¿Cómo un topólogo clasifica las letras del alfabeto?

Rafael López
Departamento de Geometría y Topología,
Instituto de Matemáticas (IEMath-GR),
Universidad de Granada, 18071 Granada, España
rcamino@ugr.es

Las letras del alfabeto cuando son escritas en una hoja de papel pueden ser vistas como subconjuntos del plano euclídeo. Imaginemos que cada letra está hecha de un material elástico de forma que podamos girarla, moverla, deformarla, estirarla o contraerla pero nunca cortarla o doblarla sobre sí misma. La cuestión que proponemos es si es posible deformar una letra en otra usando algunas de las operaciones descritas anteriormente, y que llamaremos *transformaciones admisibles*. Por el contrario, si no podemos hacerlo, la pregunta se convierte ahora en cómo encontrar un método para decidir que no existe tal deformación. En matemáticas, este tipo de problemas entra dentro del campo de la topología y en este artículo exploramos el problema tal como un topólogo se enfrenta a él. Un topólogo estudia aquellas propiedades de los objetos que permanecen inalterables bajo transformaciones admisibles. En nuestro contexto del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, si $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ son dos subconjuntos, decimos que X es *homeomorfo* a Y, y escribimos $X \cong Y$, si existe una aplicación biunívoca $\phi : X \to Y$ que es bi-continua, es decir, que tanto ϕ como su inversa ϕ^{-1} son continuas. Una aplicación de este tipo se llama *homeomorfismo* y para un topólogo, X e Y son idénticos. Por ejemplo, las letras C, I y L son idénticas tal como se muestra en la figura 1 donde aparecen algunas deformaciones desde la letra C hasta la L pasando por la letra I. También para un topólogo, el tamaño no importa porque podemos estirar una letra tanto como queramos que, topológicamente, sigue siendo la misma.

Este problema de clasificación de las letras del alfabeto aparece como un ejercicio propuesto por Gustave Choquet en [1, p. 21], donde afirma «to convey the intuitive content of homeomorphness». También

Este trabajado ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación MTM2014-52368-P del MINECO/FEDER.

Figura 1. Las transformaciones de estiramiento y contracción entre las letras C, I y L que muestran que todas son homeomorfas.

la Wikipedia toma este problema como «an introductory exercise» [6]. De hecho, en la figura que muestra Choquet en [1], las letras C I J L M N S U V W Z son todas homeomorfas entre sí. El lector tiene claro que las letras A y E no son homeomorfas puesto que para pasar de A a E tendríamos que romper/separar en el punto donde se junta el segmento horizontal de A con los que bajan, y romper no es una transformación admisible. La clasificación topológica de las letras no está discutida completamente en [1] y necesitamos para ello el concepto de invariante topológico para afirmar que, efectivamente, A y E no son homeomorfas. En este trabajo vamos a hacer dicha clasificación usando la menor maquinaria topológica necesaria sin aportar demostraciones rigurosas pero mostrando al lector qué ideas están detrás de dichas técnicas.

Hagamos tres observaciones:

1. Las letras escritas en un papel tienen cierta anchura, pequeña, pero tienen. Sin embargo, en este trabajo vamos a suponer que las letras son objetos de dimensión 1, así que estamos considerando que las letras no tienen anchura.
2. Cada persona tiene su propia forma de escribir las letras, su particular alfabeto y con su estilo propio. En tipografía existen una gran cantidad de fuentes cada una con un estilo especial y específico. Para ponernos de acuerdo con el lector, vamos a tomar aquí la fuente Sans Serif de TeX, que se obtiene con el comando `\sf`. Además, sólo clasificaremos las letras mayúsculas, tal como aparecen en la figura 2.
3. Incluso suponiendo que estamos tomando esta fuente, cuando imprimimos en papel las letras del alfabeto, puede haber pequeñas variaciones dependiendo de la impresora que utilicemos. En la situación que estamos considerando aquí, advertimos al lector que esto puede ocurrir con dos letras, a saber, las letras G y K.

Por otro lado, a lo largo de este artículo escribiremos una letra con la fuente Sans Serif cuando la estamos considerando como subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, pero si la letra denota un símbolo matemático, entonces la escribimos en la fuente Roman. Así, por ejemplo, X indicará la letra del alfabeto pero X denota un símbolo matemático.

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z

Figura 2. Las letras del alfabeto escritas en mayúsculas y en la fuente Sans Serif de TEX.

La herramienta que vamos a usar para probar que dos espacios no son homeomorfos es la de invariante topológico. Un *invariante topológico* es una propiedad tal que si un espacio topológico la satisface, entonces todos los que son homeomorfos a él también satisfacen dicha propiedad. Para distinguir dos letras del alfabeto, usaremos algunos de estos invariantes topológicos de forma que una letra satisface alguno de ellos pero no la otra y, en el caso concreto de las letras del alfabeto, la idea general es la siguiente. Supongamos que $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ son dos letras como subconjuntos del plano euclídeo. Tomamos un punto $p \in X$ y lo quitamos de X, esto es, consideramos el conjunto $X - \{p\} \subset \mathbb{R}^2$. Es posible que al quitar el punto p del conjunto X se rompa en diferentes piezas (del mismo modo que cuando un espejo se cae al suelo y se rompe). Denotamos por $O(p)$ el número de piezas de $X - \{p\}$. Si $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $\phi(q) \in Y$ tiene la misma propiedad, es decir, $O(\phi(q)) = O(p)$. Además, si para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ escribimos por $N(n, X)$ el número de puntos de X tales que $O(p) = n$, entonces $N(n, X) = N(n, Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nuestro razonamiento consistirá en los siguientes pasos: (i) definir de una manera simple qué queremos decir con una pieza de un espacio; (ii) dar un método para contar el número de piezas de un conjunto; (iii) calcular $N(n, X)$ para cada una de las letras del alfabeto y (iv) usar los cálculos de (iii) para conseguir la clasificación final de las letras.

1. Arcoconexión en el espacio euclídeo

Necesitamos ahora alguna terminología procedente de la topología (aquí remitimos al lector a cualquier texto básico de topología general, por ejemplo, [2]). Escribimos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y consideramos el producto cartesiano $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \overset{m}{\cdots} \times \mathbb{R}$ para $m \in \mathbb{N}$. Definimos ahora la *topología euclídea* de $\mathbb{R}^m$. Si $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ son dos puntos de $\mathbb{R}^m$, la *distancia euclídea* entre x e y es

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}.$$

Si $x \in \mathbb{R}^m$ y $r > 0$, la *m-bola centrada* en x y de radio r es el conjunto $B(x; r) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, x) < r\}$. Así, una 1-bola es simplemente un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y una 2-bola es un disco de $\mathbb{R}^2$ sin su borde. Un subconjunto $O \subset \mathbb{R}^m$ se llama *abierto* de la topología euclídea si para cada $x \in O$ existe una m-bola centrada en x y contenida en O. Si consideramos todos los puntos $x \in O$ y si $r_x > 0$ es el correspondiente radio para cada x tal que $B(x; r_x) \subset O$, entonces $\cup_{x\in O} B(x; r_x) \subset O$. De aquí deducimos que $O = \cup_{x\in O} B(x; r_x)$ y esto prueba que un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ es una unión de m-bolas. Formalmente, la *topología euclídea* de $\mathbb{R}^m$ se define como la colección de todos los conjuntos abiertos así formados. Esta topología se traslada a un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ diciendo que un conjunto $A \subset X$ es *abierto en* X si es la intersección de un abierto O de $\mathbb{R}^m$ con X, esto es, $A = X \cap O$. La topología euclídea es la que refleja nuestra idea de cercanía entre los puntos del espacio $\mathbb{R}^m$ que procede de la distancia definida anteriormente. De esta manera el concepto topológico de continuidad es el que tenemos interiorizado de nuestra experiencia cotidiana.

La primera noción topológica que necesitamos para la clasificación de las letras del alfabeto es la arcoconexión. Un *camino* o arco (del inglés *path*) en $\mathbb{R}^m$ es una aplicación continua $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^m$. Si $p = \alpha(0)$ y $q = \alpha(1)$, decimos que p y q son los puntos iniciales y finales de α y que α une p con q. Intuitivamente, un camino puede ser visto como una trayectoria continua de un punto: realmente la trayectoria, como subconjunto de $\mathbb{R}^m$, no es más que la imagen de α, es decir, $\{\alpha(t) : t \in [0,1]\}$. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ se llama *arcoconexo* si para cualesquiera puntos de X, existe un camino *en* X que los une. La propiedad 'ser arcoconexo' es topológica de forma que si un conjunto es arcoconexo, otro homeomorfo a él también lo es ya que si $\alpha : [0,1] \to X$ es un camino y $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo, entones $\phi \circ \alpha$ es una aplicación continua y así es un camino en Y. Es fácil ver que la unión de una colección de conjuntos arcoconexos $\{X_i : i \in I\}$ que tienen una intersección no trivial también es arcoconexo pues si $p_0 \in \cap_{i\in I} X_i$, entonces dos puntos de $\cup_{i\in I} X_i$ se pueden unir por caminos pasando por el punto p_0. Algunos ejemplos sencillos de conjuntos arcoconexos son el propio espacio $\mathbb{R}^m$, un intervalo de $\mathbb{R}$, una recta de $\mathbb{R}^m$, una circunferencia o una esfera.

Si $X \subset \mathbb{R}^m$ y $p \in X$, llamamos la *componente arcoconexa* de p, y denotamos por C_p al conjunto arcoconexo más grande de X conteniendo a p. O dicho de otro modo, C_p es el conjunto de todos los puntos que se pueden unir con p mediante caminos de X, estableciendo así una partición del conjunto X. Cada componente arcoconexa es entonces una pieza de X y el número de componentes arcoconexas es un invariante topológico, es decir, si $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo entre dos conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^m$, el número de componentes de X coincide con el de Y. Observemos que X es arcoconexo si sólo hay una única componente, a saber, $C_p = X$ para todo $p \in X$. El concepto de componente es el que asociamos con la idea de 'pieza' desde el punto de vista topológico, que

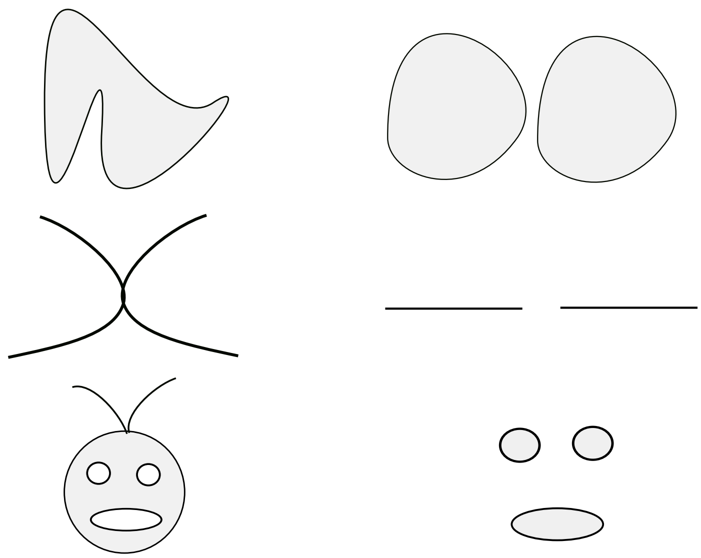

Figura 3. En la columna de la izquierda, tres conjuntos arcoconexos del plano; en la columna de la derecha, tres conjuntos que no son arcoconexos.

es el que estamos considerando en nuestra clasificación puesto que si nos atenemos sólo a la teoría de conjuntos, la recta $\mathbb{R}$ puede escribirse de varias maneras: $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup [1, \infty)$ y no tendríamos claro si tiene una, dos o tres piezas.

En topología, la noción de arcoconexión está relacionada con otra idea menos intuitiva que es la conexión. Un espacio X se dice que es *conexo* si no se puede expresar como la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos. Y de manera parecida, si $p \in X$, la *componente conexa* es el mayor conjunto conexo $A_p \subset X$ que contiene a p. Aquí tenemos que ser prudentes y precisos con el lenguaje. La palabra *conexo* en la lengua castellana significa en su segunda acepción del Diccionario de la Real Academia: «Dicho de una cosa: que está enlazada o relacionada con otra» y procede del latín «connectere» que significa *unir* [4]. En topología, la conexión no es equivalente a la arcoconexión. Todo conjunto arcoconexo es conexo y la componente arcoconexa C_p de p está incluida en la componente conexa A_p, pero puede ocurrir que un espacio conexo no sea arcoconexo. Para mostrar un ejemplo, tenemos que recurrir a conjuntos raros y probablemente el más famoso que el lector puede encontrar en cualquier texto de topología es la curva seno del topólogo, en inglés, «topologist's sine curve» (véase [7, p. 198]). Este conjunto se define como $X = G \cup \{(0, 0)\}$, donde $G = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}$. Intuitivamente X no es arcoconexo ya que el punto $(0, 0)$ no se puede unir por un camino *en* X con cualquier punto de G: esto es consecuencia de que la función $f(x) = \sin(1/x)$ no se puede extender de manera continua a $x = 0$. Sin embargo, y sorprendentemente, X es un conjunto conexo. La razón es que G es conexo (de hecho, es arcoconexo, ya que es homeomorfo a $(0, \infty)$ sin más que proyectar verticalmente sobre el eje de abscisas) y el punto $(0, 0)$ está 'pegado' a G, lo cual no hace perder la propiedad de conexión. En terminología topológica, $(0, 0)$ es un punto adherente a G y si a un conjunto conexo le añadimos puntos adherentes, sigue siendo conexo. Omitimos aquí los detalles ya que se alejan del interés de nuestro problema inicial, pero en el contexto de la clasificación de las letras del alfabeto de la figura 2, las componentes conexas y arcoconexas coinciden, y esto permite evitar trabajar con el concepto de conexión (de nuevo remitimos a [2] para una prueba formal). Es por eso que a partir de ahora, simplemente llamaremos componente, en vez de componente arcoconexa.

Una vez que hemos definido lo que es una componente, necesitamos una técnica, simple si es posible, para calcular el número de componentes arcoconexas de un espacio dado. Una primera idea que uno puede pensar es que si $X = A \cup B$, con $A \cap B = \emptyset$ y tanto A como B son arcoconexos, entonces A y B son las componentes de X. Esto no es cierto en general. Así, $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, \infty)$ es una partición por conjuntos arcoconexos pero no son las componentes de $\mathbb{R}$ porque $\mathbb{R}$ ya es arcoconexo y sólo hay una componente. Este ejemplo muestra que si tenemos una partición del tipo anterior, debemos de imponer más condiciones que aseguren que, efectivamente, son las componentes. El resultado que necesitamos es el siguiente:

El método. *Si tenemos una partición de $X \subset \mathbb{R}^m$ por conjuntos arcoconexos y abiertos de X, entonces dicha partición es la formada por las componentes de X.*

El ingrediente novedoso que aparece ahora es que los subconjuntos de la partición tienen que ser *abiertos en X*. La idea de la demostración de este resultado es la siguiente. Por simplicidad, suponemos que la partición está formada por sólo dos conjuntos, es decir, $X = A \cup B$. Sea $p \in A$. Ya que A es arcoconexo, entonces $A \subset C_p$ porque C_p es el conjunto arcoconexo más grande que contiene a p. Tenemos que probar que en verdad $A = C_p$. Por contradicción, supongamos que $A \subsetneq C_p$ y sea $q \in C_p \cap B$. Como C_p es arcoconexo, consideramos un camino $\alpha : [0, 1] \to C_p \subset X$ uniendo p con q, es decir, $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Entonces $\alpha([0, 1]) = (C_p \cap A) \cup (C_p \cap B)$ y se sigue tomando imagen inversa mediante α que

$$[0, 1] = \left(\alpha^{-1}(C_p \cap A)\right) \cup \left(\alpha^{-1}(C_p \cap B)\right).$$

Puesto que α es continua, y $C_p \cap A$ y $C_p \cap B$ son abiertos en C_p, entonces hemos expresado el intervalo $[0, 1]$ como una unión disjunta de abiertos en $[0,1]$ y ninguno de los dos conjuntos es vacío: $0 \in \alpha^{-1}(C_p \cap A)$ pues $\alpha(0) = p$ y $1 \in \alpha^{-1}(C_p \cap B)$ puesto que $\alpha(1) = q$: esto es imposible porque un intervalo de la recta euclídea $\mathbb{R}$ es conexo. El hecho de $[0,1]$ sea conexo es evidente, pero su demostración está lejos de ser trivial y esconde tras de sí profundas propiedades de la recta de números reales, y depende directamente del axioma del supremo.

Cuando anteriormente escribíamos $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, \infty)$, el intervalo $(-\infty, 0]$ no es un abierto de $\mathbb{R}$: si lo fuera, debería existir una 1-bola centrada en $x = 0$, es decir, un intervalo del tipo $(-r, r)$ y tendría que estar incluido en $(-\infty, 0]$, lo cual no es posible.

Mostramos un ejemplo de cómo se aplica nuestro método y que será igualmente extensible a las letras del alfabeto. Consideramos el conjunto formado por la unión de los ejes coordenados de $\mathbb{R}^2$ al que le hemos quitado el origen $(0,0)$:

$$X = \big((\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \big) - \{(0,0)\}.$$

Ver figura 4. Es fácil pensar que X tiene 4 componentes, concretamente los cuatros semiejes. Nuestro método se aplica como sigue. En primer lugar tenemos que cada uno de los semiejes es un conjunto arcoconexo ya que es homeomorfo a un intervalo: por ejemplo, el semieje $A_1 = (0, \infty) \times \{0\}$ es homeomorfo al intervalo $(0, \infty)$. El siguiente paso es probar que cada semieje es un abierto en X. Hacemos el argumento de nuevo para A_1. El conjunto $O = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ porque es el producto cartesiano de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$: señalemos que no todos los abiertos de $\mathbb{R}^2$ son el producto cartesiano de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, pero sí es cierto el recíproco (una 2-bola es un abierto pero no es producto de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$). Entonces $A_1 = X \cap O$ probando que A_1 es un abierto en X. Notemos que el conjunto A_1 puede escribirse de muchas maneras como la intersección de un abierto de $\mathbb{R}^2$ con X, tal como aparece en la figura 4, donde el conjunto O que aparece, el área sombreada, no es un producto de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. También hay que observar que A_1 no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ puesto que ninguna 2-bola centrada en un punto de A_1, es decir, un disco, está incluida en A_1.

Ya que tenemos el método de calcular el número de componentes, necesitamos la siguiente

Definición 1.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ y $p \in X$. Decimos que p es un punto de intersección de orden $n \in \mathbb{N}$, y lo denotamos por $O(p)$, si el conjunto $X - \{p\}$ tiene exactamente n componentes.

De nuevo, el orden de intersección es un invariante topológico en el sentido que si $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $O(p) = O(\phi(p))$ para todo $p \in X$. Vamos a calcular órdenes de intersección en algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

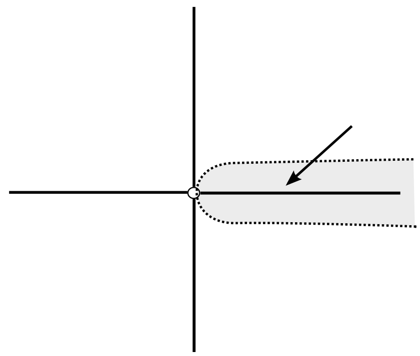

Figura 4. El conjunto X formado por la unión de los ejes de coordenadas de $\mathbb{R}^2$ excepto el origen $(0,0)$ tiene exactamente 4 componentes, a saber, cada uno de los semiejes. Observemos que $A_1 = (0,\infty)\times\{0\}$ es un conjunto abierto en X.

1. En la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ todos los puntos tienen orden 1 porque la circunferencia $\mathbb{S}^1$ menos un punto es homeomorfo a un intervalo, que es arcoconexo: si $p\in\mathbb{S}^1$, y lo quitamos de $\mathbb{S}^1$, basta abrir $\mathbb{S}^1-\{p\}$ y extenderlo hasta obtener un intervalo abierto. Justamente el haber quitado p, nos permite realizar estas transformaciones admisibles. Sin embargo, esto no lo podemos hacer con la circunferencia $\mathbb{S}^1$ porque tendríamos primero que romper por algún punto y romper no es una operación que entra dentro de las transformaciones admisibles.
2. Todos los puntos de una recta de $\mathbb{R}^2$ tienen orden 2. Así, si la recta es el eje de abscisas $X=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$ y $p=(a,0)\in X$, entonces
$$X-\{p\} = \{(x,0) : -\infty < x < a\}\cup\{(x,0) : a<x<\infty\}.$$
Cada uno de los conjuntos $A=\{(x,0) : -\infty<x<a\}$ y $B=\{(x,0) : a<x<\infty\}$ son homeomorfos a un intervalo, a saber, $(-\infty,a)$ y (a,∞), respectivamente, y por tanto, A y B son arcoconexos. Además, es claro que $A = X\cap((-\infty,a)\times\mathbb{R})$ y $B=X\cap((a,\infty)\times\mathbb{R})$, siendo $(-\infty,a)\times\mathbb{R}$ y $(a,\infty)\times\mathbb{R}$ conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$, probando que A y B son conjuntos abiertos en X.
3. Para el conjunto formado por la unión de los ejes de coordenadas $X=(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})$, tenemos
$$O(p)=\begin{cases} 4 & \text{si } p=(0,0)\\ 2 & \text{si } p\neq(0,0).\end{cases}$$
El caso $p=(0,0)$ has sido tratado anteriormente. Supongamos ahora que $p\neq(0,0)$. Si suponemos que $p=(a,0)$ con $a>0$, entonces $X-\{p\}=C_1\cup C_2$, donde $C_1=\{(x,0) : a<x<\infty\}$ y $C_2 = X-(\{p\}\cup C_1)$. El conjunto C_1 es arcoconexo porque

es homeomorfo al intervalo (a, ∞). El conjunto C_2 también lo es porque es la unión de dos conjuntos arcoconexos con intersección no trivial, a saber, el eje de ordenadas (una recta) y $\{(x, 0) : -\infty < x < a\}$ (homeomorfo a $(-\infty, a)$). Finalmente, C_1 y C_2 son abiertos en $X - \{p\}$ porque

$$C_1 = (X - \{p\}) \cap ((a, \infty) \times \mathbb{R}),$$
$$C_2 = (X - \{p\}) \cap ((-\infty, a) \times \mathbb{R}),$$

donde $(a, \infty) \times \mathbb{R}$ y $(-\infty, a) \times \mathbb{R}$ son dos abiertos de $\mathbb{R}^2$.

2. Clasificando las letras del alfabeto: primeros pasos

Volvamos a las letras del alfabeto de la figura 2. La manera de afrontar el trabajo de probar que dos conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ son homeomorfos o que no lo son es completamente diferente en cada caso. Si creemos que la respuesta es 'sí', debemos encontrar de forma explícita el homeomorfismo entre ambos conjuntos. Siguiendo esta idea, mediante transformaciones admisibles fue como se probó en la figura 1 que C, I y L son homeomorfas. Aunque parece obvio, en principio, que tal homeomorfismo existe, ciertamente no es sencillo proporcionar explícitamente una expresión analítica de dicho homeomorfismo: tenemos que definir cada letra como un subconjunto concreto de $\mathbb{R}^2$, que permita el uso de coordenadas cartesianas y así utilizar todas nuestras herramientas del cálculo. Hacemos una demostración para las letras C, I y L. Primero trabajamos con el par C e I. Aquí, al escribir en coordenadas, vamos a suponer que C es una semicircunferencia y que I es un segmento vertical del eje de ordenadas:

$$\mathsf{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \le 0\}, \quad \mathsf{I} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 1\}.$$

Entonces la proyección

$$\pi : \mathsf{C} \to \mathsf{I}, \quad \pi(x, y) = (0, y)$$

es un homeomorfismo, siendo su inverso $\pi^{-1}(0, y) = (-\sqrt{1 - y^2}, y)$. Probamos ahora que I es homeomorfo a L. Supongamos que L es el conjunto

$$\mathsf{L} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\} = L^+ \cup L^-.$$

Escribimos $\mathsf{I} = I^+ \cup I^-$, donde $I^+ = L^+$ e $I^- = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 0\}$. La idea es dejar I^+ fijo, obteniendo L^+ y llevar I^- en L^- mediante una rotación de 90 grados. El homeomorfismo es

$$\phi : \mathsf{I} \to \mathsf{L}, \quad \phi(0, y) = \begin{cases} (0, y) & \text{si } (0, y) \in I^+. \\ (-y, 0) & \text{si } (0, y) \in I^- \end{cases}$$

Esta aplicación ϕ está definida a trozos y claramente es biunívoca. La continuidad también está clara excepto acaso, en el punto $(0,0) \in I^+ \cap I^-$ donde el valor de ϕ es $(0,0)$. Para este punto, tenemos

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \phi(0,y) = \begin{cases} \lim_{(0,y)\to(0,0)}(0,y) = (0,0) & \text{if } (0,y) \in I^+. \\ \lim_{(0,y)\to(0,0)}(-y,0) = (0,0) & \text{if } (0,y) \in I^-, \end{cases}$$

probando la continuidad de ϕ en $(0,0)$. La aplicación inversa de ϕ es

$$\phi^{-1} : \mathsf{L} \to \mathsf{I}, \quad \phi^{-1}(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in L^+. \\ (y,-x) & \text{si } (x,y) \in L^- \end{cases}$$

Observemos que el homeomorfismo anterior entre las letras I y L deforma de diferente manera cada una de las partes de la letra I, en este caso, I^+ permanece fija, pero I^- es girada.

Observación 2.1. Entre las letras I y L se podría argumentar de forma diferente si representamos la letra L como otro subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, y siguiendo los dibujos que aparecen en la deformación de la figura 1, podemos considerar que L es el conjunto

$$\mathsf{L} = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Topológicamente, es la misma letra L que antes, solamente que ha sido girada y estirada, pero esto no afecta a nuestra clasificación. Entonces la proyección $\psi : \mathsf{L} \to \mathsf{I}$ dada por $\psi(x,y) = (0,y)$ es un homeomorfismo entre ambas letras.

De forma parecida, uno puede hacer este tipo de deformaciones para parte de las otras letras del alfabeto. Así y trabajando con las transformaciones admisibles, encontramos inmediatamente los seis grupos de letras que se muestran en la figura 5, donde todas las letras de cada uno de ellos son homeomorfas entre sí.

A R
C G I J L M N S U V W Z
D O
E F T Y
H K
Ñ

Figura 5. Un primer paso en la clasificación topológica de las letras del alfabeto usando homeomorfismos entre pares de letras.

La figura 5 no descarta que letras de diferentes grupos puedan ser homeomorfas. En este paso de la discusión no podemos distinguir topológicamente, por ejemplo, entre la letra C y la letra E: aunque nuestra intuición puede darnos la impresión de que no es posible transformar C en E mediante las transformaciones admisibles, esto sólo indica que nosotros no podemos hacerlo explícitamente, pero no prueba que C y E no sean homeomorfas.

Efectivamente, si sospechamos que dos letras X e Y no son homeomorfas, entonces el esfuerzo lleva ahora otra dirección y necesitamos encontrar un invariante topológico que satisfaga X pero no Y. Nuestra estrategia ya fue anunciada y usaremos los conceptos de arcoconexión y orden de intersección. En primer lugar usamos la arcoconexión. Es claro que todas las letras de las figura 2 son arcoconexas excepto la letra $\tilde{\mathsf{N}}$, es decir, todas ellas se pueden construir uniendo dos a dos segmentos o arcos de circunferencias. Cada vez que juntemos dos de ellos, el conjunto resultante es arcoconexo al ser la unión de dos conjuntos arcoconexos con intersección no trivial. Así para la letra N podemos empezar con el segmento vertical de la izquierda al que le pegamos el segmento inclinado, resultando un conjunto arcoconexo. Una vez pegados, podemos unir este trozo con el segmento vertical de la derecha (arcoconexo), siendo la figura resultante, a saber, la letra N, arcoconexo. Para la letra $\tilde{\mathsf{N}}$ mostramos que tiene dos componentes, a saber, los símbolos N y $\sim$. Cada uno de estos trozos son arcoconexos (homeomorfos al intervalo $[0,1]$) y ambos son conjuntos abiertos en $\tilde{\mathsf{N}}$ tal como aparece en la figura 6. Por tanto, la letra $\tilde{\mathsf{N}}$ no es arcoconexa y para un topólogo, no es igual a ninguna del resto de las letras del alfabeto.

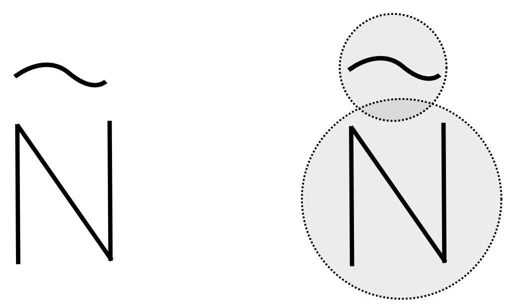

Figura 6. La letra Ñ tiene dos componentes. En particular, Ñ no es homeomorfa a ninguna de las letras que aparecen la figura 2 porque todas ellas son arcoconexas.

3. Clasificando las letras del alfabeto: últimos pasos y clasificación final

Volvamos a las letras de la figura 2. Sabemos que si $X \cong Y$ mediante un homeomorfismo ϕ y si $p \in X$, entonces $O(p) = O(\phi(p))$, pero además, esto es cierto para todos los puntos de X. Es por ello que introducimos la siguiente notación. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural y denotamos

$$N(n, X) = \text{ card}\{p \in X : O(p) = n\}.$$

Por tanto, si X es homeomorfo a Y, entonces $N(n, X) = N(n, Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nuestro trabajo también consistirá en calcular $N(n, X)$ para cada letra X y para cada $n \in \mathbb{N}$, y para ello usaremos nuestro método descrito anteriormente. Va a ocurrir en general que para una letra X tendremos $N(n, X) = 0$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$, y también existirán algunos números naturales n donde $N(n, X) = \infty$. Sin embargo, y serán los casos interesantes y ¡decisivos!, habrá números $n \in \mathbb{N}$ tales que $0 < N(n, X) < \infty$.

Observación 3.1. Para aquellas letras que al escribirlas tengan trozos que acaben en segmentos, supondremos que el final de dicho segmento es un último punto de la letra, tal como ocurre cuando escribimos en el papel. En esta situación, tenemos que dicho punto siempre tiene orden 1. Esto ocurre, por ejemplo, con los dos puntos más bajos de la letra A, o con los puntos finales de la letra I.

Empezamos primero con la tarea de probar que dos letras en grupos diferentes de los que aparecen en la figura 5 no son homeomorfas. Ilustramos el método con las letras I e Y las cuales son representativas del razonamiento que aplicamos y un proceso similar se puede utilizar para otro par de letras. Con el mismo argumento que hicimos para una recta en la sección anterior, tenemos que $O(p) = 2$ para todo $p \in \mathsf{I}$ excepto los puntos finales que sabemos que tienen orden de intersección 1: ver figura 7. Aquí estamos usando de forma fuerte la hipótesis de que la letra es un objeto unidimensional, de forma que al quitar un punto, rompemos la letra I en dos subconjuntos disjuntos. Por el contrario, en la letra Y hay un punto $q \in \mathsf{Y}$, justamente el punto donde se juntan los tres segmentos que forman la letra Y, tal que $O(q) = 3$. En la figura 7, cada componente de $\mathsf{I} - \{p\}$ y de $\mathsf{Y} - \{q\}$ está cubierta por un abierto de $\mathbb{R}^2$ (O_1 y O_2 para I y Q_1, Q_2, Q_3 para Y).

También sucede that $N(1, \mathsf{I}) = 2$ y $N(1, \mathsf{Y}) = 3$, que coinciden con los puntos finales de los segmentos. Por tanto, nuestra cálculo se resume del siguiente modo:

$$N(n, \mathsf{I}) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ \infty & n = 2 \\ 0 & n \neq 1, 2 \end{cases}, \quad N(n, \mathsf{Y}) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ \infty & n = 2 \\ 1 & n = 3 \\ 0 & n \neq 1, 2, 3. \end{cases}$$

Esto prueba definitivamente que las letras I e Y no son homeomorfas.

Procedemos a calcular el orden de intersección de todos los puntos de las letras A, B, H, O, P, Q, X. Ya que la letra O es homeomorfa a la

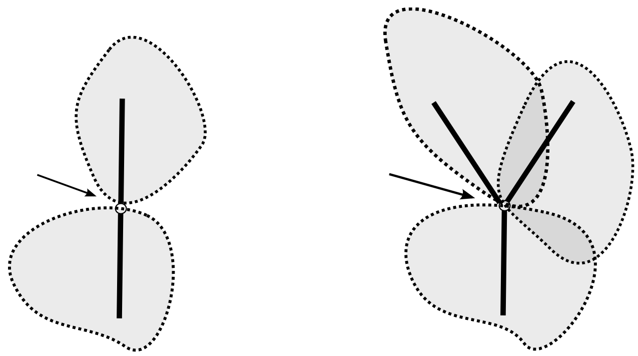

Figura 7. Todos los puntos de la letra I tienen orden 2 excepto los puntos finales. En la letra Y, el punto q tienen orden 3.

circunferencia $\mathbb{S}^1$, de la sección anterior obtenemos

$$N(n,\mathsf{O}) = \begin{cases} \infty & n=1 \\ 0 & n\neq 1. \end{cases}$$

Además, $N(n,\mathsf{B}) = N(n,\mathsf{O})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$N(n,\mathsf{A}) = N(n,\mathsf{P}) = \begin{cases} \infty & n=1,2 \\ 0 & n\neq 1,2 \end{cases}$$

$$N(n,\mathsf{H}) = \begin{cases} 4 & n=1 \\ \infty & n=2 \\ 2 & n=3 \\ 0 & n\neq 1,2,3 \end{cases}, \quad N(n,\mathsf{Q}) = \begin{cases} \infty & n=1,2 \\ 1 & n=3 \\ 0 & n\neq 1,2,3 \end{cases}$$

$$N(n,\mathsf{X}) = \begin{cases} 4 & n=1 \\ \infty & n=2 \\ 1 & n=4 \\ 0 & n\neq 1,2,4. \end{cases}$$

Después de estos cálculos, concluimos que en la figura 5, letras de diferentes grupos no son homeomorfas. Además, en la figura 8 mostramos cuatro nuevos grupos de letras tales que letras de diferentes grupos no son homeomorfas.

A P
B O
Q
X

Figura 8. Una letra en cada uno de los anteriores cuatro grupos no es homeomorfa a otra que pertenece a otro grupo.

Inspeccionando ahora estas letras, parece intuitivo que las letras B y O no son homeomorfas, aunque los órdenes de intersección coinciden.

Lo mismo ocurre entre las letras A y P. En ambos casos, debemos afinar más nuestros argumentos. Trabajamos primero con las letras B y O. Supongamos que existe un homeomorfismo $\phi : \mathsf{B} \to \mathsf{O}$. Si $p \in \mathsf{B}$, entonces $\mathsf{B} - \{p\} \cong \mathsf{O} - \{\phi(p)\}$, en particular, $N(n, \mathsf{B} - \{p\}) = N(n, \mathsf{O} - \{\phi(p)\})$. Tomamos como punto p en B el indicado en la figura 9. Sea $\phi(p)$ el correspondiente punto en la letra O. En esta letra, todos los puntos tienen órdenes iguales a 1. En $\mathsf{B} - \{p\}$ calculamos el orden de intersección del punto q que aparece en la figura, obteniendo $O(q) = 3$. ¡Cuidado! Estamos calculando el orden de q *en* $\mathsf{O} - \{\phi(p)\}$ porque si hubiera sido en B, sería entonces 1. Sin embargo en el conjunto $\mathsf{O} - \{\phi(p)\}$ todos los puntos tienen orden 2, llegando a una contradicción. En otras palabras, si quitamos los puntos $p, q \in \mathsf{B}$ que aparecen en la figura 8, entonces $\mathsf{B} - \{p, q\}$ sería homeomorfo a $\mathsf{O} - \{\phi(p), \phi(q)\}$, pero el primer conjunto tiene tres componentes conexas y el segundo sólo dos, probando que B y O no son homeomorfos.

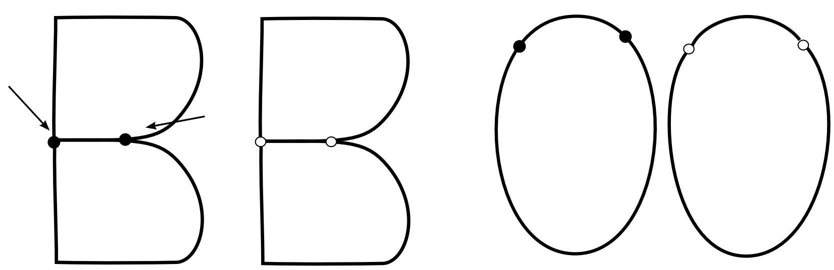

Figura 9. Si quitamos los puntos p y q de la letra B, obtenemos 3 componentes. Sin embargo para cualesquiera dos puntos que quitemos de la letra O, siempre existen 2 componentes.

Finalmente, veamos que las letras A y P no son homeomorfas entre sí. El argumento es similar al anterior pero con una pequeña diferencia. Supongamos que $\phi : \mathsf{A} \to \mathsf{P}$ es un homeomorfismo y sea $p \in \mathsf{A}$ el punto indicado en la figura 10. Sabemos que $O(p) = 2$. Miramos entonces en la letra P aquellos puntos con orden de intersección 2. Estos puntos pertenecen al segmento vertical debajo del punto $q \in \mathsf{P}$ que aparece en la figura 10, incluso posiblemente el propio punto q. Entonces $\mathsf{A} - \{p\} \cong \mathsf{P} - \{\phi(p)\}$. Si ahora quitamos el punto z en $\mathsf{A} - \{p\}$. Entonces quedan 4 componentes, esto es, $O(z) = 4$ *en* el conjunto $\mathsf{A} - \{p\}$. Sin embargo, si quitamos el punto $\phi(z)$, el número de las componentes que quedan es 2 o 3 dependiendo si $\phi(p) = q$ o $\phi(p) \neq q$, respectivamente. Esta contradicción prueba que A no es homeomorfa a P.

Resumiendo, tenemos

La clasificación. *La clasificación topológica de las letras mayúsculas del alfabeto escritas en la fuente Sans Serif de TEX es la siguiente:*

A R
B
C I J L M N S U V W Z
D O
E F G T Y
H K
Ñ
P
Q
X

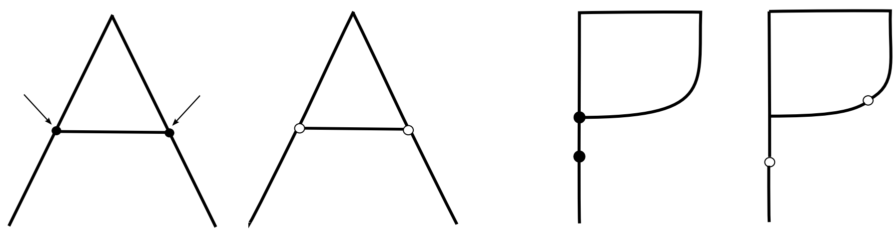

Figura 10. Si quitamos los puntos p y z de la letra A, tenemos 4 componentes. En la letra P, e independientemente si el punto $\phi(p)$ sea q, si quitamos otro punto, sólo hay 2 o 3 componentes.

4. Yendo más allá: otros conjuntos y dimensiones

Una vez que hemos clasificado las letras del alfabeto, uno está tentado a extender esta técnica en otros contextos. ¿Podemos usar el concepto de orden de intersección para clasificar topológicamente otros subconjuntos de $\mathbb{R}^2$? ¿Es posible generalizar el método a otras dimensiones, por ejemplos, a subconjuntos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$?

Dos ideas fundamentales que se encuentran detrás de nuestros argumentos han sido primero que una letra, como subconjunto del plano euclídeo, es un conjunto unidimensional y por otro lado, en nuestro método hemos ido quitando objetos de dimensión 0, es decir, puntos. El problema es algo más complicado si tomamos objetos de dimensión 2. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{R}^2$ el plano euclídeo e Y el plano menos el origen, $Y = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Ya anunciamos que ambos conjuntos no son homeomorfos, pero el método anterior de usar órdenes de intersección de puntos no permite distinguirlos porque para todo $p \in X$ y $q \in Y$, tenemos $O(p) = O(q) = 1$. Incluso si seguimos quitando más puntos, el conjunto que queda (en ambos) es arcoconexo: de hecho el conjunto complementario en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$) de un conjunto infinito numerable de puntos es arcoconexo. ¿Qué podemos hacer? Como X e Y son objetos de dimensión 2 podríamos quitar conjuntos de dimensión 1, tales como curvas y el caso más simple es quitar rectas. Un argumento posible sería el siguiente. Supongamos que $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo y tomamos una recta $L \subset X$, por ejemplo, $L = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$. Si quitamos de X el conjunto L, obtenemos 2 componentes (ahora es fácil gracias a nuestro método). Sabemos que el conjunto $\phi(L)$ es homeomorfo a una recta, pero ¿cuál es la forma de $\phi(L)$ dentro de Y? Uno podría imaginarse que $\phi(L)$ divide a Y en 2 componentes y esto ocurre si $\phi(L)$ fuera otra recta. Sin embargo $\phi(L)$ puede ser muy pequeño, por ejemplo, cualquier segmento del plano. Así $\{(x, 1) : 1 < x < 2\}$ es homeomorfo a L, pero ahora tenemos que $Y - \phi(L)$ tiene sólo 1 componente: ver figura 11.

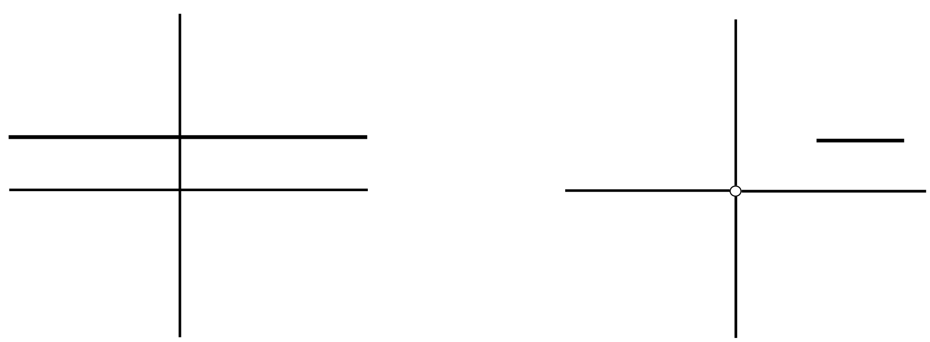

Figura 11. A la izquierda, la recta horizontal L separa $\mathbb{R}^2$ en dos componentes pero L es homeomorfo a $R = \{(x, 1) : 1 < x < 2\}$ el cual, al quitarlo de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, nos queda sólo 1 componente.

En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ podemos estudiar si una esfera $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa a la superficie $\mathbb{T}$ de una rosquilla, llamada matemáticamente, un *toro* (en terminología topológica, decimos que un toro es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$). En $\mathbb{S}^2$ existen curvas cerradas C sin autointersecciones (llamadas curvas simples) que cuando la quitamos de $\mathbb{S}^2$, quedan 2 componentes. Sin embargo en $\mathbb{T}$ existen curvas (como la curva C_1 de la figura 12) con la misma propiedad, pero también existen otras curvas, como un meridiano, cuyo conjunto complementario es arcoconexo. Incluso más, debemos señalar al lector que la expresión «el conjunto complementario de una curva cerrada y simple en una esfera tiene exactamente dos componentes» es cierta, ¡pero no obvia! Este es el famoso Teorema de curva de Jordan, un resultado profundo en topología y cuya demostración es muy difícil (véanse las aproximaciones más amigables que se hacen en [3, 5]). En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$, las propiedades topológicas que necesitamos para distinguir topológicamente dos objetos, tales como $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{T}$, usan conceptos más sofisticados que la arcoconexión, como son el grupo fundamental o los grupos de homología, pero este problema ya se encuentra fuera de los planes iniciales de este artículo.

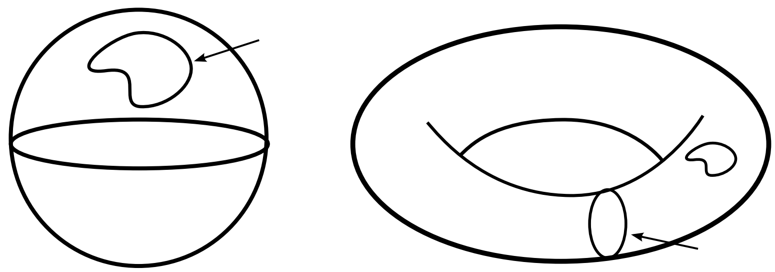

Figura 12. En la esfera $\mathbb{S}^2$, la curva C divide $\mathbb{S}^2$ en 2 componentes. En $\mathbb{T}$ existen curvas cerradas y simples, como C_1, que separa a $\mathbb{T}$ en 2 componentes, pero también otras curvas, como el meridiano C_2, que al eliminarlo de $\mathbb{T}$, queda un conjunto arcoconexo.

Bibliografía

[1] G. Choquet, *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

[2] J. R. Munkres, *Topology*, 2.ª ed., Prentice-Hall, 2000.

[3] R. N. Pederson, «The Jordan curve theorem for piecewise smooth curves», *Amer. Math. Monthly*, vol. 76, 1969, 605–610.

[4] Real Academia Española, «`http://www.rae.es`», Online; acceso el 17 de octubre de 2015.

[5] C. Thomassen, «The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces», *Amer. Math. Monthly*, vol. 99, 1992, 116–130.

[6] Topology, «Wikipedia, The Free Encyclopedia, `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Topology&oldid=614319857`», Online; acceso el 17 de octubre de 2015.

[7] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading MA, 1968.