^2\left(bd + c^2\right) - 16ab^2c + 3b^4\right].
\end{aligned}$$

De donde

$$B^2C^2 + B^2D^2 + C^2D^2 = -64a^3e + 16a^2\left(bd + c^2\right) - 16ab^2c + 3b^4.$$

Luego, hemos arribado a las siguientes relaciones entre B^2, C^2 y D^2:

$$\begin{aligned}
B^2 + C^2 + D^2 &= -8ac + 3b^2, \\
B^2C^2 + B^2D^2 + C^2D^2 &= -64a^3e + 16a^2\left(bd + c^2\right) - 16ab^2c + 3b^4, \\
B^2C^2D^2 &= \left(-8a^2d + 4abc - b^3\right)^2,
\end{aligned}$$

las cuales nos indican que B^2, C^2 y D^2 no son más que las tres soluciones de la ecuación cúbica.

$$\begin{aligned}
t^3 - \left(-8ac + 3b^2\right)t^2 + \left[-64a^3e + 16a^2\left(bd + c^2\right) - 16ab^2c + 3b^4\right]t - \\
- \left(-8a^2d + 4abc - b^3\right)^2 = 0
\end{aligned}$$

a la que similarmente al caso de la cúbica se suele llamar la *resolvente* de la ecuación cuártica. De nuevo, sólo hay que tomar adicionalmente en cuenta que B, C y D deben cumplir con que

$$BCD = -8a^2d + 4abc - b^3.$$