Miscelánea Matemática **43** (2006) 1–19 SMM

Martingala de Pascal

María Emilia Caballero*
Instituto de Matemáticas, UNAM
Area de la Investigación Científica
Circuito Exterior. Cd. Universitaria
04510 Mexico, D.F.
marie@matem.unam.mx

Introducción.

La teoría de la probabilidad a diferencia de otras ramas de las matemáticas tiene fecha de nacimiento: 1654. Es el año en el cual se lleva a cabo el famoso intercambio de cartas entre Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) [5]. Al respecto, muchos años después otro matemático famoso, Siméon Denis Poisson escribirá el siguiente comentario "Un problema relativo a los juegos de azar y propuesto a un jansenista por un hombre de mundo fue el origen del cálculo de probabilidad". El hombre de mundo y asiduo jugador fue Chevalier de Meré y el jansenista[1] fue Pascal. En efecto,una parte de la correspondencia entre Pascal y Fermat aborda los problemas de juegos de azar que planteaba dicho jugador a Pascal. En [1] se describe con detalle el contenido de esta correspondencia en lo relativo a la teoría de la probabilidad.

En este trabajo nos centraremos en el tercer problema de los puntos y la respuesta que Pascal da al mismo, ya que ella encierra muchas de las ideas fundamentales de la teoría, algunas de las cuales aparecen explícitamente apenas hace medio siglo, otras son aun más recientes, pero todas ellas ya estaban presentes en el trabajo de Pascal, aun cuando no de manera explícita.

*Se agradece el apoyo del Proyecto PAPIIT-IN120605

[1]El jansenismo fue una tendencia religiosa de la época. Para mayor información al respecto, se puede consultar [8].

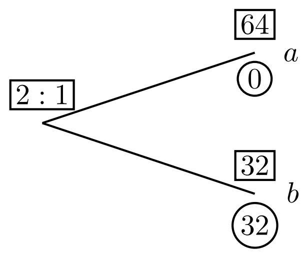
Antes de entrar en materia, deseamos resaltar algunos sucesos importantes de esa época en Francia: en 1643 muere el rey Luis XIII y lo sucede su hijo Luis XIV, de apenas 5 años y quien es coronado precisamente en el año de 1654, cuando contaba ya con 16 años. Es bien sabido que posteriormente tomará el nombre de rey sol y bajo su reinado, la época del absolutismo en Francia tendrá su mayor auge y con ello la intolerancia religiosa abarcará no sólo a los protestantes, sino también a grupos de católicos disidentes, lo cual, de un modo muy directo afectará al personaje principal de este escrito: Blaise Pascal. Es también la época en que se inician las reuniones científicas en la casa del Abad Mersenne, a las que tanto B. Pascal como su padre asisten regularmente y que posteriormente darán origen a la famosa Academia de Ciencias de Francia.

Planteamiento, historia y solución del problema.

El tercer problema de los puntos aparece por primera vez en el libro de Fra Luca Paccioli [5] (Venecia 1494) y dice asi: Se juega entre dos equipos A y B, cada uno apuesta una cantidad igual (5 ducados) y el juego consta de un cierto número de etapas. Cada etapa da a quien la gana 10 puntos, cero puntos a quien la pierde y ambos equipos son igualmente capaces de ganar una etapa. Gana el juego, el primero en llegar a 60 puntos. El juego debe interrumpirse cuando el equipo A lleva 50 puntos ganados y el B lleva 20 puntos. ¿Cómo debe repartirse la apuesta total (10 ducados) entre los dos equipos de manera justa?

Algo similar plantea Chevalier de Meré a Pascal y solo las cifras cambian: Dos jugadores A y B apuestan 32 "pistols" cada uno, para tener una bolsa total de 64 "pistols". El juego, nuevamente consta de varias etapas y cada etapa da a quien la gana un punto (ambos jugadores son igualmente capaces de ganarla). Gana el juego y por lo tanto la bolsa total el primero en llegar a tres puntos. El juego debe interrumpirse cuando A lleva 2 puntos y B cero puntos. La pregunta es la misma. En este escrito nos centraremos en el razonamiento de Pascal y su método de reversión del tiempo o recursión inversa: sabe, por las reglas del juego, como repartir la bolsa cuando uno de ellos ya tiene 3 etapas ganadas y a partir de esto va regresando etapa por etapa. Por ello examina primero el caso en que el juego se interrumpe cuando A lleva 2 puntos y B lleva un punto:

Si A gana (en el esquema esto se representa con una a minúscula y la raya que sube), se lleva la bolsa entera, es decir, las 64 "pistols". Si B gana la etapa (lo que se denota con b minúscula y la raya hacia abajo), llevarán cada uno 2 puntos y en ese caso por tratarse de un empate, la bolsa deberá repartirse mitad y mitad, esto es, a A le tocarán 32 "pistols".

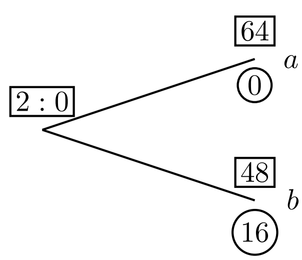


(En estos esquemas, el número que aparece dentro del cuadro es lo que corresponde a A y el número dentro del círculo es lo que corresponde B).

Se sabe que ambos jugadores tienen igual capacidad de ganar una etapa, por lo que la repartición justa deberá ser:

$$x = \frac{64}{2} + \frac{32}{2} = 48.$$

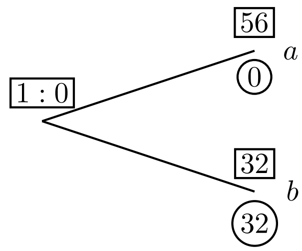
Al disponer de ésta información Pascal ya puede tratar el caso que le preguntan originalmente, a saber si A lleva 2 puntos y B cero: si A gana se lleva la bolsa entera y si B gana, se llega al caso anterior, ya que A llevará 2 puntos y B un punto, y ya se sabe que en tal caso a A le corresponden 48 "pistols" y a B las 16 restantes.



Nuevamente, ambos tienen la misma probabilidad de ganar la etapa por lo que la reparticion justa es

$$x = \frac{64}{2} + \frac{48}{2} = 56\,.$$

Por último y aunque esta pregunta no aparece en la correspondencia de estos dos sabios, veamos el caso en que A lleve un punto y B cero puntos: si A gana la etapa, se estará en la situación 2 a 0, por nosotros ya conocida y si B gana, hay un empate y la bolsa se reparte mitad y mitad:



Y ahora

$$x = \frac{56}{2} + \frac{32}{2} = 44\,.$$

Los casos restantes o son empates (uno a uno, dos a dos) o son simétricos en A y B.

Para contar con toda la información obtenida hasta ahora, se construye un esquema (llamado en teoría de gráficas, árbol binario de altura 3) y que representa al juego después de tres etapas.

En la figura 1 el número que aparece en el cuadro es lo que corresponde a A y el número en un círculo es lo de B . Las letras minúsculas *a*, *ab*, *ba*, *aba*, etc. indican la evolución del juego (por ejemplo *aba*, significa que A ganó la primera etapa del juego, B ganó la segunda y A la tercera):

Es claro que, en tres etapas el juego no se decide, salvo en los casos en que A o B ganen tres etapas al hilo. El juego se decidirá en a lo más cinco etapas, como se puede ver en la figura 2.

A manera de ejercicio, se propone al lector que resuelva con el método de Pascal el problema de Fra Luca Paccioli y que compruebe que la proporción justa debe ser 15 a 1, es decir, si la bolsa total es de 10 ducados a A le corresponden

$$\frac{15}{16} \times 10$$

ducados, mientras que al equipo B le tocarán

$$\frac{1}{16} \times 10$$

ducados. Este cálculo se puede ver en [1].

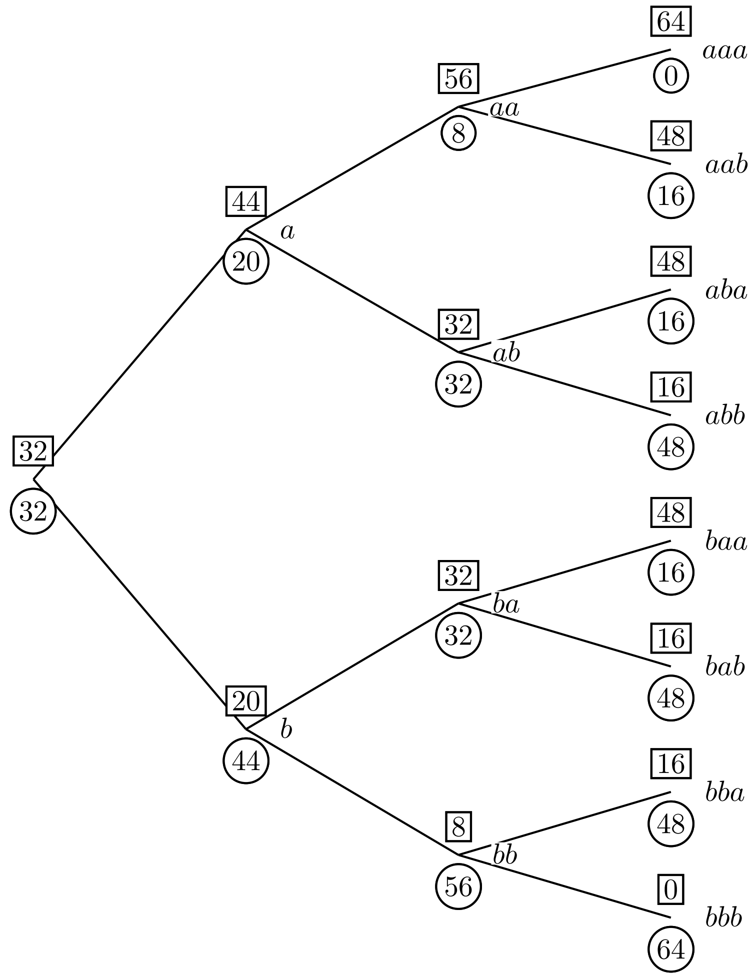


Figura 1: **Caminos posibles hasta la tercera etapa.**

Conceptos que aparecen en el Método de Pascal.

En su escrito, además de resolver el problema planteado por Meré, Pascal maneja por primera vez las siguientes ideas y futuros conceptos matemáticos, que desde luego en su época ni tenían estos nombres, ni se conocían, ni se utilizaban:

1. Variable aleatoria y esperanza matemática.
2. Probabilidad y esperanza condicionales.
3. Martingala.
4. Cadena de Markov.
5. Tiempo de paro.

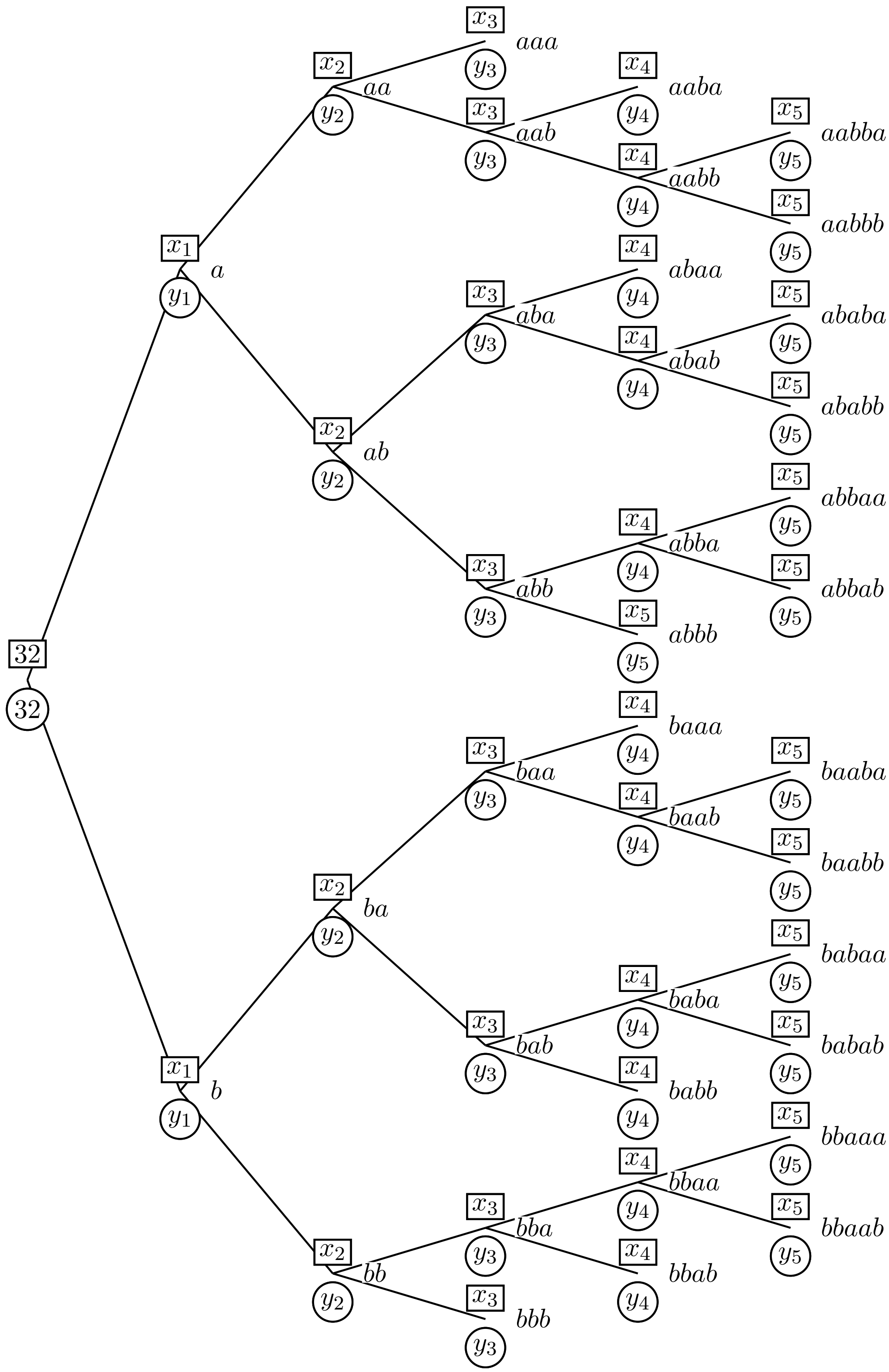


Figura 2: **Árbol de caminos posibles.**

6. Solución elemental al problema de valuación de una opción.

Veremos en detalle algunos de ellos y muy especialmente el último por ser el más novedoso, de gran utilidad en las aplicaciones financieras y porque nos da elementos para comprender cual es el mecanismo que permite valuar opciones y porqué, para ello el papel de las martingalas es fundamental.

Definamos X_j como la cantidad que en la etapa j-ésima del juego corresponde al jugador A, si en ese momento se interrumpe el juego (note que es lo que en la figura 2 aparece con x_j).

De los cálculos hechos en la sección anterior obtenemos:

1. $X_0 = 32$.

2. X_1 toma dos valores 44 (si A gana) y 20 (si B gana), cada uno con probabilidad un medio.

3. X_2 toma tres valores: 56 (*aa*), 32 (*ab*,*ba*), y 8 (*bb*). El primero y el último con probabilidad $\frac{1}{4}$ y el valor 32 lo toma con probabilidad $\frac{1}{2}$, ya que puede llegar a ese valor por dos caminos, *ab* y *ba*.

4. X_3 toma los valores $\{64, 48, 16, 0\}$, y la probabilidad con que toma el valor 64 (*aaa*) es $\frac{1}{8}$ al igual que el valor 0 (*bbb*). En cambio los valores 48 y 16 los toma con probabilidad $\frac{3}{8}$ ya que hay tres caminos posibles (*aab*, *aba*, *baa*) para llegar a 48 o (*abb*, *bab*, *bba*) para 16.

5. X_4 toma los valores $\{64, 32, 0\}$ y en este caso toma el valor 64 o el valor 0 cada uno con probabilidad $\frac{5}{16}$ y toma el valor 32 con probabilidad $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. Para convencerse de que estas son las probabilidades correctas, basta ver la figura 2, observar que cada camino es equiprobable (de probabilidad $\frac{1}{16}$) y contar el número de caminos que llevan a cada resultado posible: *aaa*, *aaba*, *abab*, *abaa*, *abba*, *abbb*, *baaa*, etc... . Claramente *aaa* ya no se escribe en la cuarta etapa, pero no podemos dejar de contarlo con probabilidad $\frac{2}{16}$ y lo mismo para *bbb*.

6. X_5 toma sólo los valores 64 y 0 cada uno de ellos con probabilidad un medio.

Veamos que el método mismo utiliza implicitamente en muchos lugares el concepto de esperanza de una variable aleatoria: para empezar la manera en cómo se llegó al valor 48 cuando A llevaba 2 puntos y

B uno, fue por la vía de obtener la esperanza de la variable aleatoria que toma los valores 64 y 32 cada uno con probabilidad 1/2. Esto es lo mismo que se hace para obtener el valor 56 o 44 en el árbol. En segundo lugar, se puede comprobar facilmente que la esperanza de cada una de las variables definidas es 32. En efecto,

$$\begin{aligned}
E(X_0) &= 32 \\
E(X_1) &= \frac{1}{2}44 + \frac{1}{2}20 = 22 + 10 = 32 \\
E(X_2) &= \frac{1}{4}56 + \frac{1}{2}32 + \frac{1}{4}8 = 32 \\
E(X_3) &= \frac{1}{8}64 + \frac{3}{8}48 + \frac{3}{8}16 + \frac{1}{8}0 = 32 \\
E(X_4) &= \frac{5}{16}64 + \frac{6}{16}32 + \frac{5}{16}0 = 32 \\
E(X_5) &= \frac{1}{2}64 + \frac{1}{2}0 = 32
\end{aligned}$$

Pero podemos decir aun más; la sucesión $(X_n)_{n=0}^{n=5}$ es lo que ahora se conoce como **martingala** (véase en el apéndice las definiciones de probabilidad y esperanza condicionales). Este concepto aparece en la literatura matemática por primera vez en 1939, en el libro de J. Ville [10]; posteriormente J.L. Doob desarrolla toda una teoría de martingalas de 1940-1950 y demuestra muchos teoremas importantes de esta [3], tales como el lema maximal, teoremas de convergencia y aplicaciones.

La idea es que una martingala modela un juego justo y su definición precisa (en términos modernos) y en el caso discreto es:

Una sucesión $(X_n)_{n=0}^{n=M}$ de variables aleatorias discretas se llama martingala si dados dos números naturales n, p tales que $n + p \leq M$ se cumple:

$$E(X_{n+p}|X_n, X_{n-1}, ...X_0) = X_n$$

es decir, la esperanza condicional de X_{n+p} dada la información de que disponemos hasta el tiempo n es igual a la variable X_n. No sólo la esperanza es constante como se vió arriba, sino que además las sucesivas esperanzas condicionales son también invariantes.

En nuestro caso la condición para ser martingala es aún más sencilla de verificar ya que basta comprobar que dados $n, p \geq 0$ tales que $n+p \leq M$ se cumple

$$E(X_{n+p}|X_n) = X_n\,.$$

Esto de debe a que el valor de X_{n+p} depende de X_n vía el tramo de árbol que incluye a $X_n, X_{n+1}, ...X_{n+p}$ y la forma en cómo se llega a los diversos valores de X_n, (es decir, lo sucedido antes del tiempo n) ya no influye en lo que sigue, como es fácil verificarlo al observar nuestros árboles. Esta es la propiedad de "pérdida de memoria" característica de lo que ahora se conoce como Cadena de Markov.

Veamos por ejemplo que

$$E(X_3|X_2) = X_2\,.$$

En efecto, recordemos que X_2 toma los valores $\{56, 32, 8\}$. Sobre el conjunto donde X_2 es igual a 56 se tiene,

$$E(X_3|X_2 = 56) = \frac{1}{2}64 + \frac{1}{2}48 = 56 = X_2\,,$$

en el conjunto donde X_2 es igual a 32,

$$E(X_3|X_2 = 32) = \frac{1}{2}48 + \frac{1}{2}16 = 32 = X_2$$

y finalmente en el conjunto donde X_2 es igual a 8, se tiene

$$E(X_3|X_2 = 8) = \frac{1}{2}16 + \frac{1}{2}0 = 8 = X_2\,.$$

Analogamente veamos que

$$E(X_4|X_2) = X_2$$

Para ello debemos observar el árbol entre X_2 y X_4 y ver que en dos etapas las cosas evolucionan así: Sobre el conjunto donde X_2 es igual a 56

$$E(X_4|X_2 = 56) = \frac{1}{2}64 + \frac{1}{4}64 + \frac{1}{4}32 = 32 + 16 + 8 = 56 = X_2\,,$$

ya que la probabilidad de que X_4 sea igual a 64 dado que $X_2 = 56$ es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ y la probabilidad de que X_4 sea igual a 32 dado que $X_2 = 56$ es $\frac{1}{4}$.

De manera similar se ve que en el conjunto donde X_2 es igual a 32,

$$E(X_4|X_2 = 32) = \frac{1}{4}64 + \frac{1}{4}32 + \frac{1}{4}32 + \frac{1}{4}0 = 32 = X_2$$

y finalmente en el conjunto donde X_2 es igual a 8

$$E(X_4|X_2 = 8) = \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}32 + \frac{1}{2}0 = 8 = X_2\,.$$

De manera totalmente análoga se puede hacer para cualquier otro posible caso

$$E(X_4|X_3) = X_3, E(X_3|X_1) = X_1, E(X_5|X_2) = X_2, ...$$

Hemos visto que el método que encontró Pascal para resolver el tercer problema de los puntos contiene con toda precisión el primer modelo de martingala de que se tenga noticia. Pero esto no es todo, también contiene el concepto de **tiempo de paro** y más aún, como lo veremos en la última sección, nos proporciona un método elemental para valuar opciones.

El "tiempo de paro" aparece como el número de etapas necesarias para concluir el juego y en términos modernos se define así

$$T := \text{mín}\{n \in \{0, 1, .., 5\} : X_n = 64\}$$

T es una nueva variable aleatoria que toma los valores $3, 4$ o 5, y

$$P(T = 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{32}$$

$$P(T = 4) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{32}$$

finalmente

$$P(T = 5) = \frac{6}{32} + \frac{6}{32} = \frac{12}{32}$$

como se observa facilmente en la figura 1.

Opciones, mercados financieros y martingalas.

¿Qué es una opción? Es un contrato que se establece para garantizar el precio de un bien a un monto preestablecido al inicio del contrato. Da a quien lo compra el derecho (más no la obligación) de tener acceso a dicho bien al precio preestablecido. Claramente un contrato de esta naturaleza tiene un costo para el comprador. A su vez el vendedor de la opción usará este capital para compensar las alzas y bajas del mercado y asi poder, al término del contrato, garantizar la operación. ¿Cual debe ser un precio justo para un contrato de esta naturaleza? Es este un problema fundamental en los círculos financieros y se le conoce como "valuación de opciones".

En el año de 1997 el matemático Scholes y el economista Merton obtuvieron el premio Nobel de economía por sus métodos para valuar opciones y muy especialmente por la famosa fórmula de Black-Scholes. Sus métodos han sido usados en todo el mundo financiero y de hecho ya se hace todo esto mediante programas de computadora muy conocidos.

Para comprender las ideas que permiten hacer estos cálculos, veremos un ejemplo elemental (con hipótesis sumanente simplificadas) en el que utilizaremos la martingala de Pascal para dar un método elemental de valuación de esta opción. Hay una serie de reglas y condiciones adicionales para el correcto manejo de las opciones y su valuación (estrategias admisibles, ausencia de oportunidad de arbitraje, mercados financieros viables, mercados completos, etc). En este trabajo no se darán las definiciones de estos conceptos, pero son basicamente la formulación matemática de las reglas razonables que debe tener un mercado "justo" y todo ello está tomado en cuenta implicitamente en la construcción que se dará. El lector interesado en estas definiciones puede consultar [4, 6, 7].

Como veremos, la posibilidad de valuar una opción depende de la existencia de una cierta martingala (mercado completo) que permita ir en el número de etapas fijadas, del costo de la opción (valor inicial) al valor que permita cubrir el contrato al término del mismo en el valor pactado.

Ejemplo:

(Se puede también consultar [2], fuente de inspiración de varias ideas de este trabajo.)

Vivimos en el país de los pesos y en otro país se usan los escudos. El señor A desea contar con 4000 escudos dentro de tres días. Digamos que hoy es lunes y necesita los escudos para el jueves. El lunes la paridad es 1 a 1.

Podemos suponer además que cada día el escudo puede subir o bajar (con igual probabilidad) en un cierto porcentaje (que se supondrá igual cada día, hipótesis que puede variarse de un modelo a otro). Por último, la tasa de interés en el mercado será nula. Esto se hace para simplificar el modelo y resaltar las ideas subyacentes. Con modificaciones elementales al modelo se pueden incluir: tasa de interés, tasa de ganancia, costo de transacciones, variaciones no constantes día a día en el tipo de cambio etc.

El señor B ofrece una opción al señor A en los siguientes términos: mediante el pago de una cantidad de x pesos, B se compromete a venderle a A los 4000 escudos a la paridad actual.

Saber cual es el valor de x es lo mismo que valuar la opción. Es claro que si el jueves el escudo está más barato que el peso, A no ejercerá su opción y simplemente comprará los escudos que necesita en el mercado libre.

Sea $p \in (0,1)$ la proporción en que puede subir o bajar el escudo respecto al peso día con día. Construimos el árbol correspondiente para poder analizar todas las posibilidades.

El primer dia la paridad puede ser $((1+p):1)$ o $((1-p):1)$ según si subió o bajo el escudo respecto al peso. Al día siguiente habrá tres posibilidades, en función de lo que suceda el segundo día:

$$(1+p)^2 : 1, \quad (1+p)(1-p) : 1, \quad (1-p)^2 : 1$$

Y de igual manera se construyen las paridades posibles para el tercer día.

¿En que casos A va ejercer la opción? Siempre que el escudo esté más caro que el peso. Esto depende del valor de p.

Se observa que en el caso (aaa) si le conviene ejercerla (para todo valor de p). Veamos que pasa con los casos de dos alzas y una baja (aab, aba y baa). La pregunta es: ¿cuando se cumple que $(1+p)^2(1-p) > 1$? Es inmediato ver que esto sucede siempre que $p \in (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$. Si hay dos bajas y un alza, no le conviene ejercerla ya que $(1-p)^2(1+p) < 1$ para todo valor de $p \in (0,1)$.

En las figuras 3 y 4 aparecen los árboles correspondientes, el primero para $p \in (0,1)$ y el otro para el caso particular en que $p = \frac{1}{2}$.

Analicemos en detalle el caso particular de $p = \frac{1}{2}$ (el método será igual para cualquier otro valor de p):

si la paridad es $(27/8 : 1)$ el vendedor necesitará

$$X_3 = 4000 \times \frac{27}{8} = 13500$$

pesos para cubrir el monto de los 4000 escudos.

Analogamente, si la paridad es $(9/8 : 1)$, el vendedor necesitará

$$X_3 = 9/8 \times 4000 = 4500$$

pesos.

En los otros casos no necesitará nada porque A no ejercerá la opción.

Es decir el monto que B requiere al final del contrato es una variable aleatoria X_3 que toma el valor 13500 con probabilidad $\frac{1}{8}$, el valor 4500 con probabilidad $\frac{3}{8}$, y el valor 0 con probabilidad $\frac{4}{8}$.

Como A le va a pagar 4000 pesos (valor pactado al inicio del contrato) B necesitará 9500 pesos en el primer caso, 500 pesos en el segundo caso y 0 en el tercero.

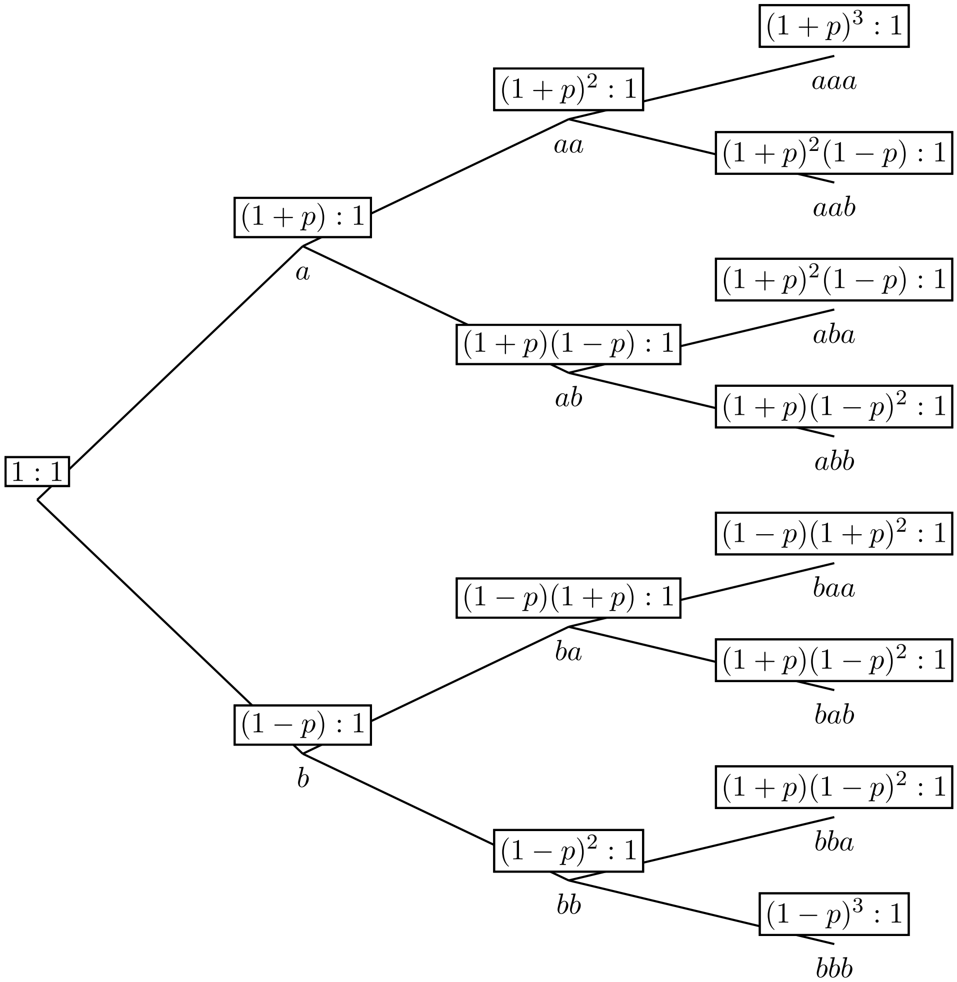


Figura 3: **Árbol de paridades para** $p \in (0, 1)$**.**

Se obtiene el árbol completo al aplicar el método de reversión de tiempo o recursión inversa de Pascal a partir de los valores finales obtenidos y asignando en cada nodo el promedio de los dos valores posteriores, exactamente del mismo modo en que lo hizo Pascal en 1654. En las figura 5 se puede ver la gráfica resultante.

Esto nos permite afirmar que el valor de la opción debe ser en este caso de 1375 pesos.

Veamos por último cual es la estrategia que aplica el vendedor de la opción para poder cubrir su compromiso: El lunes tiene 1375 pesos o equivalentemente 1375 escudos, puede pedir prestado, pero sin rebasar su capital (estrategia admisible [7]). Pide entonces 1125 pesos prestados, con lo cual tiene 2500 pesos o escudos. El martes tendrá 3750 pesos o

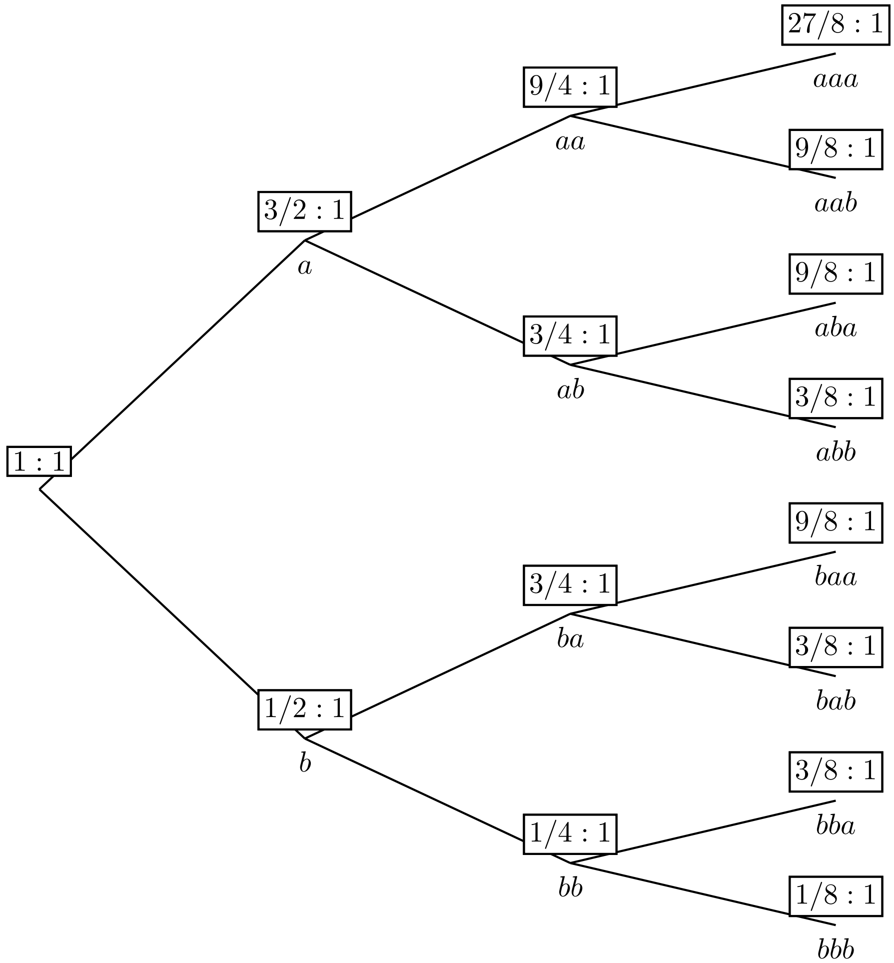


Figura 4: **Árbol de paridades para $p = 1/2$.**

1250 pesos según si el escudo subió o bajó respecto al peso. Paga su deuda de 1125 pesos y le quedan 2625 o 125 pesos respectivamente. Estudiemos el primer caso:

Pide 2125 pesos prestados y compra escudos con los 4750 pesos para así tener

$$\frac{2}{3} \times 4750$$

escudos que pueden subir o bajar respecto al peso.

Si sube tiene

$$\frac{9}{4} \times \frac{2}{3} \times 4750$$

pesos, es decir, 7125 pesos; paga la deuda y le quedan 5000 pesos.

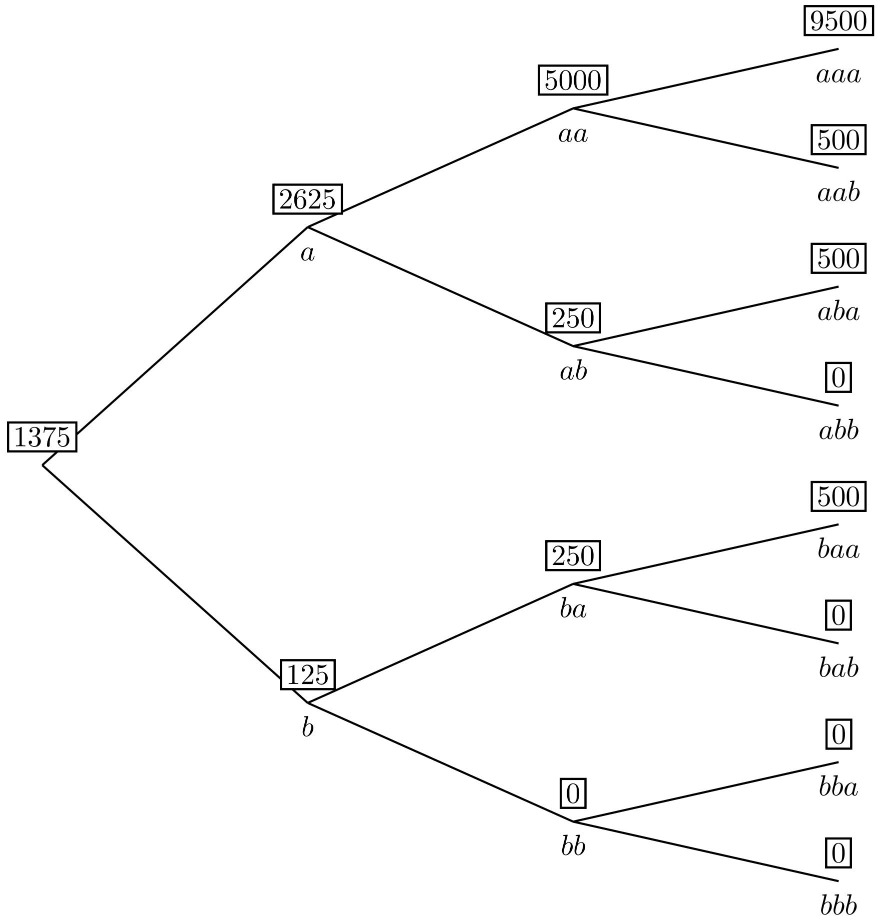


Figura 5: **Árbol de valuación.**

Si baja tiene

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 4750$$

pesos, que son 2375 pesos, paga su adeudo y le quedan 250 pesos.

Al día siguiente, si tiene 5000 pesos pide prestados 4000 pesos, los cambia a escudos y tiene

$$\frac{4}{9} \times 9000$$

escudos, que al día siguiente serán

$$\frac{27}{8} \times \frac{4}{9} \times 9000 = 13500$$

pesos. Paga su deuda de 4000 y le quedan exactamente los 9500 pesos que requiere para cubrir su compromiso.

Si tiene 250 pesos, pide prestados otros 250 pesos para tener 500 pesos, que son

$$\frac{4}{9} \times 500$$

escudos y que al día siguiente serán

$$\frac{27}{8} \times \frac{4}{9} \times 500 = 750$$

pesos. Paga su deuda de 250 y le quedan exactamente los 500 pesos que requiere.

Es análogo en los casos restantes. Es claro que en todo lo anterior se trabaja bajo la hipótesis adicional de que no hay costo en las transacciones.

Para concluir, sólo se mencionará el hecho que el contar con una martingala cuyo valor inicial sea el precio de la opción y cuyo valor final permita al vendedor cubrir su compromiso, no es algo que siempre se pueda hacer. Un nuestro modelo, precisamente gracias a las ideas de Pascal, se construye primero la martingala y luego esta se usa para obtener el valor de la opción.

En la teoría general, la existencia y unicidad de una cierta martingala son la clave para poder valuar las opciones, pero lo notable es que la fórmula para valuar el precio de una opción (Fórmula de Black-Scholes) es la misma que se ha usado en nuestro modelo. La fórmula de Black-Scholes dice que el precio de una opción con tiempo de maduración t y precio pactado K es:

$$C(t, K) = E(e^{-rt}(S_t - K)^+)$$

(recuerde que $(S_t - K)^+$ significa la parte positiva de la variable en cuestión.) En nuestro caso $S_t = X_3$ y r (que es la tasa de interés) es cero. El cálculo de $C(3, K) = C(3, 4000)$ podría haberse hecho con la fórmula de Black-Scholes en vez de usar, como lo hicimos arriba, la martingala de Pascal.

$$C(3, 4000) = E((X_3 - K)^+) = \frac{1}{8}(9500 + 500 + 500 + 500) = 1375\,.$$

En lo hecho por Black y Scholes, la evolución en el precio de la acción (del escudo) se esta modelando con un proceso llamado "Movimiento Browniano geométrico" y es muy distinto a lo que hicimos aquí, porque ellos trabajan con un modelo contínuo (el tiempo varía de manera contínua) y basándose en ciertas consideraciones propias de la evolución de los precios llegan al browniano geométrico como un modelo matemático adecuado y que describe las fuctuaciones del mercado. Subyacente a esta construcción también está la martingala asociada, pero no se explica en este texto por ser tema que requiere teoría más avanzada [4, 6, 7].

Es importante resaltar que no es el único modelo posible, por el contrario, hay otros procesos que pueden tomar el lugar del browniano geométrico para describir la evolución en los precios, un ejemplo es nuestro modelo discreto.

De manera general, en modelos con tiempo contínuo, se están usando recientemente los procesos de Lévy, mismos que permiten formular propiedades del proceso de evolución de los precios más apegadas a la realidad o bien que destacan ciertas propiedades del proceso que no se obtienen con los modelos del browniano geométrico.

Por último señalaremos que la primera persona en describir la evolución de los precios de los diferentes instrumentos financieros fue Louis Bachelier (1870-1946) en el año de 1900 y su estudio es el primer modelo del movimiento browniano, aún anterior al dado en 1905 por Einstein.

Bachelier trabajaba en la bolsa de valores de Francia, con sede en París y gracias a sus múltiples observaciones en las oscilaciones de los precios obtiene este primer modelo, que es su tesis doctoral y se publica en los Annales de l´Ecole Normal. Posteriormente continúa con sus investigaciones, pero todo este trabajo pionero fue practicamente ignorado por los académicos de la época. Sin embargo, a partir de los años 60 sus aportaciones han sido ampliamente aceptadas y reconocidas. Hay actualmente una importante sociedad cientifica, “Bachelier Finance Society” que estudia las relaciones entre las matemáticas y las finanzas y cuyo crecimiento ha sido espectacular.

En cambio la vinculación que hemos visto entre el trabajo fundador de la probabilidad de Pascal y estos problemas en finanzas no es muy conocida. Desgraciadamente, Pascal abandona sus trabajos matemáticos poco después de la correspondencia con Fermat (aunque los retoma esporadicamente) debido a su dedicación al estudio filosófico de las ideas religiosas de la época, motivado por las nuevas corrientes que había dentro de la iglesia católica y muy en particular por su adhesión al grupo de los jansenistas. Estos fueron seguidores de la ideas del monje Jansenius muy contrarias a las ideas y prácticas de los jesuitas de la época y fueron duramente reprimidas en esos años por el absolutismo de Luis XVI, en estrecha alianza con los jesuitas, quienes, desde luego, eran totalmente contrarios a cualquier cambio, dicrepancia o crítica que debilitara su autoridad en el ámbito de la religión. Se puede consultar la novela [8] o las obras completas del propio Pascal (en especial "Las cartas provinciales") para ahondar en el tema.

Al observar cuan modernas fueron las ideas fundadoras de Pascal, quedamos aun más asombrados del enorme talento de este matemático, por su capacidad de prefigurar tantas y tan variadas ideas en la teoría de la probablidad, tanto clásica como moderna.

Apéndice

Probabilidad y esperanza condicionales.

Para el marco general de referencia vea [1]. Se recordará de los cursos básicos que la probabilidad condicional de un evento C dado otro evento D se calcula así:

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$$

Ahora veamos como se calcula la esperanza condicional de una variable aleatoria discreta X dado un evento D:

$$E(X|D) = \sum_{x \in S} xP(\{X = x\}|D) = \sum_{x \in S} x \cdot \frac{P(\{X = x\} \cap D)}{P(D)}$$

lo cual es natural ya que la probabilidad condicional es una nueva probabilidad y lo que se está haciendo es calcular le esperanza de X con respecto a esta nueva probabilidad. En la expresión anterior S es la imagen de X y se supone que es un subconjunto a lo más numerable de los números reales.

Por último recordemos cómo se calcula la esperanza condicional de una variable aleatoria discreta X con respecto a otra Y. Primero que nada, es importante señalar que esta esperanza condicional ya no será un número sino una nueva variable aleatoria que se define así

$$E(X|Y) = \sum_{x \in S} xP(\{X = x\}|Y)$$

donde

$$P(\{X = x\}|Y) = \sum_{y \in S} P(\{X = x\}|\{Y = y\})\mathbf{1}_{\{Y=y\}}.$$

Como se observa $P(\{X = x\}|Y)$ es una variable aleatoria, que toma el valor $P(\{X = x\}|\{Y = y\})$ sobre el conjunto $\{Y = y\}$.

Para estudiar este tema con mayor detalle se recomienda el libro [9] o cualquier otro texto de probabilidad básica.

Agradecimientos La autora agradece al profesor Carlos Velarde por la asesoría en la elaboración de los esquemas que aparecen en este trabajo. Asimismo agradece el apoyo técnico de Leonardo Espinosa en relación a los acomodos finales del trabajo asi como la adecuación del mismo al formato de la Miscelanea Matemática.

Referencias

[1] M.E. Caballero, *Aportaciones de Fermat a la teoría de la probabilidad*, Miscelánea Matemática, Soc. Mat. Mexicana **34** (2001).

[2] Y. Derriennic, *Pascal et les problemes du Chevalier de Méré*, Gazette des Mathématiciens, **97** (2003) SMF.

[3] J.L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, N. Y. (1953).

[4] N. El Karoui, Notas para el curso de finanzas, *Prepublicación Instituto de Matemáticas*, UNAM. (1999).

[5] F.N. Davis. Games, Gods and Gambling. Charles Grifin and Co. Londres (1962).

[6] J. Garcia Morell, *Valuación de opciones*, Tesis de Licienciatura. Carrera de actuaría. Facultad de Ciencias (2001).

[7] D. Lamberton, B. Lepeyre, Introduction au calcul stochastique appliqué a la finance, *Ed. Ellipses*, (1997).

[8] Montherland, Port-Royal, *Livre de poche*, (1961).

[9] S. Ross, A first course in probability, *Prentice Hall*, (1998).

[10] J. Ville, Etude critique de la notion de collectif, Gauthier-Villars, Paris (1939).