Miscelánea Matemática **38** (2003) 65–75 SMM

Descomposición de dos Anillos de Funciones Continuas

Rogelio Fernández-Alonso
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-I
09340 México, D.F.
México
rojo99@prodigy.net.mx

Resumen

En este trabajo se estudian por medio de sus idempotentes dos anillos de funciones continuas: $C\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)$ y $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$. Desde este punto de vista ambos anillos son opuestos: el primero sólo con dos idempotentes, 0 y 1; el segundo con tantos idempotentes como números reales. En el segundo caso se da un puente entre un aspecto algebraico y otro topológico, al establecer una correspondencia entre los idempotentes del anillo y los abiertos cerrados de $\mathbb{Q}$ con la topología relativa de $\mathbb{R}$.

1. Preliminares

1.1 Ideales.

En el presente trabajo se denotará por R a un *anillo* cualquiera, que debe entenderse como *anillo asociativo con identidad*, no necesariamente conmutativo.

Un *ideal izquierdo* de R es un subgrupo aditivo I de R tal que $\forall\, a \in I,\ Ra \subseteq I$.

Un *ideal derecho* de R es un subgrupo aditivo I de R tal que $\forall\, a \in I,\ aR \subseteq I$.

Un *ideal* (bilateral) de R es un ideal izquierdo y derecho de R.

Dada una familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de ideales (izquierdos, derechos o bilaterales) de R se define la suma como:

$$\sum_{\alpha\in A} I_\alpha = \{a_1 + \cdots + a_n \mid a_i \in I_{\alpha_i},\ \alpha_i \in A,\ (i = 1, \ldots, n),\ n \in \mathbb{N}\}$$

Dada una familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de ideales (izquierdos, derechos o bilaterales) de R resulta que la suma $\sum\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ y la intersección $\bigcap\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ son ideales (izquierdos, derechos o bilaterales).

1.2 Sumas directas de ideales.

Una familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de ideales (izquierdos, derechos o bilaterales) de R es *independiente* si para cada $\alpha \in I$ se tiene que $I_\alpha \cap \left(\sum\limits_{\beta\neq\alpha} I_\beta\right) = 0$.

R es la *suma directa* de la familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de ideales (izquierdos, derechos o bilaterales) de R si dicha familia es independiente y $R = \sum\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$. En tal caso se denota $R = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$.

Un ideal (izquierdo, derecho o bilateral) I de R es *sumando directo* de R si existe otro ideal (izquierdo, derecho o bilateral) J de R tal que $R = I \oplus J$.

Un ideal (izquierdo, derecho o bilateral) I de R es inescindible si cada vez que $I = J \oplus K$ con J, K ideales (izquierdos, derechos o bilaterales) de R, se tiene que $J = 0$ ó $K = 0$.

1.3 Idempotentes.

Un elemento $a \in R$ se llama *idempotente* si $a^2 = a$. Obsérvese que en un anillo siempre son idempotentes 0 y 1.

Un idempotente $e \in R$ se llama *central* si $\forall a \in R,\ ae = ea$.

Un conjunto E de idempotentes de R se llama *ortogonal* si $\forall e, f \in E$, $e \neq f \Rightarrow ef = 0$. Se dice que dos idempotentes $e, f \in R$ son *ortogonales* si $\{e, f\}$ es un conjunto ortogonal.

Un idempotente $e \in R$ se llama *primitivo* si $e \neq 0$ y si dado $e = e_1 + e_2$ con e_1, e_2 ortogonales se tiene que $e_1 = 0$ o $e_2 = 0$.

Un conjunto finito $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de idempotentes de R se llama *completo* si $e_1 + \cdots + e_n = 1$.

1.4 Isomorfismos de anillos.

Sean R y S dos anillos cualesquiera.

Un *homomorfismo de anillos* de R a S es una función $\varphi : R \longrightarrow S$ tal que para toda $a, b \in R$ se tiene que $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ y $\varphi(1) = 1$.

Un *monomorfismo* de R a S es un homomorfismo inyectivo de R a S.

Un *epimorfismo* de R a S es un homomorfismo suprayectivo de R a S.

Un *isomorfismo* de R a S es un homomorfismo biyectivo de R a S.

1.5 Condiciones de cadena.

Un anillo R se llama *artiniano izquierdo* si el conjunto de ideales izquierdos satisface la *condición de cadena descendente* (CCD): toda cadena descendente de ideales izquierdos de R:

$$I_1 \geq I_2 \geq \dots$$

se estaciona, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \in \mathbb{N}$ $I_n = I_{n+i}$.

Un anillo R se llama *neteriano izquierdo* si el conjunto de ideales izquierdos satisface la *condición de cadena ascendente* (CCA): toda cadena ascendente de ideales izquierdos de R:

$$I_1 \leq I_2 \leq \dots$$

se estaciona, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \in \mathbb{N}$ $I_n = I_{n+i}$.

2. Anillos booleanos

Definición 2.1. Un anillo R se llama *booleano* si todos sus elementos son idempotentes.

Los siguientes son algunos ejemplos de anillos booleanos.

Ejemplo 2.1. $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, con las operaciones definidas como sigue:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Ejemplo 2.2. $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, el conjunto de sucesiones de ceros y unos, con las operaciones definidas término a término de acuerdo a las tablas del ejemplo 2.1.

El siguiente ejemplo generaliza al anterior.

Ejemplo 2.3. $\mathbb{Z}_2^X$, el conjunto de funciones $f\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, ($X$ es cualquier conjunto) con las operaciones definidas puntualmente de acuerdo a las tablas del ejemplo 2.1.

Ejemplo 2.4. $\wp(X)$, el conjunto potencia de un conjunto X, con la diferencia simétrica y la intersección de subconjuntos de X como operaciones, es decir:

Si $A, B \in \wp(X)$ entonces $A + B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ y $A \cdot B = A \cap B$.

De hecho para cada conjunto X se tiene un isomorfismo de anillos $\varphi : \wp(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^X$ dado por $\varphi(A) = \chi_A$, la función característica del subconjunto A de X.

Ejemplo 2.5. Dado un espacio topológico X consideremos $AC(X)$ el conjunto de abiertos cerrados de X, con la diferencia simétrica y la intersección como operaciones. Obsérvese que dados $A, B \in AC(X)$ se tiene que $A + B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \in AC(X)$. También $A \cdot B = A \cap B \in AC(X)$. Esto demuestra que las operaciones son cerradas. De hecho $AC(X)$ es un subanillo del anillo $\wp(X)$.

Ejemplo 2.6. Dado un anillo R consideremos $B(R)$ el conjunto de idempotentes centrales de R. En $B(R)$ definimos la operación $e\#f = e + f - 2ef$. Con esta operación y el producto de R resulta ser $B(R)$ un anillo booleano.

3. Descomposiciones de un anillo

En el caso de un anillo, debido a que este tiene un conjunto finito de generadores (a saber $\{1\}$, donde 1 es la identidad del anillo), para estudiar sus descomposiciones en suma directa, basta enfocarnos hacia las descomposiciones finitas, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Si un anillo R se descompone como la suma directa de ideales izquierdos, dicha descomposición debe ser finita.*

Demostración. Supongamos que $R = \bigoplus_{\alpha \in A} I_\alpha$. Entonces $1 = e_1 + \cdots + e_n$ con $e_i \in I_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Por lo tanto, para toda $a \in R$ se tiene que

$a = ae_1 + \cdots + ae_n \in I_1 + \cdots + I_n$. Dicha suma es directa, por lo que $R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$. $\square$

La siguiente proposición establece una corespondencia biunívoca entre las descomposiciones en suma directa de ideales izquierdos de un anillo y los conjuntos completos y ortogonales de idempotentes del anillo.

Proposición 3.2. *Dado un anillo R e ideales izquierdos $I_1, \ldots, I_n$ de R, se tiene que $R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ si y sólo si existe un conjunto completo y ortogonal de idempotentes $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tales que $I_i = Re_i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Dada la descomposición $R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ se tiene que $1 = e_1 + \cdots + e_n$ con $e_i \in I_i$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$.y $a \in I_i$. Entonces $a = \sum_{k=1}^{n} ae_k$ y por lo tanto $a - ae_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} ae_k \in I_i \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} I_k = 0$ ya que la suma es directa. Luego $a = ae_i$ y en particular $e_i = e_i^2$ es decir, e es idempotente. También se ha demostrado que $I_i = Re_i$. Ahora, si $j \in \{1, \ldots, n\}$ con $j \neq i$ y puesto que $\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} e_i e_k = e_i - e_i^2 = 0$ tenemos que $e_i e_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} e_i e_k \in I_j \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} I_k = 0$. En conclusión, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto completo y ortogonal de idempotentes.

Inversamente, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto completo y ortogonal de idempotentes de R tales que $I_i = Re_i$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces para toda $a \in R$ se tiene que $a = ae_1 + \cdots + ae_n \in R\,e_1 + \cdots + R\,e_n = I_1 + \cdots + I_n$. Por otro lado, si $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $a \in I_i \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} I_k$ entonces $a = be_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} c_k e_k$, de donde $a = be_i^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} c_k e_k e_i = 0$. Esto demuestra que $R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$. $\square$

En particular tenemos una caracterización para los sumandos directos del anillo. Un ideal izquierdo I de R es un sumando directo de R si y sólo si $I = Re$ con $e \in R$ idempotente.

La siguiente proposición describe la propiedad del idempotente $e \in R$ que caracteriza a un sumando directo $I = Re$ del anillo para ser inescindible.

Proposición 3.3. *Sea $I = Re$ un sumando directo de R, con $e \in R$ idempotente. Entonces I es inescindible si y sólo si e es primitivo.*

Demostración. Supongamos que $I = Re$ es inescindible y que $e = e_1 + e_2$ con e_1, e_2 ortogonales. Si $a \in R\,e_1 \cap R\,e_2$ entonces $a = b_1 e_1 = b_2 e_2$. Por lo tanto $a = b_1 e_1^2 = b_2 e_2 e_1 = 0$. Luego $I = Re = Re_1 \oplus Re_2$. Como I es inescindible debe suceder que $Re_1 = 0$ o que $Re_2 = 0$, es decir, $e_1 = 0$ o $e_2 = 0$. Se ha demostrado que e es primitivo.

Inversamente, supongamos que e es primitivo y que $I = I_1 \oplus I_2$. Como I es sumando directo de R, se tiene que $R = I \oplus J$, donde $I = Re$ y $J = R(1-e)$. Entonces también I_1 y I_2 lo son; digamos que $I_1 = Re_1$ y $I_2 = Re_2$, con e_1, e_2 idempotentes ortogonales. Como $I = I_1 \oplus I_2$ entonces $e = b_1 e_1 + b_2 e_2$, con $b_1, b_2 \in R$. Entonces $ee_1 = b_1 e_1^2 + b_2 e_2 e_1 = b_1 e_1$. Análogamente, $ee_2 = b_2 e_2$. Por tanto $e = ee_1 + ee_2 = f_1 + f_2$, donde $f_1 = ee_1 \in I_1$ y $f_2 = ee_2 \in I_2$. Por tanto $1 = f_1 + f_2 + 1 - e$, de donde $f_1 - f_1^2 = f_1 f_2 + f_1(1-e) \in I_1 \cap (I_2 + J) = 0$. De manera que $f_1 = f_1^2$ y $f_1 f_2 = -f_1(1-e) \in I_2 \cap J = 0$. Análogamente se tiene que $f_2 = f_2^2$ y que $f_2 f_1 = 0$. Se ha demostrado que f_1 y f_2 son idempotentes ortogonales. Como $e = f_1 + f_2$ y e es primitivo, entonces $f_2 = 0$ ó $f_1 = 0$, es decir, $e = ee_1$ o bien $e = ee_2$. En el primer caso, $e \in I_1$ y por tanto $I = Re = I_1$ y $I_2 = 0$. En el segundo caso $e \in I_2$ y por tanto $I = Re = I_2$ y $I_1 = 0$. Se ha demostrado que I es inescindible. □

Como consecuencia de las tres proposiciones anteriores tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.4. *Un anillo R se descompone como suma directa de ideales izquierdos inescindibles si y sólo si existe un conjunto finito, completo y ortogonal de idempotentes primitivos de R.* □

Corolario 3.5. *Para un anillo R son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *R es inescindible.*
2. *1 es un idempotente primitivo.*
3. *0 y 1 son los únicos idempotentes de R.* □

4. Anillos de funciones continuas

Consideremos el anillo conmutativo $C\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)$ de funciones reales continuas definidas en el intervalo $[0,1]$ con la suma y el producto definidos puntualmente. Veamos primero cuáles son los idempotentes de este anillo. Si $f \in C\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)$ es un idempotente entonces para toda $x \in [0,1]$ se tiene que $[f(x)]^2 = f(x)$, es decir, $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$. Como f es una función continua, sólo puede suceder que f sea la función constante cero o la función constante uno, es decir, $f \equiv 0$ o que $f \equiv 1$. Esto demuestra que los únicos idempotentes de $C\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)$ son 0 y 1. Por lo tanto, en vista del corolario 3.5 tenemos:

Proposición 4.1. *El anillo $C\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)$ es inescindible.* □

En otras palabras, dicho anillo no tiene descomposición alguna que no sea trivial. Ahora consideremos el anillo conmutativo $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$de funciones reales continuas definidas en el conjunto de los números racionales, con la topología relativa de $\mathbb{Q}$ como subespacio topológico de $\mathbb{R}$. Como en el caso anterior, estudiemos los idempotentes de este anillo. Dado un idempotente $f \in C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ se tiene nuevamente que para toda $x \in [0,1]$ se cumple $[f(x)]^2 = f(x)$, es decir, $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$. A diferencia del caso anterior, pueden haber funciones continuas de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ con esta propiedad distintas de las constantes 1 y 0, como se verá en la siguiente proposición. Considérese $AC(\mathbb{Q})$, el conjunto de los abiertos cerrados de $\mathbb{Q}$. Como ya se vió en el ejemplo 2.5, este es un subanillo de $\wp(\mathbb{Q})$. Resulta que este subanillo se identifica con el conjunto de idempotentes de $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$.

Proposición 4.2. *Los anillos* $\mathrm{AC}(\mathbb{Q})$ *y* $B\left(C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)\right)$ *son isomorfos.*

Demostración. Definimos $\varphi\colon AC(\mathbb{Q}) \longrightarrow B\left(C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)\right)$ como $\varphi(U) = \chi_U$, donde U es un abierto cerrado de $\mathbb{Q}$, y $\chi_U : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función característica de U. Se demostrará que χ_U es continua. Sea V un abierto de $\mathbb{R}$. Hay cuatro posibilidades:

1) Si $0, 1 \in V$ entonces $\chi_U^{-1}(V) = \mathbb{Q}$.

2) Si $0, 1 \notin V$ entonces $\chi_U^{-1}(V) = \phi$.

3) Si $0 \in V$ y $1 \notin V$ entonces $\chi_U^{-1}(V) = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{U}$.

4) Si $0 \notin V$ y $1 \in V$ entonces $\chi_U^{-1}(V) = \mathbb{U}$.

En todos los casos $\chi_U^{-1}(V)$ es abierto y por tanto χ_U es continua. Además es idempotente y por tanto $\chi_U \in B\left(C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)\right)$. De manera que φ está bien definida.

Veamos ahora que φ es un homomorfismo de anillos.

Dados $U_1, U_2 \in AC(\mathbb{Q})$ se tiene que

$$\varphi(U_1 + U_2) = \varphi((U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2)) = \chi_{(U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2)}.$$

Por otro lado $\varphi(U_1) \# \varphi(U_2) = \chi_{U_1} \# \chi_{U_2} = \chi_{U_1} + \chi_{U_2} - 2(\chi_{U_1})(\chi_{U_2})$. Nuevamente hay tres casos posibles:

1) Si $x \notin U_1 \cup U_2$ entonces $\chi_{(U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2)}(x) = 0 = \chi_{U_1} + \chi_{U_2} - 2\chi_{U_1}\chi_{U_2}$.

2) Si $x \in U_1 \cup U_2$ y $x \notin U_1 \cap U_2$ entonces$\chi_{(U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2)}(x) = 1 = \chi_{U_1}(x) + \chi_{U_2}(x) - 2[\chi_{U_1}(x)][\chi_{U_2}(x)]$.

3) Si $x \in U_1 \cap U_2$ entonces $\chi_{(U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2)}(x) = 0 = \chi_{U_1}(x) + \chi_{U_2}(x) - 2[\chi_{U_1}(x)][\chi_{U_2}(x)]$.

Se ha demostrado que $\varphi(U_1 + U_2) = \varphi(U_1) \# \varphi(U_2)$.

Por otro lado, dados $U_1, U_2 \in AC(\mathbb{Q})$ tenemos

$$\varphi(U_1 \cdot U_2) = \varphi(U_1 \cap U_2) = \chi_{U_1 \cap U_2} = \chi_{U_1}\chi_{U_2} = \varphi(U_1)\varphi(U_2) \ .$$

Por lo tanto φ es un homomorfismo de anillos.

φ es un monomorfismo: sea $U \in AC(\mathbb{Q})$ es tal que $\varphi(U) = 0$ (la función constante cero). Entonces $\chi_U(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{Q}$, es decir, $U = \phi$.

φ es un epimorfismo: sea $\delta \in B\left(C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)\right)$. Sea $U = \delta^{-1}(1)$. Como $\{1\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}$ y δ es continua entonces $\delta^{-1}(1)$ es cerrado de $\mathbb{Q}$. Además por la observación hecha anteriormente $\delta(x) = 0$ o bien $\delta(x) = 1$ para toda $x \in \mathbb{Q}$, Por lo tanto $\delta^{-1}(1) = \delta^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)$ que es un abierto de $\mathbb{Q}$. Luego $U \in AC(\mathbb{Q})$ y $\varphi(U) = \varphi(\delta^{-1}(1)) = \chi^{-1}_{\delta^{-1}(1)}$. Pero dada $x \in \mathbb{Q}$ se tiene $\chi^{-1}_{\delta^{-1}(1)}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in \delta^{-1}(1) \Longleftrightarrow \delta(x) = 1$. Esto prueba que $\chi^{-1}_{\delta^{-1}(1)} = \delta$. Por tanto φ es suprayectiva.

Por lo tanto φ es un isomorfismo de anillos.[1]. □

La proposición anterior nos dice en particular que hay tantos idempotentes en el anillo $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ como abiertos cerrados de $\mathbb{Q}$. Como $AC(\mathbb{Q}) \subset \wp(\mathbb{Q})$ se tiene que $\#AC(\mathbb{Q}) \leq 2^{\aleph_0} =$, donde es la cardinalidad del conjunto de los números reales[2].

Resulta que hay muchos abiertos cerrados de $\mathbb{Q}$. Para cada pareja x, y de números irracionales, con $x < y$, se tiene que $\mathbb{Q} \cap (x, y)$ es un abierto de $\mathbb{Q}$, puesto que el intervalo (x, y) es un abierto de $\mathbb{R}$. También es un cerrado, puesto que su complemento en $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q} \setminus (x, y) = \mathbb{Q} \cap ((-\infty, x] \cup [y, \infty)) = \mathbb{Q} \cap ((-\infty, x) \cup (y, \infty))$, puesto que $x, y \notin \mathbb{Q}$.

[1]El lector puede demostrar como ejercicio que el isomorfismo inverso de φ es de hecho $\psi : B\left(C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)\right) \longrightarrow AC(\mathbb{Q})$ dada por $\psi(\delta) = \delta^{-1}(1)$

[2]Se utilizan aquítres resultados conocidos de la Teoría de los Conjuntos:
(1) $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N} = \aleph_0$.
(2) Para cualquier conjunto X, se tiene que $\#\wp(X) = 2^{\#X}$.
(3) $2^{\aleph_0} =$.

Por tanto $\mathbb{Q} \cap (x, y) \in AC(\mathbb{Q})$. Se tiene entonces el siguiente resultado, que contrasta con el anillo $C\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)$.

Corolario 4.3. *En el anillo $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ hay tantos idempotentes como números reales.*

Demostración. Definamos la función $\mu : \Gamma \longrightarrow AC(\mathbb{Q})$, donde $\Gamma = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2 \mid x < y\right\}$, como $\mu(x, y) = \mathbb{Q} \cap (x, y)$. Por lo argumentado en el párrafo anterior, μ está bien definida. Ahora bien, si $(x, y), (z, w) \in \Gamma$ con $(x, y) \neq (z, w)$ entonces $x \neq z$ o bien $y \neq w$. En el primer caso supongamos sin pérdida de generalidad que $x < z$. Entonces podemos encontrar $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $x < \alpha < \text{mín}\{y, z\}$ y en ese caso $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (x, y)$ pero $\alpha \notin \mathbb{Q} \cap (z, w)$. En el segundo caso, si $y \neq w$ podemos suponer que $y < w$ y podemos encontrar $\beta \in \mathbb{Q}$ tal que $\text{máx}\{y, z\} < \beta < w$ y en tal caso $\beta \in \mathbb{Q} \cap (z, w)$ pero $\beta \notin \mathbb{Q} \cap (x, y)$. De cualquier manera $\mathbb{Q} \cap (x, y) \neq \mathbb{Q} \cap (z, w)$. Esto demuestra que μ es inyectiva. En vista de que $\Gamma \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y puesto que $\#(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) =$, se tiene que $\#\Gamma =$. Combinando este argumento con la proposición 4.2 se ha demostrado el corolario. □

Ya que los idempotentes de $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ están en correspondencia biunívoca con los abiertos cerrados de $\mathbb{Q}$, también las descomposiciones de $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ como suma directa de ideales se encuentran en correspondencia biunívoca con las particiones finitas de $\mathbb{Q}$ con abiertos cerrados. Efectivamente, cada descomposición de $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ está determinada por un conjunto completo ortogonal de idempotentes distintos de cero, como lo afirma la proposición 3.2. Digamos que dicho conjunto es $\{\chi_{U_1}, \ldots, \chi_{U_n}\}$, donde $U_1, \ldots, U_n \in AC(\mathbb{Q})$. Este conjunto es ortogonal si y sólo si para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$ sucede que $\chi_{U_i}\chi_{U_j} = 0$, es decir, si y sólo si $U_i \cap U_j = \phi$. Además el conjunto de idempotentes es completo si y sólo si $\chi_{U_1}\#...\#\chi_{U_n} = 1$, lo cual significa que $U_1 \cup \cdots \cup U_n = \mathbb{Q}$. Finalmente $\chi_{U_i} \neq 0 \Longleftrightarrow U_i \neq \phi$. Por tanto el conjunto de idempotentes $\{\chi_{U_1}, \ldots, \chi_{U_n}\}$ es ortogonal y completo si y sólo si $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una partición de $\mathbb{Q}$.

Consideremos ahora una propiedad de los abiertos cerrados de $\mathbb{Q}$, que se sutenta en la propiedad de densidad tanto de $\mathbb{Q}$ como de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Proposición 4.4. *Dado $U \in$AC$(\mathbb{Q})$, $U \neq \phi$, existe $V \in$AC$(\mathbb{Q})$ tal que $U \cap V \neq \phi$ y $U \setminus V \neq \phi$.*

Demostración. Sea $U \in AC(\mathbb{Q})$, $U \neq \phi$. Como U es abierto en $\mathbb{Q}$, existe U^* abierto, no vacío, de $\mathbb{R}$ tal que $U = U^* \cap \mathbb{Q}$. Por el hecho de que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $x \in U^* \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Ahora consideremos $V = (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$. Ciertamente V es un abierto de $\mathbb{Q}$, y además $\mathbb{Q} \setminus V = (x, \infty) \cap \mathbb{Q}$ también es un abierto de $\mathbb{Q}$. Por lo tanto $V \in AC(\mathbb{Q})$.

Ahora bien, $U \cap V = (U^* \cap \mathbb{Q}) \cap ((-\infty, x) \cap \mathbb{Q}) = U^* \cap (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$. Ya que U^* es un abierto de $\mathbb{R}$ y $x \in U^*$ se tiene que $U^* \cap (-\infty, x) \neq \phi$. Como este último es un abierto de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ entonces $U \cap V = U^* \cap (-\infty, x) \cap \mathbb{Q} \neq \phi$.

Análogamente, $U \setminus V = (U^* \cap \mathbb{Q}) \cap ((x, \infty) \cap \mathbb{Q}) = U^* \cap (x, \infty) \cap \mathbb{Q} \neq \phi$, ya que U^* es un abierto de $\mathbb{R}$, $x \in U^*$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

Usando la proposición anterior y el isomorfismo dado por la proposición 4.2 resulta otra importante propiedad más del anillo $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$.

Proposición 4.5. *El anillo $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ no tiene idempotentes primitivos.*

Demostración. Sea $\chi_U \in C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ un idempotente distinto de cero, donde U es un abierto cerrado no vacío de $\mathbb{Q}$. Por la proposición 4.4, existe $V \in AC(\mathbb{Q})$ tal que $U \cap V \neq \phi$ y $U \setminus V \neq \phi$. Entonces $U_1 = U \cap V$ y $U_2 = U \setminus V$ son abiertos cerrados de $\mathbb{Q}$ no vacíos y ajenos, tales que $U = U_1 \cup U_2$. Por la proposición 4.2 tenemos que $\chi_U = \chi_{U_1} \# \chi_{U_2}$, con χ_{U_1} y χ_{U_2} idempotentes ortogonales distintos de cero. De manera que χ_U no puede ser un idempotente primitivo. $\square$

De la proposición 3.3 se sigue entonces el siguiente resultado, que contrasta con la proposición 4.1 referida al anillo $C\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)$.

Proposición 4.6. *El anillo $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ no tiene sumandos directos inescindibles.* $\square$

Como consecuencia de este resultado, se da en el anillo $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ la existencia de cadenas infinitas de ideales, ascendentes y descendentes.

Proposición 4.7. *El anillo $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ no es neteriano ni artiniano.*[3]

Demostración. Sea $\chi_{U_0} \in C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ un idempotente distinto de cero, donde U_0 es un abierto cerrado no vacío de $\mathbb{Q}$. Como en la demostración de la proposición 4.5, existen $U_1, V_1 \in AC(\mathbb{Q})$, no vacíos, tales que $U_0 = U_1 \cup V_1$ y $U_1 \cap V_1 = \phi$. Por tanto $\chi_{U_0} = \chi_{U_1} \# \chi_{V_1}$, con χ_{U_1} y χ_{V_1} idempotentes ortogonales distintos de cero, es decir, $I_0 = I_1 \oplus J_1$,

[3] De hecho, por el *Teorema de Hopkins*, todo anillo que no sea neteriano tampoco puede ser artiniano.

donde I_0, I_1, J_1 son los ideales, distintos de cero, de $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ generados por los idempotentes $\chi_{U_0}, \chi_{U_1}, \chi_{V_1}$, respectivamente.

De manera análoga, suponiendo que $I_{n-1} = I_n \oplus J_n$ y donde I_n, J_n son los ideales de $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ generados por los idempotentes χ_{U_n}, χ_{V_n}, respectivamente, con $U_n, V_n \in AC(\mathbb{Q})$, no vacíos, puede considerarse una nueva partición $U_n = U_{n+1} \cup V_{n+1}$ con $U_{n+1}, V_{n+1} \in AC(\mathbb{Q})$, no vacíos y ajenos. Por tanto $\chi_{U_n} = \chi_{U_{n+1}} \# \chi_{V_{n+1}}$, con $\chi_{U_{n+1}}$ y $\chi_{V_{n+1}}$ idempotentes ortogonales distintos de cero, es decir, $I_n = I_{n+1} \oplus J_{n+1}$, donde I_{n+1}, J_{n+1} son los ideales, distintos de cero, de $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ generados por $\chi_{U_{n+1}}$ y $\chi_{V_{n+1}}$, respectivamente. Obsérvese que $I_n > I_{n+1}$ ya que $J_{n+1} \neq 0$ y que $I_{n+1} \neq 0$. De esta forma tenemos la cadena infinita descendente de ideales:

$$I_0 > I_1 > \cdots > I_n > \ldots$$

Obsérvese también que $J_n < J_n \oplus J_{n+1}$, ya que $J_{n+1} \neq 0$. Como esto es para cualquier $n \geq 1$, tenemos la cadena infinita ascendente de ideales:

$$J_1 < J_1 \oplus J_2 < J_1 \oplus J_2 \oplus J_3 \cdots < \bigoplus_{i=1}^{n} J_i < \ldots$$

lo cual demuestra que $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right)$ no es artiniano ni neteriano. $\square$

Referencias

[1] F. Anderson y K. Fuller, Rings and Categories of Modules, Graduate Texts in Mathematics **13**, Springer Verlag, New York, 1992.

[2] J. Kelley, General Topology, Graduate Texts in Mathematics **27**, Springer Verlag, New York, 1975.

[3] P. Suppes, Axiomatic Set Theory, Dover, New York, 1972.