Miscelánea Matemática **62** (2016) 17-27 SMM

¿Cuáles son todas las funciones donde el área bajo la curva es igual a la longitud de la curva?

Héctor Méndez Lango
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM,
Ciudad Universitaria, C.P. 04510, Ciudad de México, MÉXICO.
hml@ciencias.unam.mx

1. El inicio

Cierto día, en la clase de cálculo, una pregunta llamó nuestra atención. Nos encontrábamos inmersos en las propiedades y las aplicaciones de la integral, y ahí, de repente, fresca y misteriosa, saltó ante nosotros.

Imagine, estimado lector, una función continua $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in [0, \infty)$, $f(t) \geq 0$. Considere además un par de valores $a, b \geq 0$, $a < b$. En la zona limitada por el intervalo cerrado $[a, b] \subset [0, \infty)$ aparecen, casi de manera natural, dos conjuntos y, con ellos, dos números. Por un lado está el pedazo de gráfica de f correspondiente a los puntos $t \in [a, b]$, que llamaremos *la curva* $G_{[a,b]}$, y el valor de su longitud, que denotaremos con $\mathrm{Long}(G_{[a,b]})$. Por otro lado está la región *bajo la curva*, es decir, el conjunto

$$R_{[a,b]} = \{(t, y) : a \leq t \leq b,\ 0 \leq y \leq f(t)\},$$

y el valor de su área, que denotaremos con $\text{Área}(R_{[a,b]})$, ver figura 1.

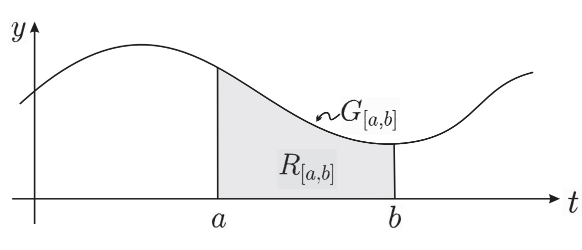

Figura 1.

La región $R_{[a,b]}$ está limitada por tres segmentos de recta y por la curva $G_{[a,b]}$. Una vez que los valores a y b son dados, la región queda determinada, en esencia, por la forma de $G_{[a,b]}$. Esta imagen fue la que nos llevó a preguntarnos si existía alguna relación entre el valor del área de $R_{[a,b]}$ y la longitud de $G_{[a,b]}$.

Una primera inquietud fue surgiendo: ¿Considerando sólo funciones constantes, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f \equiv c$, cuáles son todas aquéllas donde se cumple la igualdad

$$\text{Área}(R_{[a,b]}) = \text{Long}(G_{[a,b]}), \tag{1}$$

para todo intervalo $[a,b]$ contenido en $[0,\infty)$?

La respuesta es inmediata. Supongamos que f es una función constante. Sea $c \geq 0$ tal que $f \equiv c$. Es decir, para toda $t \in [0,\infty)$, $f(t) = c$. En este caso $R_{[a,b]}$ es el rectángulo $[a,b]\times[0,c]$, y $\text{Área}(R_{[a,b]})$ es $(b-a)\cdot c$. La curva $G_{[a,b]}$ es el segmento de recta que une los puntos (a,c) y (b,c). Por lo tanto, $\text{Long}(G_{[a,b]}) = b - a$. Una función constante cumple la condición (1) si y sólo si $c = 1$.

La igualdad descrita en (1) nos pareció una sencilla e interesante forma de relacionar áreas y longitudes, y decidimos mantenerla en nuestras pesquisas.

La pregunta central tomó forma:

($*$) ¿Cuáles son todas las funciones $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que cumplen la siguiente condición: para todo intervalo $[a,b] \subset [0,\infty)$ se tiene la igualdad

$$\text{Área}(R_{[a,b]}) = \text{Long}(G_{[a,b]}) \ ?$$

Ya tenemos una solución. La función constante $f \equiv 1$ cumple ($*$).

¿Habrá más soluciones? Resultó que sí, sí hay más soluciones. Todo un mundo de nuevas soluciones, cada una de ellas no constante. Dedicamos la siguiente sección a relatar el proceso que nos llevó a su encuentro.

2. Hacia las ecuaciones diferenciales

Los pasos del *1* al *6*, que a continuación describimos, nos ayudan a encontrar las nuevas soluciones de la pregunta ($*$). Cada uno de estos pequeños avances nos acercan poco a poco a las ecuaciones diferenciales.

Paso 1. Las condiciones (2) y (3) son equivalentes.

$$\text{Área}(R_{[0,x]}) = \text{Long}(G_{[0,x]}), \quad \text{para toda} \quad x \geq 0, \tag{2}$$

$$\text{Área}(R_{[a,b]}) = \text{Long}(G_{[a,b]}), \quad \text{para todo} \quad [a,b] \subset [0,\infty). \tag{3}$$

La demostración se sigue directamente del hecho de que en cada intervalo $[a,b] \subset [0,\infty)$, se tiene que

$$\text{Área}(R_{[a,b]}) = \text{Área}(R_{[0,b]}) - \text{Área}(R_{[0,a]}), \quad \text{y}$$

$$\text{Long}(G_{[a,b]}) = \text{Long}(G_{[0,b]}) - \text{Long}(G_{[0,a]}).$$

Paso 2. Decimos que $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es de *clase* C^1 en $[0,\infty)$ si f es derivable en todo punto de su dominio y la derivada, $f' : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, es continua en $[0,\infty)$. Si f es de clase C^1 en $[0,\infty)$, entonces la curva $G_{[0,x]}$ se puede parametrizar,

$$\alpha(t) = (t, f(t)), \quad t \in [0,x],$$

y su longitud se puede calcular con una integral [1, p. 655],

$$\text{Long}(G_{[0,x]}) = \int_0^x \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Como el Área$(R_{[0,x]})$ es igual a la integral $\int_0^x f(t)dt$, entonces la solución a la pregunta $(*)$ se traduce, en el ámbito de las funciones de clase C^1, en encontrar todas las funciones $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt, \quad \text{para toda } x \geq 0. \tag{4}$$

De aquí en adelante supondremos que las funciones que estamos buscando son de clase C^1 en el dominio $[0,\infty)$.

Paso 3. Como las funciones $f(t)$ y $g(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ son continuas en el intervalo $[0,\infty)$, entonces podemos derivar, con respecto a la variable x, ambos lados de la igualdad (4). Así, nuestra meta se ha convertido en resolver la siguiente ecuación,

$$f(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}, \quad x \geq 0. \tag{5}$$

Obsérvese que de (5) se concluye inmediatamente que toda solución de $(*)$, f, cumple las siguientes dos condiciones:

- Para todo $x \geq 0$, $f(x)$ debe ser mayor o igual a 1.
- $f(x) = 1$ si y sólo si $f'(x) = 0$. Es decir, los puntos críticos de f sólo pueden ocurrir cuando la gráfica de f pasa por la altura 1.

Paso 4. Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad en (5), y acomodando algunos términos, obtenemos

$$(f'(x))^2 = (f(x))^2 - 1, \quad x \geq 0, \quad f(0) = c \geq 1.$$

Al aplicar la raíz cuadrada obtenemos dos ecuaciones diferenciales,

$$f'(x) = \sqrt{(f(x))^2 - 1}, \quad x \geq 0, \quad f(0) = c \geq 1, \tag{6}$$

$$f'(x) = -\sqrt{(f(x))^2 - 1}, \quad x \geq 0, \quad f(0) = c \geq 1. \tag{7}$$

Continuaremos nuestro estudio siguiendo el camino que propone la ecuación (6). Sin embargo, para no dejar de lado algunas posibles soluciones, más adelante recuperaremos la información contenida en la ecuación (7).

Obsérvese que la función constante $f \equiv 1$ es solución de (6) y de (7).

Para encontrar otra solución de (6) podemos suponer que existe un valor $x \geq 0$ tal que $f(x) > 1$. De hecho, por la continuidad de f, podemos considerar que esta situación se presenta en un subintervalo abierto $(\alpha, \beta) \subset [0, \infty)$. Entonces,

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 - 1}} = 1, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Ahora integramos, con respecto a x, ambos lados de la igualdad anterior. En la primera integral hacemos un cambio de variable. Sean $u = f(x)$, y $du = f'(x)dx$. De

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 - 1}} dx, \quad \text{obtenemos} \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}. \tag{8}$$

Para resolver la integral a la que llegamos en (8) hay varios caminos. El que nosotros escogimos no es el más corto, sin embargo nos gusta porque al seguirlo, la función que hemos estado persiguiendo a lo largo de ya varios párrafos, aparece ante nosotros de una manera, digamos, un poco más natural.

En la tabla de integrales definidas de [3, p. 419], se encuentra la siguiente igualdad:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \log |u + \sqrt{u^2 - 1}|.$$

Así,

$$\log |f(x) + \sqrt{(f(x))^2 - 1}| = x + k, \quad k \text{ constante}.$$

Por lo tanto,

$$|f(x) + \sqrt{(f(x))^2 - 1}| = e^{x+k}. \tag{9}$$

Como para toda $x \geq 0$, $f(x) + \sqrt{(f(x))^2 - 1} \geq 1$, entonces podemos quitar los signos de valor absoluto en la igualdad (9).

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad

$$\sqrt{(f(x))^2 - 1} = e^{x+k} - f(x),$$

y restando $(f(x))^2$ de ambos lados, obtenemos

$$-1 = e^{2x+2k} - 2e^{x+k} f(x).$$

Finalmente,

$$f(x) = \frac{e^{2x+2k} + 1}{2e^{x+k}} = \frac{e^{x+k} + e^{-x-k}}{2} = \cosh(x + k).$$

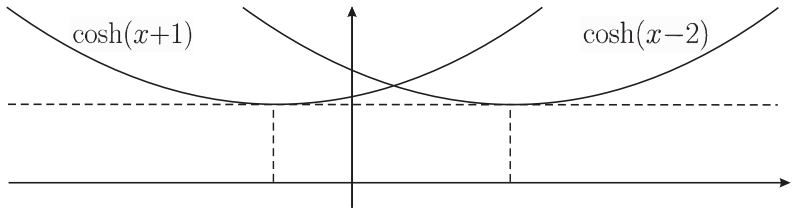

Figura 2.

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación (6) son cosenos hiperbólicos, $f(x) = \cosh(x+k)$, ver figura 2. El valor de la constante k se determina a partir de la condición inicial $f(0) = c$. El lector puede confirmar directamente que, en efecto, estas funciones son soluciones al problema $(*)$.

Por ejemplo, si $f(0) = 1$, entonces $1 = \cosh(k)$, y k está obligado a ser 0. La solución de la ecuación (6) que cumple $f(0) = 1$ es $f(x) = \cosh(x)$.

Vale la pena llamar la atención del lector al hecho de que la función constante $f \equiv 1$ tambien es solución de (6) con la misma condición inicial, $f(0) = 1$. Resulta que en este caso, utilizando la notación $y = f(x)$, el problema a resolver se ve así:

$$y' = \sqrt{y^2 - 1} = F(x, y), \quad y(0) = 1.$$

Como $\partial F/\partial y = y/\sqrt{y^2 - 1}$, esta derivada parcial no está definida en una vecindad que contenga al punto $(0, 1)$. Estamos, pues, ante una ecuación diferencial donde no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones (ver [2, pp. 76 y 77]).

Por otro lado, si $f(0) = c$, con $c > 1$, entonces la ecuación (6) sí tiene una única solución en un intervalo abierto, contenido en el eje de la variable x, que contiene al 0. Aquí las funciones F y $\partial F/\partial y = y/\sqrt{y^2 - 1}$ son continuas en una vecindad del punto $(0, c)$.

Como $f(x) = \cosh(x + k)$, entonces, en este caso, $c = \cosh(k)$. Como $c > 1$, entonces hay dos posibles valores de k, uno positivo y uno negativo. Si uno observa con cuidado lo que dice (6) para el caso que estamos tratando,

$$f'(x) = \sqrt{(f(x))^2 - 1}, \quad x \geq 0, \quad f(0) = c > 1,$$

notará que la derivada $f'(x)$ está obligada a ser positiva en una vecindad del 0. Como $f'(x) = \operatorname{senh}(x + k)$ y $f'(0) = \operatorname{senh}(k)$, entonces k es un número positivo.

Paso 5. La ecuación diferencial (7),

$$f'(x) = -\sqrt{(f(x))^2 - 1}, \quad x \geq 0, \quad f(0) = c \geq 1,$$

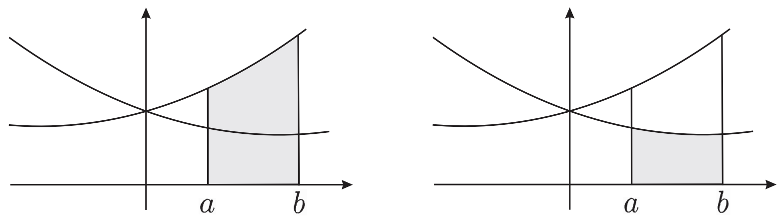

Figura 3.

se resuelve de manera similar. Es cierto que ahora tenemos un signo negativo al que hay tratar con cuidado, pero al final llegamos a la misma familia de soluciones, $f(x) = \cosh(x + k)$. Invitamos al lector a aportar los detalles necesarios.

Obsérvese que si $f(0) = c > 1$, y f cumple (7), entonces $f'(0) < 0$. Por lo tanto, en las soluciones de (7) que cumplen $f(0) = c > 1$, el valor de k debe ser negativo.

Así, si $f(0) = c > 1$, existen dos soluciones al problema $(*)$. Una de ellas parte del 0 con derivada positiva, la otra lo hace con derivada negativa. Ambas se expresan en la forma $f(x) = \cosh(x + k)$, para un valor adecuado de k, ver figura 3.

En resumen, todas las funciones $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, de clase C^1 en $[0, \infty)$, tales que para todo intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$ el área bajo la gráfica de f es igual a la longitud del pedazo de gráfica de f, en $[a, b]$, son sólo de dos posibles formas:

- f es la constante 1, $f \equiv 1$.
- $f(t) = \cosh(t + k)$, k constante.

Paso 6. El hecho de que las ecuaciones diferenciales (6) y (7) tengan, cada una de ellas, dos posibles soluciones cuando la condición inicial es de la forma $f(t_0) = 1$, abre la posibilidad de que funciones, de clase C^1 en $[0, \infty)$, cuya regla de correspondencia se describe *por partes*, también cumplan las condiciones de $(*)$. Así, agregando los siguientes tres tipos de funciones obtenemos, finalmente, a la familia completa de soluciones de $(*)$. Sean $0 < \alpha < \beta$. La regla de correspondencia de f se puede expresar así:

- Tipo 1. $f(t) = \cosh(t - \alpha)$, si $t \leq \alpha$; $f(t) = 1$, si $\alpha \leq t$.
- Tipo 2. $f(t) = 1$, si $t \leq \beta$; $f(t) = \cosh(t - \beta)$, si $\beta \leq t$.
- Tipo 3. $f(t) = \cosh(t - \alpha)$, si $t \leq \alpha$, $f(t) = 1$, si $t \in [\alpha, \beta]$, $f(t) = \cosh(t - \beta)$, si $\beta \leq t$. Ver figura 4.

Antes de irnos a la sección final de este trabajo, y con ello abandonar la pregunta $(*)$, nos gustaría resaltar el hecho de que dos funciones tan disímbolas, tan alejadas entre sí, como son la constante $f \equiv 1$ y el coseno hiperbólico $f(t) = \cosh(t)$, comparten las cualidades de ser de

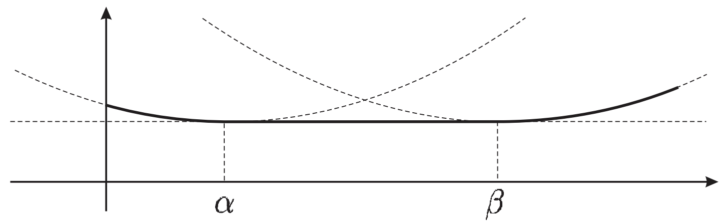

Figura 4.

clase C^1 en $[0, \infty)$, y de ser soluciones de $(*)$ con la misma condición inicial, $f(0) = 1$. Para nosotros fue, en verdad, una sorpresa.

El camino hacia la pregunta $(*)$ lo iniciamos a sugerencia de dos ejercicios que aparecen en el capítulo 14, página 655, de [1].

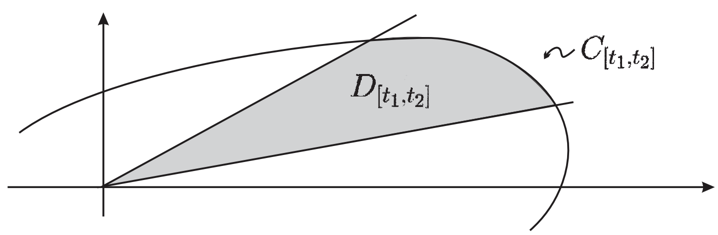

Figura 5.

3. Curvas en coordenadas polares

En el mundo de las curvas descritas en coordenadas polares,

$$\alpha(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\mathrm{sen}(t)), \quad r(t) \geq 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

se puede plantear un problema similar al expresado en $(*)$ (ver figura 5).

Cuando el ángulo, representado por la letra t, va de t_1 a t_2, $t_1 < t_2$, el vector que va del origen $\mathbf{0} = (0, 0)$ al punto $(r(t)\cos(t), r(t)\cos(t))$ *barre* la región

$$D_{[t_1,t_2]} = \{(x, y) = u(\cos(t), \mathrm{sen}(t)) : t_1 \leq t \leq t_2,\ 0 \leq u \leq r(t)\}.$$

Al mismo tiempo, la curva α recorre el arco

$$C_{[t_1,t_2]} = \{\alpha(t) : t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Si la función $r(t)$ es de clase C^1 en su domino ([1, p. 134]), entonces

$$\text{Área}(D_{[t_1,t_2]}) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (r(t))^2 dt,$$

$$\mathrm{Long}(C_{[t_1,t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}dt.$$

La pregunta salta de inmediato.

$(**)$ ¿Cuáles son todas las funciones $r(t)$ tales que para todo par $t_1 < t_2$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (r(t))^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}dt \ ?$$

La solución de $(**)$ es equivalente a encontrar todas las funciones $r(t)$ tales que

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{t} (r(s))^2 ds = \int_{0}^{t} \sqrt{(r'(s))^2 + (r(s))^2}ds, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Derivando con respecto a la variable t, ambas integrales, nuestra tarea se traduce, finalmente, en resolver la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}(r(t))^2 = \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}, \quad r(0) = c, \ c \geq 0. \tag{10}$$

Una vez planteado el problema, hacemos algunas observaciones.

Observación 3.1. La función constante 0, $r \equiv 0$, es solución de (10). La curva α es un solo punto. Digamos que ésta es la solución trivial, la menos interesante.

Observación 3.2. Sea $R > 0$ un valor fijo. Si para todo $t \in [0, 2\pi]$, $r(t) = R$, entonces la curva $\alpha(t)$ describe un círculo de radio R. Esta curva es solución de (10) si y sólo si

$$\frac{1}{2}R^2 = \sqrt{0 + R^2} = |R| = R, \quad \text{es decir,} \quad R^2 = 2R.$$

Las soluciones son $R = 0$, ya considerada antes, y $R = 2$. El lector puede comprobar que, ciertamente, en un círculo de radio 2 se tiene que el Área$(D_{[t_1,t_2]})$ es igual a la Long$(C_{[t_1,t_2]})$, para todo par de ángulos $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$.

Observación 3.3. Elevando al cuadrado los términos presentes en la ecuación (10), y avanzando un poco en el despeje de la función $r'(t)$, obtenemos

$$(r'(t))^2 = \frac{1}{4}(r(t))^4 - (r(t))^2.$$

Es decir,

$$(r'(t))^2 = (r(t))^2 \left(\frac{(r(t))^2}{4} - 1 \right). \tag{11}$$

Como $(r'(t))^2 \geq 0$, entonces $\left(\frac{(r(t))^2}{4} - 1\right) \geq 0$. De aquí se sigue que $(r(t))^2 \geq 4$, $|r(t)| \geq 2$. Como $r(t) \geq 0$, entonces para todo $t \in [0, 2\pi]$ se tiene que $r(t) \geq 2$. Es decir, las curvas $\alpha(t)$, soluciones de (10), tienen recorridos, trazas, que nunca ingresan al interior del disco de radio 2, $D = \{(x,y) : \|(x,y)\| \leq 2\}$. Digamos que la distancia mínima de acercamiento al origen es 2.

Observación 3.4. Aplicando raíz cuadrada a los términos de (11), obtenemos

$$|r'(t)| = |r(t)|\sqrt{\left(\frac{r(t)}{2}\right)^2 - 1}.$$

Esto nos lleva a dos ecuaciones diferenciales,

$$r'(t) = r(t)\sqrt{\left(\frac{r(t)}{2}\right)^2 - 1}, \quad r(0) \geq 2, \tag{12}$$

y

$$r'(t) = -r(t)\sqrt{\left(\frac{r(t)}{2}\right)^2 - 1}, \quad r(0) \geq 2. \tag{13}$$

Seguiremos el camino que propone la ecuación (12). El lector puede confirmar que esta elección no afecta, en esencia, los argumentos que damos de aquí en adelante.

Si para algún valor de la variable t se tiene que $r(t) > 2$, entonces la expresión dentro la raíz cuadrada es positiva.

Dividiendo ambos lados de (12) entre $r(t)\sqrt{\left(\frac{r(t)}{2}\right)^2 - 1}$, obtenemos

$$\frac{r'(t)}{r(t)\sqrt{\left(\frac{r(t)}{2}\right)^2 - 1}} = 1. \tag{14}$$

Y ahora integramos. En la integral del lado izquierdo de (14) hacemos un cambio de variable. Sean $u = \frac{r(t)}{2}$ y $du = \frac{r'(t)}{2}dt$. De la integral

$$\int \frac{r'(t)}{r(t)\sqrt{\left(\frac{r(t)}{2}\right)^2 - 1}}dt, \quad \text{obtenemos} \quad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}. \tag{15}$$

Como $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcsec}(u)$, entonces

$$\operatorname{arcsec}\left(\frac{r(t)}{2}\right) = t + k, \quad r(t) = 2\sec(t+k), \quad k \text{ constante.}$$

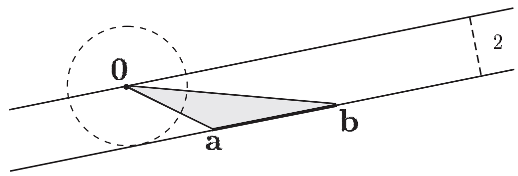

Figura 6.

La condición inicial $r(0) = 2$, nos lleva a las siguientes igualdades:

$$2 = 2\sec(k) = \frac{2}{\cos(k)}, \quad \cos(k) = 1, \quad k = 0.$$

Así, en este caso, $r(t) = 2\sec(t) = \frac{2}{\cos(t)}$.

Por lo tanto,

$$\alpha(t) = \frac{2}{\cos(t)}(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = (2, 2\tan(t)).$$

El lector perspicaz notará de inmediato que $\alpha(t) = (2, 2\tan(t))$, para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, es la parametrización de una recta vertical que, cuando $t = 0$, pasa por el punto $(2, 0)$. Esta recta es tangente al círculo de radio 2, con centro en el origen, precisamente en ese punto.

Observación 3.5. Denotemos con la letra C el círculo de radio 2 con centro en el origen. Este conjunto es invariante bajo toda rotación. El hecho de que las rectas tangentes a C se transforman, bajo rotaciones, en rectas tangentes a C; y la afortunada noticia de que las longitudes de curvas y las áreas de regiones contenidas en el plano se preservan bajo las rotaciones, nos dice que la solución al problema $(**)$ que acabamos de encontrar se puede extender de la siguiente manera:

Para toda recta $\mathcal{L}$, tangente a C, y para todo sector determinado por los ángulos $t_1 < t_2$, se tiene que el valor del área del triángulo delimitado en ese sector por $\mathcal{L}$ y el valor de la longitud del lado opuesto al origen son iguales (ver figura 6).

Claro que se podría haber llegado a este resultado de manera casi directa. Finalmente el área del triángulo con vértices $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y el origen $\mathbf{0}$ (figura 6) es el producto de la longitud de la base, $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$, por la altura (que en este caso vale 2) dividida entre 2.

Tal vez la ventaja de haber seguido el camino de las ecuaciones diferenciales, es que ahora estamos seguros de que la curva solución $\alpha(t)$ está obligada, cuando $r(t) > 2$, a ser la parametrización de una recta tangente a C.

Observación 3.6. Si aceptamos a curvas cerradas

$$\alpha(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\operatorname{sen}(t)), \quad r(t) > 0, \quad r(0) = r(2\pi),$$

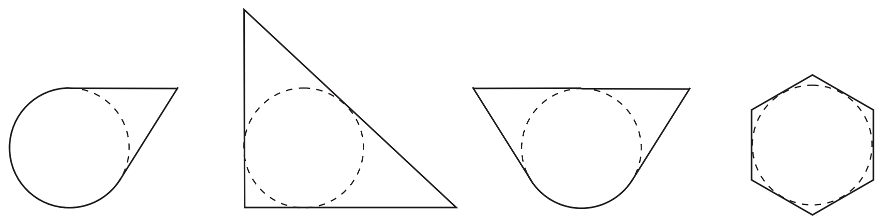

Figura 7.

tales que la función $r(t)$ es continua, y es de clase C^1 por partes, entonces aparecen ante nosotros figuras geométricas muy interesante como soluciones a nuestro problema (ver figura 7).

En particular, todo polígono de n lados, $n \geq 3$, tal que cada uno de sus lados es tangente al círculo C cumple la condición

$$\text{Área}(D_{[t_1,t_2]}) = \text{Long}(C_{[t_1,t_2]}), \quad \text{para toda pareja } t_1 < t_2.$$

Todos estos polígonos son convexos y circunscriben al círculo C.

Agradecimientos. Nuestra querida colega Angélica Macías realizó todas las imágenes que aquí aparecen. Angélica, ¡Muchísimas gracias! Parte de este trabajo se realizó durante una corta estancia que el autor disfrutó en el Centro de Ciencias de la Complejidad, C3, de la UNAM. Muchísimas gracias a Natalia Mantilla Beniers y a Kahorik González Flores por la oportunidad de conocer el C3.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Calculus*, vol. 1, Editorial Reverté, Barcelona, 1999.

[2] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications. An Introduction to Applied Mathematics*, Springer, New York, 1993.

[3] I. Bronshtein y K. Semendyaev, *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, Editorial MIR, Moscú, 1982.