MISCELANEA MATEMÁTICA 24 (1996) 1–14 SMM

El problema mecánico de Abel

Una aplicación sencilla del Teorema de Convolución

Gonzalo Aguilar Q.

Departamento de Física y Matemáticas,
Universidad de las Américas Puebla

Resumen

Este trabajo presenta la solución de un problema derivado de la Mecánica Clásica llamado *propiedad tautócrona de la cicloide*, descubierto por el holandés Cristian Huygens y publicado en su *Tratado sobre la Teoría de Relojes de Péndulo* en 1673. La forma de resolverlo abandona un poco los métodos geométricos y mecánicos utilizados a fines del siglo XVII en favor de los analíticos y su solución se obtiene a partir de algunos resultados y propiedades elementales de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias e Integrales. La solución que aquí se expone, formó parte de los primeros trabajos de investigación que publicó Niels Henrik Abel en 1823.

1 Introducción

El principal objetivo de este trabajo es coadyuvar a la difusión y divulgación de problemas científicos, cuya creación ha significado un avance en el conocimiento matemático y un antecedente al desarrollo de nuevas teorías. La solución del Problema Mecánico de Abel, se logra como una aplicación del teorema de convolución y la integral de Abel estudiados en un primer curso de Ecuaciones Diferenciales e Integrales, esto sugiere dedicarlo a estudiantes de matemáticas, en particular para alumnos de física o ingeniería. Esta aplicación es señalada como la primera que abrió el camino al formidable desarrollo de las ecuaciones integrales. El trabajo se inicia con el enunciado del Problema Mecánico de Abel seguido de una breve nota histórica; se dan definiciones y se demuestran algunas propiedades elementales de ecuaciones diferenciales; se resuelve el problema enunciado y finalmente, se dan algunos elementos de solución a un planteamiento más general llamado el Problema de la Braquistócrona a fin de comparar los métodos de solución en ambos problemas.

2 Enunciado del problema

Considere un hilo en forma de curva suave y una partícula de masa m que parte del reposo considerado en el punto (x, y) y se desliza sobre el hilo hacia el origen, sin fricción y bajo la acción de su propio peso Figura 1.

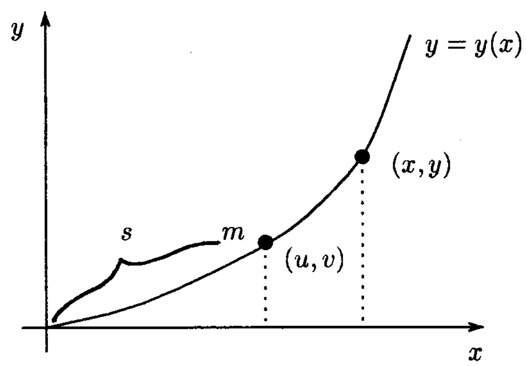


Figura 1:

En este planteamiento hay dos problemas:

Problema 1: Si la forma del hilo está dada por $y = y(x)$, calcular el tiempo total de descenso de la partícula.

Problema 2: Si el tiempo total de descenso se conoce, determinar la forma del hilo.

El problema 2, se conoce como el *Problema mecánico de Abel.*

3 Nota histórica

En 1673 el físico y matemático Cristian Huygens, publicó en su Tratado Sobre la *Teoría de Relojes de Péndulo*, el siguiente descubrimiento: "El tiempo que tarda una partícula de masa m en deslizarse sobre un arco de cicloide entre dos puntos distintos, es independiente del punto en que inicie su movimiento". Este descubrimiento se le conoce como la propiedad tautócrona de la cicloide o problema tautócrono. Los estudios de Huygens acerca de la construcción y propiedades de las curvas cicloide, tractriz, logarítmica, etc., pronto fueron conocidos por los matemáticos de fines del siglo XVII, propiciando que algunos resultados se profundizaran o generalizaran, tal es el caso que Johann Bernoulli planteó en 1696 un problema más general que la propiedad tautócrona, conocido como el problema de la Braquistócrona que esencialmente dice: "*Entre todas las curvas suaves en un plano vertical que unen dos puntos distintos A y B, construir aquella, a lo largo de la cual una partícula de masa m que se desliza sin fricción y bajo la acción de la gravedad, tarda el menor tiempo*".

Huygens, Leibniz, Newton, Johann y Jacob Bernoulli entre otros, resolvieron de distinta forma el problema de la braquistócrona y en particular, el problema tautócrono, utilizando ingeniosos métodos heurísticos, mecánicos y geométricos. Esas soluciones generaron discusiones, polémicas, controversias y hasta desafíos entre éllos, propiciando notable influencia en el desarrollo de los métodos infinitesimales. El trabajo de estos científicos, particularmente los de Johann Bernoulli, son señalados como el antecedente de una de las más importantes ramas de las matemáticas: el Cálculo Variacional.

Pasaron más de cien años y el problema tautócrono volvió a ser noticia científica, su solución lograda por Niels Henrik Abel como una aplicación de ecuaciones diferenciales e integrales formó parte de sus primeros trabajos de investigación que publicó en 1823. Dicha solución es señalada como la primera aplicación que abrió la puerta al formidable desarrollo de las Ecuaciones Integrales.

4 Solución al problema 1

Por el principio de conservación de la energía mecánica que dice

$$\text{energía potencial} + \text{energía cinética} = \text{constante}$$

se tiene que:

$$mgy + 0 = mgv + \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

donde mgy es la energía pontencial en (x,y), mgv y $\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ son las energías potencial y cinética en (u,v) de la partícula de masa m y s la longitud del hilo medida desde cero.

Despejando el cociente de la ecuación anterior:

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2g(y-v)}\,.$$

Como la función de arco s decrece cuando t aumenta, $\frac{ds}{dt} < 0$, se escoge el signo negativo para tener $\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y-v)}$ o bien $dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}$, que integrando desde $v=y$ hasta $v=0$, se tiene:

$$\begin{aligned} T(y) &= -\int_{v=y}^{v=0} dt \\ &= \int_{v=0}^{v=y} \frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y \frac{s'(v)dv}{\sqrt{y-v}} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^y \frac{s'(v)dv}{\sqrt{y-v}}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Como $y = y(x)$ se conoce, entonces $s = s(y) = \int_0^y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$ y de aquí:

$$f(y) = s'(y) = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \tag{2}$$

que sustituyendo en (1) resulta:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y \frac{f(v)dv}{\sqrt{y-v}}\,. \tag{3}$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación integral de Abel y permite calcular el tiempo total de descenso, siempre que se conozca la curva.

Para resolver el problema 2), se necesitan algunas definiciones, teoremas y propiedades elementales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

5 Resultados elementales de ecuaciones diferenciales

Definición 1 Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$, entonces la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt$$

se llama *transformada de Laplace de f*, siempre que el límite exista.

Definición 2 Si dos funciones reales f y g son continuas a trozos para $t \geq 0$, entonces su convolución denotada por $f * g$, está definida mediante la integral

$$f * g := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,.$$

Teorema 1 (Teorema de Convolución) *Sean $f(t)$ y $g(t)$ continuas a trozos para $t \geq 0$ y con transformada de Laplace, entonces*

$$L\{f * g\} = L\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = L\left\{f(t)\right\} L\left\{g(t)\right\}\,.$$

Demostración: Sean

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$$

y

$$G(s) = L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-s\alpha} f(\alpha)d\alpha\,,$$

fórmese el producto:

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\alpha} f(\alpha)d\alpha\right) \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\tau+\alpha)s} f(\tau)g(\alpha)d\tau d\alpha \\
&= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-(\tau+\alpha)} g(\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \text{Con } \tau \text{ fijo, sea } t = \tau + \alpha,\ dt = d\alpha \\
= & \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau) dt \\
& \text{cambiando el orden de integración} \\
= & \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\
= & \int_0^t e^{-st} \left\{ \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right\} dt \\
= & L\{f * g\}.
\end{aligned}
$$

De este teorema, se obtiene una forma útil para calcular transformadas inversas:

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau\,.$$

■

Definición 3

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

se llama *función gamma.*

Propiedad 1

$$L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\,.$$

Demostración: Por definición de transformada de Laplace

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt\,.$$

Tomando $u = st$ se sigue que:

$$
\begin{aligned}
L\{t^n\} &= \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^n}{s^n} \frac{du}{s} \\
&= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^n du \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\,.
\end{aligned}
$$

■

Propiedad 2

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Demostración: Por definición

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

y

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt\,.$$

Tomando $u = t^{\frac{1}{2}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2\int_0^\infty e^{-u^2} du\,.\end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \left(2\int_0^\infty e^{-u^2} du\right)\left(2\int_0^\infty e^{-v^2} dv\right) \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} dudv\,.\end{aligned}$$

Ahora, haciendo $u = r\cos\theta$ y $v = r\operatorname{sen}\theta$, se sigue que:

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2} rdrd\theta \\ &= \pi\end{aligned}$$

De donde $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ■

Una consecuencia inmediata de la propiedades 1 y 2 es la

Propiedad 3

$$L\left[t^{-\frac{1}{2}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Demostración:

$$L\left[t^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{s^{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,.$$

Estos resultados son suficientes para resolver el problema 2, página 2. ■

6 Solución al problema mecánico de Abel

Si $T(y)$ es fijo, entonces $y(x)$ es la función a despejar en la ecuación (3)

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{f(v)dv}{\sqrt{y-v}}.$$

Note que esta ecuación es la convolución de las funciones $f(y)$ y $g(y) = y^{-\frac{1}{2}}$, que al aplicarle transformada de Laplace, el teorema de convolución y la propiedad 3, se tiene:

$$\begin{aligned} L[T(y)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} L\left[y^{-\frac{1}{2}}\right] L\left[f(y)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{\pi}{s}} L\left[f(y)\right]. \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} L[f(y)] &= \sqrt{2g} \frac{L[T(y)]}{\sqrt{\frac{\pi}{s}}} \\ &= \sqrt{\frac{2g}{\pi}} s^{\frac{1}{2}} L[T(y)]. \end{aligned} \qquad (4)$$

Esta ecuación se resolverá para el caso más sencillo, cuando $T(y)$ es una constante T_0. Esto implica que el tiempo de descenso es independiente del punto de partida. Bajo esta hipótesis, la ecuación (4) se trasforma en

$$\begin{aligned} L[f(y)] &= \sqrt{\frac{2g}{\pi}} s^{\frac{1}{2}} \frac{T_0}{S} \\ &= c^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \end{aligned}$$

donde $c = \frac{2gT_0^2}{\pi^2}$.

Dado que $L^{-1}\left[\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right] = y^{-\frac{1}{2}}$, se sigue que

$$f(y) = c^{\frac{1}{2}} L^{-1}\left[\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right] = c^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{c}{y}}. \qquad (5)$$

Igualando las ecuaciones (2) y (5), se tiene:

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{c}{y} \qquad (6)$$

como ecuación diferencial de la curva. Despejando x de (6), se tiene que:

$$x = \int \sqrt{\frac{c-y}{y}}\, dy\,.$$

Tomando

$$y = c\,\mathrm{sen}^2\phi = \frac{c}{2}\,[1-\cos 2\phi]\,, \tag{7}$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} x &= 2c\int \cos^2\phi d\phi \\ &= c\int (1+\cos^2\phi)d\phi \\ &= \frac{c}{2}\,(2\phi + \mathrm{sen}\,2\phi) + k\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Como la curva debe pasar por $(0,0)$, $k=0$.

Haciendo $r = \frac{c}{2}$ y $\theta = 2\phi$, (7) y (8) se transforman en

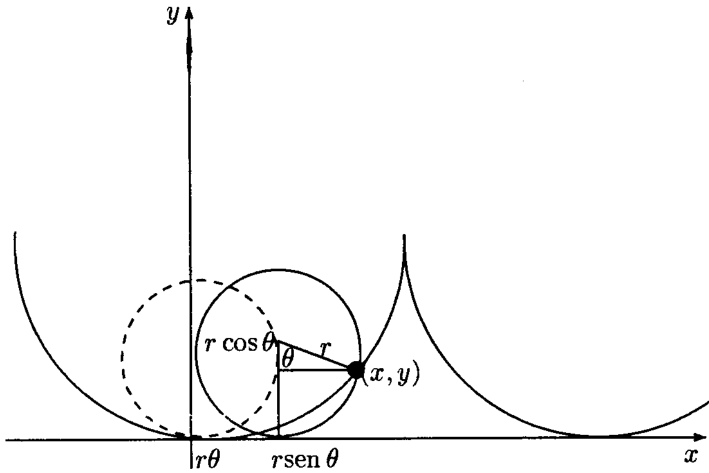
$$\begin{aligned} x &= r(\theta + \mathrm{sen}\,\theta) \\ y &= r(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

que son las ecuaciones paramétricas de una cicloide, es decir, la forma del hilo que sigue la partícula al desplazarse sobre él cuando se conoce el tiempo es un arco de cicloide. Fig. 2.

Como $2r = c = \frac{2gT_0^2}{\pi^2}$, el diámetro de la circunferencia que genera la cicloide está determinado por el tiempo constante de descenso.

Se recuerda que una cicloide es la curva generada por un punto P de una circunferencia de radio r, que rueda sin resbalar a lo largo de una recta situada en un plano.

A esta solución llegaron por diferentes caminos Huygens, Leibniz, Newton, Johann y Jacob Bernoulli entre otros, utilizando ingeniosos métodos mecánicos y geométricos. La solución de Johann Bernoulli es la más elegante y en opinión de George F. Simmons, constituye una obra de arte intelectual del más alto nivel y quizás esta sea la razón por la que aparece con más frecuencia en los textos de Ecuaciones Diferenciales.



$$x = r(\theta + \operatorname{sen}\theta)$$
$$y = r(\theta - \cos\theta)$$

Figura 2:

7 Un poco sobre la braquistócrona y su solución

En 1696, Johann Bernoulli hizo un planteamiento más general que el Problema Mecánico de Abel, conocido como el *problema de la Braquistócrona*, que esencialmente dice: "*De entre todas las curvas suaves en un plano vertical que unen dos puntos distintos A y B, no en la misma vertical, construir aquella curva a lo largo de la cual una partícula de masa m que se desliza sin fricción y bajo la acción de la gravedad, tarda el menor tiempo*".

A contiuación se presentan los elementos básicos de la ingeniosa solución que el propio Johann Bernoulli construyó, utilizando geometría, el principio de Fermat del tiempo minímo, la ley de refracción de Snell, Cálculo, etc.

El principio de Fermat asegura que un rayo de luz que va de un punto a otro, sigue la trayectoria para la cual el tiempo de viaje es mínimo.

La ley de Snell establece que si θ_1 y θ_2 son los ángulos de incidencia y refracción respectivamente de un rayo de luz que pasa de un medio a otro con velocidades correspondientes de v_1 y v_2, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}.$$

Suponga que un rayo de luz viaja de un punto A hasta otro punto P con velocidad v_1, y después entra a un medio más denso para ir desde P hasta un tercer punto B con velocidad menor v_2.

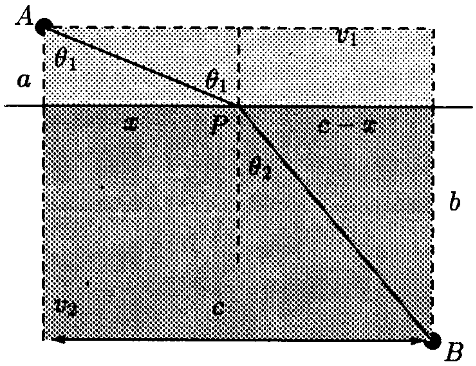


Figura 3:

De acuerdo con la fórmula

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

y la notación de la figura, los tiempos requeridos para que el rayo de luz viaje de A a P y de P a B, son respectivamente

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}.$$

Por tanto, el tiempo de viaje total será

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}.$$

Dado que el rayo de luz es capaz de seleccionar, entre todos los caminos posibles que unen A con B y que pasan por P, aquel que minimice el tiempo T (principio de Fermat), se debe tener que $\frac{dT}{dt} = 0$, de donde

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

y por la geometría de la Fig. 3, se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}.$$

Esto es lo que asegura la ley de Snell.

Ahora considere que un rayo de luz cruza un medio óptico estratificado, ver Fig. 4, con velocidad constante en cada capa, pero decreciendo al pasar de una capa a otra inferior y refractándose hacia la vertical. Aplicando la ley de Snell a la frontera entre capa y capa, se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_3}{v_3} = \frac{\operatorname{sen}\theta_4}{v_4}.$$

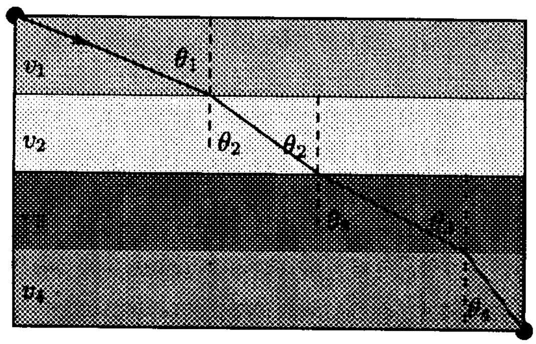


Figura 4:

Si se permite que las capas se hagan más delgadas y numerosas, en el límite la velocidad de la luz decrece de modo continuo conforme el rayo desciende, esto trata de ilustrar la Fig. 5, y se concluye que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{v} = \text{constante}.$$

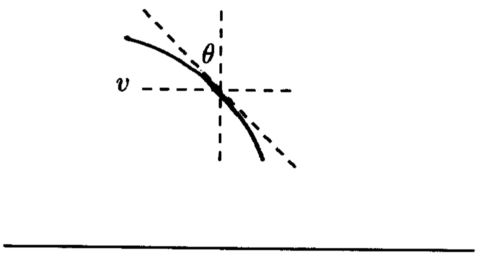


Figura 5:

Ahora considere un sistema coordenado como en la Fig. 6, y suponga que la masa del cuerpo (como el rayo de luz) selecciona el camino de descenso más rápido entre A y B. El razonamiento anterior nos dá

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{v} = \text{constante}. \tag{9}$$

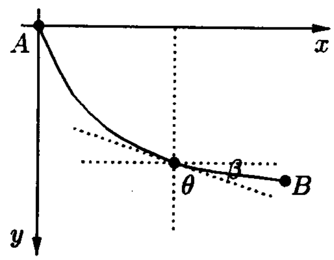


Figura 6:

Por el principio de conservación de la energía ya enunciado, la velocidad alcanzada por el cuerpo hasta cierto nivel, sólo está determinada por su pérdida de energía potencial para llegar a ese nivel y no por el camino seguido, es decir, $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$ y de aquí

$$v = \sqrt{2gy} \tag{10}$$

Por la geometría del problema, se tiene que:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}. \tag{11}$$

Sustituyendo (11) y (10) en (9), tenemos:

$$k = \frac{1}{v\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}$$

y de aquí

$$1 + (y')^2 = \frac{c}{y}$$

Esta última expresión tiene la misma forma que la ecuación (6) que se obtuvo en el proceso de solución del Problema Mecánico de Abel, y se demuestra de manera análoga, que su solución también es una cicloide.

Referencias

[1] De Icaza Herrera, Miguel. *Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem.* Revista Mexicana de Física **40**, No. 3, 1994.

[2] Pastor, J. Rey y Babini, José. *Historia de la Matemática.* **2**. Gedisa. Barcelona, España, 1985.

[3] Simmons, George S. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas Históricas.* 2da. ed. McGraw-Hill. México, 1993.

[4] Spiegel, Murray R. *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México, 1983.

[5] Struck, Dirk Jan. *Historia Concisa de las Matemáticas.* Serie Maestros del Pensamiento Científico. I. P.N. México, 1986.

[6] Yosida, Kosaku. *Lectures on Differential and Integral Equations.* Dover. New York, 1991.