Miscelánea Matemática **34** (2001) 85–102 SMM

Aportaciones de Fermat a la teoría de la probabilidad

María Emilia Caballero*
Instituto de Matemáticas, UNAM
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
04510 México, D.F.
México
marie@matem.unam.mx

Resumen

A partir de las cartas que intercambian Pascal y Fermat podemos reconstruir el origen de varios de los conceptos más importantes en probabilidad, muy especialmente la contribución que Fermat hace para comprender el de independencia

En el año 1654 se establece una importante correspondencia entre Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1655). En esa época, lo usual para intercambiar ideas entre los científicos interesados en temas comunes era ese medio. En este caso quien los puso en contacto fue Carcavi un viejo amigo de Fermat y gran amigo de Pascal.

En éstas cartas, se discuten diversos problemas de matemáticas, entre los cuales se cuentan varios problemas relativos a juegos de azar:

I.- Primer problema de los puntos.

II.- Problema de proporcionalidad.

III.- Segundo problema de los puntos.

*Realizado con el apoyo del proyecto PAPIIT número, IN115799, Instituto de Matemáticas, UNAM.

Muchos historiadores de la ciencia coinciden en señalar que las aportaciones contenidas en ellas, marcan el nacimiento de la teoría de la Probabilidad. No sólo por su contenido, sino por el prestigio de éstos dos matemáticos que atrae a otros científicos de la época hacia este tema. Hasta entonces el estudio del azar no había sido trabajado de manera sistemática. No es claro porqué. En parte, puede ser por provenir de los juegos y las apuestas y como tal era considerado como algo poco serio; en tiempos más remotos, su vínculo con cuestiones religiosas, tales como los oráculos, la adivinación del futuro etc., le pudo haber conferido un carácter sagrado que impidió su estudio.

Es Pascal quien inicia la correspondencia y transmite a Fermat las preguntas que Chevalier de Méré le hacía . Este personaje de la corte de Luis XIV, era un jugador apasionado y en sus múltiples juegos se le presentaron dudas diversas, especialmente relativas a como repartir de manera justa la cantidad apostada. Chevalier de Méré no fue un científico ni un matemático. Es conocido por los matemáticos en la actualidad principalmente por haber planteado estos problemas a Pascal.

A continuación se describirán los problemas y las diversas soluciones que dieron los célebres corresponsales. Se recomienda al lector consultar el apéndice en caso de no contar con los conocimientos básicos de probabilidad.

I.-Para ganar un juego A debe sacar al menos un seis en ocho lanzamientos de un dado. La apuesta total que llamaremos "la bolsa"se la lleva el jugador A si logra obtener el seis. En caso contrario pierde la bolsa entera. El jugador A ya ha lanzado tres veces el dado sin obtener el seis deseado. Si A decide no hacer el cuarto lanzamiento, ¿qué parte de la bolsa debe ser reintegrada a A por no hacer éste lanzamiento?

Este problema lo plantea Pascal a Fermat, en un carta que no se conserva. Sólo tenemos la respuesta de Fermat quien escribe: "....si no hago el primer lanzamiento, debo tomar de la bolsa $\frac{1}{6}$ del total. Si nuevamente no realizo el segundo lanzamiento, debo ser indemnizado con $\frac{1}{6}$ del capital restante, esto es con $\frac{5}{36}$ del total. Si ahora acordamos que no hago el tercer lanzamiento, debo retirar un sexto del capital que queda y es

$$\frac{25}{216}$$

y si después de esto decidimos que no haga la cuarta tirada debo retirar un sexto del capital restante, es decir

$$\frac{125}{1296}$$

del total. Pero usted me propone en el último ejemplo de su carta (cito sus palabras):

... si debo obtener un seis en ocho lanzamientos de un dado y ya jugué tres sin lograrlo y si mi oponente me propone que no juegue mi cuarto lanzamiento y quiere pagarme por ello, deberá darme

$$\frac{125}{1296}$$

del total de la bolsa.

Esto no es cierto según mi principio. Pues en este caso, las tres primeras tiradas sí se hacen, sin haber obtenido el seis; la bolsa total aún sigue en el juego y si el jugador decide no tirar el dado en su cuarta oportunidad debe tomar como recompensa $\frac{1}{6}$ del total. Y si hubiese jugado las primeras cuatro veces sin obtener el seis y decide no lanzar la quinta, recibirá el mismo sexto del total como indemnización."

En el razonamiento de Fermat es de destacar lo siguiente:

1. Si A renuncia a un lanzamiento, le corresponde $\frac{1}{6}$ de la bolsa, sin importar si es el primero, el quinto o el que sea de los ocho. Es decir, cada lanzamiento no depende de los demás.

2. Si A decide no hacer 4 lanzamientos, debe ser indemnizado con $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$ de la bolsa y esta cantidad es igual a

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}+\frac{125}{1296}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Aquí vemos que la idea de calcular la indemnización de A con un sexto de la bolsa restante es equivalente a decir que le corresponde $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$ de la bolsa. Esta cantidad se obtiene de restar a 1 el resultado de multiplicar 4 veces la probabilidad de no obtener un seis en 4 lanzamientos.

3. De manera análoga si A decide no hacer n lanzamientos ($n<8$) le corresponde

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

de la bolsa que es lo mismo que

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+...+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

4. En el juego total A pierde con probabilidad $q=\left(\frac{5}{6}\right)^8$ y gana con probabilidad $p=1-q$. Así que si A decide no hacer ningún lanzamiento

le corresponde $1-\left(\frac{5}{6}\right)^8$ de la bolsa y esta cantidad es igual a

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}+...+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{7}\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

Lo anterior muestra que Fermat maneja con toda claridad el concepto que hoy se conoce como **independencia** en la teoría de la probabilidad[1]. Esto le permite resolver correctamente el problema y no sólo eso, con esta idea establece el inicio de toda una serie de aportaciones que serán fundamentales, tanto en combinatoria como en probabilidad. El antecedente más importante de éste razonamiento es la solución que da Galileo a un problema que proviene del lanzamiento de tres dados[2]: Es fácil ver que hay el mismo número de descomposiciones tanto del 9 como del 10 en suma de tres naturales mayores o iguales a 1 :

$9=3+3+3$	$10=4+3+3$
$9=4+3+2$	$10=4+4+2$
$9=4+4+1$	$10=5+3+2$
$9=5+2+2$	$10=5+4+1$
$9=5+3+1$	$10=6+2+2$
$9=6+2+1$	$10=6+3+1$

¿Porqué entonces, al lanzar tres dados es más probable obtener 10 que 9 al sumar los números resultantes? El razonamiento de Galileo muestra que ve claramente la independencia, ya que da un listado de todos los posibles casos del lanzamiento de dos dados:

$(1,1)$	$*(1,2)$	$*(1,3)+$	$*(1,4)+$	$*(1,5)+$	$*(1,6)+$
$*(2,1)$	$*(2,2)+$	$*(2,3)+$	$*(2,4)+$	$*(2,5)+$	$*(2,6)+$
$*(3,1)+$	$*(3,2)+$	$*(3,3)+$	$*(3,4)+$	$*(3,5)+$	$(3,6)+$
$*(4,1)+$	$*(4,2)+$	$*(4,3)+$	$*(4,4)+$	$(4,5)+$	$(4,6)$
$*(5,1)+$	$*(5,2)+$	$*(5,3)+$	$(5,4)+$	$(5,5)$	$(5,6)$
$*(6,1)+$	$*(6,2)+$	$(6,3)+$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Luego ve que con los tres dados la suma puede dar 9 en los casos marcados con * y 10 en los casos marcados con +. Dice que cada caso tiene igual probabilidad y son más casos con + (27) que con * (25). Este razonamiento impecable fue poco conocido por sus contemporáneos y el mismo Galileo le dió poca importancia!

[1]ver apéndice

[2]En ciertos escritos Cardano, que también fue muy aficionado a los juegos de azar, desarrolla correctamente la idea de independencia pero en otros comete errores serios.

No sabemos si Fermat conocía el resultado de Galileo. En las reuniones de casa del Abad Mersenne en París, se discutían los trabajos de la escuela italiana, pero aparentemente Pascal (que asistía a estas reuniones) no conocía el resultado de Galileo. Es de suponer que Fermat tampoco lo conociera ya que no asistía a dichas reuniones. Es claro por la cita textual que hace Fermat de la carta de Pascal, que este último no había entendido el concepto de independencia, pues relaciona el cuarto lanzamiento con los tres anteriores.

II.-El segundo problema aparece de manera marginal en la carta del 29 de julio de 1654, en la que Pascal escribe acerca de un comentario hecho por de Méré:

"No he tenido tiempo de pensar en un problema que inquieta a M. de Méré. Si usted puede resolver la dificultad sería perfecto. Chevalier de Méré dice haber encontrado falsedad en la teoría de los números por la siguiente razón.

Si me propongo obtener un seis en el lanzamiento de un dado, tengo ventaja si es en cuatro lanzamientos. Si me propongo obtener un doble seis con dos dados, tengo desventaja si es en 24 lanzamientos.Además 24 es a 36 como 4 es a 6.

Este es su gran escándalo ...."

O sea que de Méré razonaba ingenuamente con una idea de proporcionalidad: "4 es al 6 como 24 es a 36ₑ en consecuencia según él, la probabilidad de ganar debería ser la misma en ambos casos. Sin embargo su experiencia personal mostraba que en el segundo caso perdía mientras que en el primero ganaba con mayor frecuencia. De lo cual concluía que había una gran falsedad en los números(!!). La carta en que Fermat responde no se cononce. Se sabe que Fermat explicó con detalle porqué el primer juego es favorable y el segundo desfavorable con sus métodos de combinatoria y sus ideas sobre la independencia.

Comentario:

La independencia de cada lanzamiento permite calcular con toda precisión las probabilidades correspondientes:

La probabilidad de no tener un seis en cuatro lanzamientos es

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

La probabilidad de obtener al menos un seis en cuatro lanzamientos es

$$\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)=p$$

y se calcula p que resulta ser 0.5177.

De manera análoga, se ve que la probabilidad de no tener un doble seis en veinticuatro lanzamientos es

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

La probabilidad de obtener al menos un doble seis en veinticuatro lanzamientos es

$$\left(1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\right)=p_1$$

Al calcular el valor de p_1 vemos que es 0.4914. Así que no hay escándalo alguno. En cambio se comprueba la conclusión a la que había llegado de Méré experimentalmente. Nos podemos preguntar cuán asiduo sería al juego si pudo detectar esta mínima diferencia.

III.- Por último, Pascal comenta en la misma carta el segundo problema de los puntos. Este problema aparece en el libro de Fra Luca Paccioli editado en Venecia en 1494.

"Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita"de la siguiente manera:

Un juego de pelota entre dos equipos consiste en alcanzar 60 puntos. Cada etapa del juego da a quien la gana 10 puntos y 0 puntos a quien la pierde. La apuesta total es de 10 ducados. El juego debe interrumpirse y en ese momento el equipo A ha ganado 50 puntos y el equipo B tiene 20 puntos. ¿Cómo debe repartirse la bolsa de 10 ducados entre A y B de manera que la repartición sea justa?

Puesto que el libro de Paccioli es principalmente una recopilación de temas conocidos, seguramente el problema de los puntos se conocía desde tiempo atrás.

Se dieron soluciones aparentemente razonables, la más frecuente era: dividir la bolsa en partes proporcionales al número de juegos ganados por cada uno de los equipos. Es la solución que propone Paccioli en su libro: "se debe dividir en una proporción de 5 a 2".

¿Porqué es incorrecta ésta respuesta?

Es importante que el lector busque responder a ésta pregunta antes de proseguir con la lectura.

No se encontró la respuesta correcta hasta la época de la correspondencia entre Pascal y Fermat o sea que fue un problema abierto por más de 160 años.

Pascal plantea el problema bajo la siguiente forma a Fermat:

Cada jugador apuesta 32 “pistols”(aqui las llamaramos monedas); hay dos jugadores A y B y cada etapa del juego da un punto al ganador y 0 al perdedor. Gana el juego el primero en tener 3 puntos. Se supone además que ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar cada etapa. El juego se interrumpe cuando A cuenta con un punto y B con ninguno. La pregunta en la misma ¿Cómo repartir la bolsa total de 64 monedas?

La carta en que Fermat le contesta no se conoce, pero podemos saber lo que dijo Fermat por el contenido de la respuesta de Pascal. En ella Pascal reproduce el razonamiento de Fermat:

Para encontrar la división justa de la bolsa es necesario saber cuantas etapas se requieren para que el juego termine y se pueda decidir quien gana. Observa que no todas las formas de terminar el juego tienen la misma probabilidad. Por ejemplo, la sucesión ABA y la sucesión ABBA no tienen la misma probabilidad y en ambos casos gana A. (se usa la notación A si A gana una etapa y B si es B quien gana, es decir, la sucesión ABA significa A gana, luego B gana y por último A vuelve a ganar.) Para evitar esa dificultad, Fermat primero establece cual es el máximo número de etapas necesarias para decidir el juego, en este caso es fácil ver que son cuatro. Hace entonces un listado de TODOS los posibles resultados de las cuatro etapas:

$$\begin{array}{cccc}
*AAAA & *ABAA & *BAAA & *BBAA \\
*AAAB & *ABAB & *BAAB & BBAB \\
*AABA & *ABBA & *BABA & BBBA \\
*AABB & ABBB & BABB & BBBB
\end{array}$$

Al observar esta lista ve que los casos en que A ganaría son 11 ya que sólo necesita de dos etapas más para ganar el juego y B en 5 pues B requiere de tres puntos para ganar. Con esta información Fermat concluye que la repartición justa debe ser

$$\frac{64 \times 11}{16} = 44$$

monedas para A y

$$\frac{64 \times 5}{16} = 20$$

monedas para B.

Pascal expresa su gran admiración por la solución de Fermat y declara estar totalmente de acuerdo con el resultado, además describe otro método para resolver el problema que, sin necesidad de hacer la enumeración de todas las posibilidades conduce al mismo resultado:

(i) Primero resuelve el problema en el caso que A tenga dos puntos y B uno; el razonamiento es el siguiente: A puede ganar y llevarse las 64 monedas o puede perder y quedará empatado con B, por lo tanto a A le corresponden

$$\frac{64+32}{2} = 48$$

monedas y a B las 16 restantes.

(ii) Una vez resuelto este caso, sigue el mismo razonamiento para el caso en que A tenga dos puntos y B ninguno:

Si A gana se lleva las 64 monedas y si B gana quedan en el caso anterior, por lo que la repartición justa deberá ser para A

$$\frac{64+48}{2} = 56$$

monedas y 8 para B.

(iii) De manera análoga concluye el caso en que A lleve un punto y B cero puntos, la bolsa deberá repartirse así:

$$\frac{56+32}{2} = 44$$

monedas para A y 20 para B, ya que si A gana quedan en el caso (ii) y si B gana quedan empatados.

Este método nos lleva, por simetría a la siguiente tabla, donde la primera columna representa el número de etapas que A ha ganado, el último rengón el correspondiente de B y los números dentro de la tabla la proporción que le toca a cada jugador:

3	64 : 0	64 : 0	64 : 0	
2	56 : 8	48 : 16	32 : 32	0 : 64
1	44 : 20	32 : 32	16 : 48	0 : 64
0	32 : 32	20 : 44	8 : 56	0 : 64
	0	1	2	3

Vemos que la respuesta al problema inicialmente planteado (caso (iii) de Pascal) coincide con la respuesta que encuentra Fermat por la vía de contar todos los casos posibles. Pascal en su carta se congratula de ello y escribe "Veo que la verdad es la misma en Toulouse que en Parísza que Fermat vivía en Toulouse y Pascal en París.

Si aplicamos el método de Fermat al problema que aparece en el libro de Fra Luca de Paccioli, se tendrá que también en este caso el juego se decide a lo más en cuatro etapas (mismo listado):

$$\begin{array}{llll} AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\ AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\ AABA & ABBA & BABA & BBBA \\ AABB & ABBB & BABB & *BBBB \end{array}$$

Pero ahora A gana en 15 casos y pierde en uno ya que A necesita ganar una etapa para ganar el juego mientras que B necesita 4 etapas. La repartición justa debe ser en este caso y siempre bajo la hipótesis de que en cada etapa la probabilidad de ganar es la misma para ambos:

$$\frac{10 \times 15}{16}$$

ducados para A y

$$\frac{10 \times 1}{16}$$

ducados para B.

Es claro que también se puede resolver con el método de Pascal. Ahora escribiremos en la tabla sólo la proporción de la bolsa que le toca a cada uno (la tabla no aparece completa, se deja como ejercicio al lector interesado llenar los espacios en blanco). Al igual que en la tabla anterior la primera columna representa el número de etapas que A ha ganado y el último renglón las de B.

6	1 : 0	1 : 0	1 : 0	1 : 0	1 : 0	1 : 0	／
5			15 : 1	7 : 1	3 : 1	1 : 1	0 : 1
4					1 : 1	1 : 3	0 : 1
3				1 : 1		1 : 7	0 : 1
2			1 : 1			1 : 15	0 : 1
1		1 : 1					0 : 1
0	1 : 1						0 : 1
／	0	1	2	3	4	5	6

Y vemos que el resultado es

$$10 \times \frac{1}{16}$$

ducados para B y

$$10 \times \frac{15}{16}$$

para A.

El método de Pascal puede describirse como un método de inducción reversa. Razona en sentido inverso; empieza por considerar la situación previa al triunfo de alguno de los contrincantes y retrocede paso a paso para examinar cada uno de los casos posibles.

Parte del hecho que gana la bolsa quien logra ganar el juego y a partir de este resultado final se regresa paso a paso para determinar la repartición justa en cada caso.

Con éstos elementos, queda claro el porqué no es correcto repartirla de manera proporcional al número de etapas ganadas por cada uno. El acuerdo original "gana el que primero tenga 3 puntos" determina al juego y eso obliga a tomar en cuenta las distintas maneras de llegar a la meta propuesta.

La discusión que hemos reproducido es actualmente tema de los cursos elementales de probabilidad, es por ello que tal vez no se valore su trascendencia. Sin embargo, este intercambio de cartas, más allá de resolver el problema de los puntos, establece conceptos fundamentales para el posterior desarrollo de la teoría, tales como: independencia, probabilidad condicional y los métodos de enumeración y conteo para calcular probabilidades bajo hipótesis de equiprobabilidad de los posibles resultados.

El concepto de independencia tomará aun cierto tiempo en ser asimilado por la comunidad matemática; de hecho cuando Pascal muestra la solución de Fermat a Roberval (profesor de matemáticas en el famoso College de France), Roberval no la acepta. Objeta la introducción de los cuatro juegos . Relativo a este incidente Leibnitz escribió: "..las bellas ideas sobre los juegos de azar de los señores Fermat, Pascal y Huygens que M. de Roberval no pudo o no quiso entender".

Por otra parte, como ya hemos visto en el primer problema, Pascal mismo parece no haber entendido cabalmente el método de Fermat ya que en la misma carta le dice que si bien su método funciona en el caso de dos jugadores ya no funcionará para tres jugadores. Da un ejemplo y lo resuelve erróneamente. No se conoce la respuesta de Fermat a esta carta. El problema que plantea Pascal es el siguiente:

Tenemos tres jugadores A, B y C igualmente capaces de ganar cada etapa. Para ganar el juego, A necesita un punto, B y C dos puntos. Pascal dice correctamente que se requieren tres etapas para decidir el juego. Enumera correctamente las 27 posibilidades

$*AAA$	$*BAA$	$*CAA$
$*AAB$	$*BAB$	$*CAB$
$*ABA$	$**BBA$	$*CBA$
$*ACA$	$*BCA$	$**CCA$
$*AAC$	$*BAC$	$*CAC$
$*ACC$	BCC	CCC
$*ABB$	BBB	CBB
$*ACB$	BCB	CCB
$*ABC$	BBC	CBC

Claramente la proporción para repartir la bolsa es 17 para A, 5 para B y 5 para C. Pascal, sin embargo dice que las posibilidades de triunfo para A son 19, para B son 5 y otras 5 para C. Al mismo tiempo, reconoce que esta repartición sería injusta. Por ello concluye que el método de Fermat no es válido para tres jugadores (!!).

Otro indicio de la dificultad para entender la independencia es que muchos años más tarde DÁlambert discute el problema de cuál es la probablidad de obtener dos águilas en dos lanzamientos de una moneda (equilibrada). DÁlambert sostiene que es $\frac{1}{3}$ ya que para él, los resultados posibles y equiprobables son obtener 0, 1 o 2 águilas.

Si bien Pascal parece no dominar el concepto de independencia, su método es muy ingenioso y contiene (como ya lo mencionamos) el concepto de probabilidad condicional[3] ya que de hecho está calculando la probabilidad de triunfo condicionanda a que cada jugador tenga cierto número de puntos sin haber aún logrado ganar.

Este problema se siguió discutiendo por los sucesores de Fermat y Pascal y se generalizó de varias maneras, pero los dos métodos fundamentales siguen las mismas líneas de razonamiento.

El problema en su forma general es:

Un juego con dos contrincantes A y B. Gana el juego el primero que logre tener N puntos y cada etapa del juego da a quien la gana 1 punto y ninguno al perdedor. El juego debe interrumpirse cuando A ha ganado $r < N$ juegos y B ha ganado $s < N$ juegos, es decir, A tiene r puntos y B tiene s. Además, la probabilidad de que A gane cada etapa es $p \in (0,1)$ y en consecuencia la de B es $q = 1 - p$. La cantidad que apuestan es irrelevante (¡en términos de la solución del problema!). Sólo se supone que cada uno aporta la misma cantidad y la suma de ellas conforma la

[3] ver apéndice

bolsa a ganar, que será repartida propocionalmente a la probabilidad que cada uno tenga de ganar en el momento de interrumpir el juego.

El método de Pascal descrito con la teminología actual es el siguiente:

Se define $P(r,s)$ como la probabilidad de que A gane el juego si sabemos que A tiene r puntos y que B tiene s en el momento de interrunpir el juego: Entonces se cumple, para $s, r < N$,

(a.) $P(r,N) = 0$

(b.) $P(N,s) = 1$

(c.)$P(r,s) = pP(r+1,s) + qP(r,s+1)$

En efecto, las afirmaciones (a.) y (b.) son inmediatas de la definición. Para demostrar la propiedad (c.) se requiere el concepto de probabilidad condicional[4] y para la demostración se introducen las siguientes variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si A gana la i-ésima etapa,} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y

$$Y_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

Claramente Y_k es el número de puntos que A tiene hasta la k-ésima etapa y $X_1, X_2, ...$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y con la misma distribución (Bernoulli de parámetro p)[5]. Vemos entonces que, si U denota al evento de que “A gane”,

$$\begin{aligned} P(r,s) = \mathbb{P}(U|Y_{r+s} = r) &= \frac{\mathbb{P}(U, Y_{r+s} = r)}{\mathbb{P}(Y_{r+s} = r)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(U, Y_{r+s} = r, X_{r+s+1} = 1)}{\mathbb{P}(Y_{r+s} = r)} \\ &+ \frac{\mathbb{P}(U, Y_{r+s} = r, X_{r+s+1} = 0)}{\mathbb{P}(Y_{r+s} = r)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(U, Y_{r+s+1} = r+1)}{\mathbb{P}(Y_{r+s} = r)} + \frac{\mathbb{P}(U, Y_{r+s+1} = r)}{\mathbb{P}(Y_{r+s} = r)} \\ &= p\frac{\mathbb{P}(U, Y_{r+s+1} = r+1)}{\mathbb{P}(Y_{r+s+1} = r+1)} + q\frac{\mathbb{P}(U, Y_{r+s+1} = r)}{\mathbb{P}(Y_{r+s+1} = r)} \end{aligned}$$

[4]ver apéndice

[5]ver apéndice

$$
\begin{aligned}
&= p\,\mathbb{P}(U|Y_{r+1+s} = r+1) + q\,\mathbb{P}(U|Y_{r+s+1} = r) \\
&= pP(r+1, s) + qP(r, s+1)
\end{aligned}
$$

La quinta igualdad es consecuencia de la independencia ya que:

$$
\begin{aligned}
p\,\mathbb{P}(Y_{r+s} = r) &= \mathbb{P}(X_{r+s+1} = 1)\,\mathbb{P}(Y_{r+s} = r) \\
&= \mathbb{P}(X_{r+s+1} = 1, Y_{r+s} = r) = \mathbb{P}(Y_{r+s+1} = r+1)
\end{aligned}
$$

es decir,

$$\frac{1}{\mathbb{P}(Y_{r+s} = r)} = \frac{p}{\mathbb{P}(Y_{r+s+1} = r+1)}$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
q\,\mathbb{P}(Y_{r+s} = r) &= \mathbb{P}(X_{r+s+1} = 0)\,\mathbb{P}(Y_{r+s} = r) \\
&= \mathbb{P}(X_{r+s+1} = 0, Y_{r+s} = r) = \mathbb{P}(Y_{r+s+1} = r)
\end{aligned}
$$

o sea,

$$\frac{1}{\mathbb{P}(Y_{r+s} = r)} = \frac{q}{\mathbb{P}(Y_{r+s+1} = r)}$$

Es fácil ver que a partir de éstas tres relaciones podemos calcular $P(r, s)$ para toda $r, s \leq N$: Se empieza con $P(N-1, s)$, $s = N-1, N-2, ...0$ y se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&P(N-1, N-1) = p \\
&P(N-1, N-2) = p + pq \\
&P(N-1, N-3) = p + pq + pq^2 \\
&\ldots \\
&P(N-1, 0) = p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{N-1}
\end{aligned}
$$

Luego se calcula $P(N-2, s)$, $s = N-1, N-2, ...i, 0$ y así sucesivamente.

El método general de Fermat es el siguiente:

Para lograr N triunfos, si el juego se interrumpe cuando A ha ganado r etapas y B ha ganado s etapas $(r, s < N)$, se debe ver cuál es la probablidad de que A gane $n = N - r$ etapas antes de que B gane $m = N - s$. El razonamiento de Fermat sería: para lograr n triunfos de A antes que m triunfos de B es necesario y suficiente que se tengan n triunfos de A en las siguientes $n+m-1$ etapas. Esto es cierto ya que entonces B podrá tener a lo más $m-1$ puntos en las $n+m-1$ etapas. Por otro lado si hubiera menos de n puntos para A en ese número de etapas, entonces B necesariamente tendrá m triunfos en el mencionado número de etapas y ya habría ganado el juego. Recordemos que la probablidad de tener k triunfos en $n + m - 1$ etapas es

$$\binom{m+n-1}{k} \times p^k q^{m+n-1-k}$$

Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$P(r,s) = \sum_{k=n}^{k=m+n-1} \binom{m+n-1}{k} \times p^k q^{m+n-1-k}$$

Lo hecho por Pascal permite dar un algoritmo para que una computadora calcule las probabilidades con la inducción reversa mencionada. Lo hecho por Fermat es, desde el punto de vista conceptual, de una enorme importancia pero no es fácil implementarlo para juegos con un número grande de etapas.

La correspondencia entre ellos fue de muy corta duración debido en gran parte a que Pascal contesta a Fermat que

"...busque en otra parte un corresponsal capaz de seguir sus desarrollos numéricos...",

lo que significa el fin de su comunicación y es cuando Pascal decide retirarse de las matemáticas (por primera vez). Sus esfuerzos los canaliza en cuestiones religiosas, y se une al grupo de los Jansenistas. Esto hace que Fermat abandone sus reflexiones sobre los juegos de azar y continue pensando en otros temas de las matemáticas. Relativamente al conjunto de su obra, la parte probabilista es muy pequeña aunque sustancial y profunda. Tocará a los sucesores Christianus Huygens, James Bernoulli, Pierre-Rémond De Montmort, Abraham de Moivre, continuar la obra emprendida por estos dos grandes pensadores.

Sin embargo, y a pesar de los importantes descubrimientos hechos por este grupo y otros más como John y Nicolas Bernoulli, Laplace, Gauss etc., la teoría de la probabilidad se mantuvo relativamente marginada del centro del desarrollo matemático hasta llegar al siglo XX . A principios del siglo el desarrollo de la teoría de la medida da finalmente el marco conceptual adecuado a la teoría y esta va tomando poco a poco un lugar central en el mundo de las matemáticas tanto puras como aplicadas.

En todo momento de su desarrollo, las ideas de independencia y de probabilidad condicional han sido y son fudamentales. Los métodos probabilistas logran resolver conjeturas y problemas abiertos de análisis matemático, ecuaciones diferenciales parciales y teoría de números entre otras, y permiten aproximar soluciones de, por ejemplo, ecuaciones diferenciales parciales mediante una afortunada combinación de resultados probabilistas con métodos de análisis numérico.

El espectacular crecimiento de esta rama en los últimos 100 años y la manera en cómo se ha interrelacionado con muchas otras ramas tanto de la matemática como de la física y la estadística seguramente sorprendería a los precursores Pascal y Fermat.

Apéndice. Independencia y condicionamiento en los casos discretos.

Se dará una introducción a los temas mencionados que permita comprender el texto anterior. El lector interesado en profundizar o trabajar con mayor detalle estos temas puede consultar los libros [2] o [5] de la bibliografía.

Sea Ω un conjunto no vacío llamado universo o espacio muestral y sea E otro conjunto finito o numerable que llamaremos espacio de estados. A los subconjuntos de Ω se les llama eventos y a las funciones de Ω en E se les llama variables aleatorias.

Denotaremos por $\mathbf{P}(\Omega)$ a la clase de todos los eventos o subconjuntos de Ω. Una función

$$\mathbb{P} : \mathbf{P}(\Omega) \to [0,1]$$

se llama medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbf{P}(\Omega))$ si satisface:

1.- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2.- $\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i)$ siempre que los conjuntos

$$C_i \subset \Omega, i = 1, 2, 3, ...$$

sean ajenos dos a dos.

En los ejemplos típicos de la teoría elemental se trabaja con Ω finito y la probabilidad en esos casos se define como

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)}, \quad \text{si} \quad C \subset \Omega\,.$$

Esta medida de probabilidad proviene de la hipótesis de equiprobabilidad, es decir, se supone que cada posible resultado tiene la misma probabilidad

$$\frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

de ser obtenido. Es de destacar que si el problema está mal planteado (ver el razonamiento de DÁlambert), esta hipótesis no refleja adecuadamente el fenómeno que se busca describir.

Definición 1. Se dice que dos eventos C y D son independientes si

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(D)\,.$$

Es claro que el conjunto vacío y el total Ω son independientes de cualquier otro evento.

Para ilustrar la definición veamos un ejemplo muy sencillo:

Se realizan dos lanzamientos de una moneda equilibrada, es decir, tal que la probabilidad de obtener águila sea la misma que la de obtener sol (ambas son $\frac{1}{2}$). El espacio muestral de dos lanzamientos es

$$\Omega = \{(a,a),(a,s),(s,a),(s,s)\}$$

y

$$\mathbb{P}(\{a,a\}) = \mathbb{P}(\{a,s\}) = \mathbb{P}(\{s,a\}) = \mathbb{P}(\{s,s\}) = \frac{1}{4}\,.$$

Es claro que cada lanzamiento es independiente del otro por lo que los eventos A_i = sale águila en la i-ésima tirada $i = 1,2$ deben satisfacer la definición de independencia:

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\{a,a\}) + \mathbb{P}(\{a,s\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

análogamente $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$ y entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)\,.$$

En este mismo espacio daremos un ejemplo de eventos que no son independientes. Sea U el evento de obtener águila en la primera tirada y V el evento de obtener dos águilas. Claramente en este caso

$$V \subset U, \quad \mathbb{P}(U) = \frac{1}{2} \quad y \quad \mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}$$

mientras que

$$\mathbb{P}(U \cap V) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)\,.$$

Resulta, como era de esperar, que no se cumple la definición de independencia.

Ahora se verá la definición de probabilidad condicional. Se trabaja en el mismo marco $(\Omega, \mathbf{P}(\Omega), \mathbb{P})$ y se busca dar sentido al hecho de calcular la probabilidad de un evento U si se tiene información adicional representada por otro evento V. Es la probabildad de U "condicionado a V".

Para ello se define una nueva medida de probabilidad

$$\mathbb{P}^V : \mathbf{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

mediante la relación

$$\mathbb{P}^V(\cdot) = \frac{\mathbb{P}(\cdot \cap V)}{\mathbb{P}(V)}$$

siempre que $\mathbb{P}(V) > 0$. Es fácil comprobar que $\mathbb{P}^V$ es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbf{P}(\Omega))$ y se denota usualmente como $\mathbb{P}(\cdot|V)$.

En el ejemplo anterior con las mismas notaciones veamos algunos cálculos de probabilidad condicional:

$$\mathbb{P}(A_1|A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(U|V) = \frac{\mathbb{P}(U \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\mathbb{P}(V|U) = \frac{\mathbb{P}(U \cap V)}{\mathbb{P}(U)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Todo lo cual concuerda perfectamente con el sentido común.

Lo anterior nos da otra forma de definir independencia para eventos con probabilidad estrictamente positiva. En este caso las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) Los eventos C y D son independientes.

b) $\mathbb{P}(C|D) = \mathbb{P}(C)$.

c) $\mathbb{P}(D|C) = \mathbb{P}(D)$.

Es decir que la información adicional no afecta el valor de la probabilidad del evento dado. En el ejemplo esto se ilustra en el caso de A_1, A_2.

Algunos ejemplos de variables aleatorias en Ω son:

$$X : \Omega \to E$$

definida por $X(a, a) = 2, X(a, s) = 1, X(s, a) = 1, X(s, s) = 0$ y en este caso, X representa el número de águilas obtenidas.

$$Y : \Omega \to E$$

definida como $Y(a,a) = 2, Y(a,s) = 0, Y(s,a) = 0, Y(s,s) = -2$ y que puede significar la ganancia en un juego de volados en donde se gana 1 peso si sale águila y se pierde 1 si sale sol.

Otra variable definida ahora en $\Omega_0 = \{a, s\}$, que es el espacio asociado al lanzamiento de una moneda, es

$$Z : \Omega_0 \to E$$

con $Z(a) = 1, Z(s) = 0$ y se conoce con el nombre de "variable aleatoria de Bernoulli de parámetro p", donde p es la probabilidad de obtener águila.

Referencias

[1] F. N. Davis, Games, Gods and Gambling. Charles Griffin and Co. London, 1962.

[2] C.M. Grinstead, J.L. Snell, Introduction to Probability. American Mathematical Society, 1997.

[3] E. Logak, C. Vigneron, Probabilités et statistiques 1. Diderot editeur, Arts et Sciences, 1995.

[4] M. S. Mahoney, The mathematical carreer of Pierre de Fermat. Princeton University Press, 1973.

[5] S. Ross, A first Course in probability. Prentice-Hall 1998.