La representación de rotaciones mediante cuaterniones

G. F. Torres del Castillo
Departamento de Física Matemática
Instituto de Ciencias
Universidad Autónoma de Puebla
México
gtorres@fismat1.fcfm.buap.mx

Resumen

Se presentan algunas nociones elementales acerca de los cuaterniones y se muestra su relación con las rotaciones en $\mathbb{R}^3$.

1 Introducción

Los cuaterniones fueron introducidos por W. R. Hamilton en 1843, después de que él y otros matemáticos como Wessel, Gauss, Argand, Mourey y Servois buscaron por muchos años un sistema numérico que describiera puntos del espacio tridimensional en forma similar a como los números complejos describen puntos del plano [1,2]. Los cuaterniones son números *hipercomplejos* de la forma $a + bi + cj + dk$, donde a, b, c, d son números reales y las tres unidades imaginarias i, j, k tienen cuadrado igual a -1:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{1}$$

y además

$$ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ki = j = -ik, \tag{2}$$

por lo que la multiplicación de cuaterniones no es conmutativa, pero es asociativa y distributiva sobre la suma. En el desarrollo de las matemáticas, los cuaterniones tuvieron una gran importancia, siendo el primer ejemplo de un campo no conmutativo y la base del álgebra vectorial que se emplea actualmente (en la que las unidades imaginarias i, j, k pasaron a ser los *vectores* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) [1]. Sin embargo, en los libros de texto modernos, escasamente se hace referencia a los cuaterniones y, menos aún, a su relación con las rotaciones en el espacio tridimensional. El propósito de este artículo es mostrar, en forma elemental, la manera en que los cuaterniones permiten representar convenientemente las rotaciones en el espacio tridimensional, suponiendo que el lector está familiarizado con las operaciones básicas del álgebra vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2 Reflexiones y rotaciones

Como se sabe, es conveniente identificar cada punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ con el vector que une el origen con dicho punto, de tal manera que podemos hablar indistintamente de puntos o de vectores. Además, si (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) son dos vectores cualesquiera y θ es el ángulo entre ellos, entonces

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\,\cos\theta. \tag{3}$$

(El lado izquierdo de esta ecuación es el producto escalar de los vectores (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3), mientras que, por ejemplo, $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ es la longitud del vector (a_1, a_2, a_3).) Por otra parte, se cumple que

$$\begin{aligned}(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_3) &= \\ &\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\,\operatorname{sen}\theta\,(c_1, c_2, c_3),\end{aligned} \tag{4}$$

donde (c_1, c_2, c_3) es un vector de norma igual a 1 ortogonal a (a_1, a_2, a_3) y a (b_1, b_2, b_3). El sentido del vector (c_1, c_2, c_3) coincide con el dado por la llamada *regla de la mano derecha.*

Agregaremos ahora algunas nociones básicas acerca de los cuaterniones. El conjugado del cuaternión $q = a + bi + cj + dk$, que denotaremos por q^*, se define por $q^* = a - bi - cj - dk$. A partir de las ecuaciones (1) y (2) se tiene entonces que $(qq')^* = q'^* q^*$, para cualquier par de cuaterniones q, q', y que qq^* es un número real no negativo. Denotaremos por $|q|$ la norma de q, la cual definimos por $|q| \equiv \sqrt{qq^*}$, luego

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \tag{5}$$

Notando que la multiplicación de cuaterniones por números reales es conmutativa, de lo anterior se deduce que $|qq'| = |q|\,|q'|$.

Un cuaternión r es un cuaternión puro si su parte real vale cero, lo cual equivale a que r sea de la forma $r = xi + yj + zk$. El cuaternión puro, $r = xi + yj + zk$, puede identificarse con el punto (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. Sean q y r dos cuaterniones puros

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k, \qquad r = xi + yj + zk, \tag{6}$$

de tal manera que q tenga norma igual a 1:

$$qq^* = 1 \tag{7}$$

o, equivalentemente,

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \tag{8}$$

Entonces, por un cálculo directo, usando las ecuaciones (1), (2) y (8) se obtiene

$$qrq^* = -r + 2(q_1 x + q_2 y + q_3 z)q, \tag{9}$$

lo cual, de acuerdo con la ecuaciones (3) y (5), equivale a que

$$qrq^* = -r + 2|q||r|\cos\theta\, q = -r + 2|r|\cos\theta\, q, \tag{10}$$

puesto que $|q| = 1$, donde θ es el ángulo entre los vectores (x, y, z) y (q_1, q_2, q_3). De las ecuaciones (9) y (10) puede notarse, en particular, que qrq^* es también un cuaternión puro que corresponde, por tanto, a algún punto de $\mathbb{R}^3$.

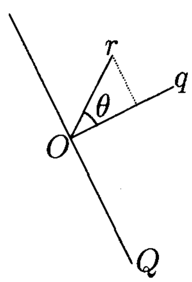

Figura 1. Los vectores (q_1, q_2, q_3) y (x, y, z) están en el plano de la figura y el plano Q es normal a éste.

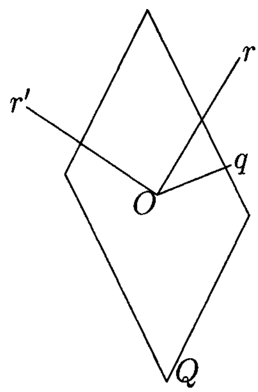

Figura 2. Representación geométrica de los cuaterniones q, r y r'.

Sea Q el plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y es normal a (q_1, q_2, q_3). De la Fig. 1 es fácil ver que $|r|\cos\theta$ es la proyección de (x, y, z) en la dirección (q_1, q_2, q_3), por lo que

$$r' \equiv -qrq^* = r - 2|r| \cos\theta \, q \tag{11}$$

representa la imagen de r bajo la reflexión en el plano Q (ver la Fig. 2). En resumen, identificando los cuaterniones puros con puntos de $\mathbb{R}^3$, la aplicación $r \mapsto -qrq^*$ representa la reflexión en el plano normal a q que pasa por el origen, si $|q| = 1$.

Consideremos ahora dos cuaterniones puros de norma unidad, q y p. De acuerdo con lo establecido en el párrafo anterior,

$$r'' \equiv -pr'p^* = -p(-qrq^*)p^* = (pq)r(pq)^* \tag{12}$$

representa la imagen de r bajo la reflexión en el plano Q, normal a q, seguida de la reflexión en el plano P, normal a p. (Ver la Fig. 3.) Escribiendo $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$ y usando la expresión correspondiente para q [ecuación (6)] así como las reglas (1) y (2), se halla que

$$\begin{aligned} pq &= (p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= -(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) - (q_2 p_3 - q_3 p_2) i - (q_3 p_1 - q_1 p_3) j - \\ &\qquad - (q_1 p_2 - q_2 p_1) k \\ &= -\cos\phi - \operatorname{sen}\phi \, n, \end{aligned} \tag{13}$$

donde n es un cuaternión puro de norma unidad que representa una dirección normal a las direcciones de q y p, con el sentido dado por la regla de la mano derecha y ϕ es el ángulo entre las direcciones de q y p [ver las ecuaciones (3) y (4)]. Por lo tanto, la dirección de n está a lo largo de la intersección de los planos Q y P, y ϕ es uno de los ángulos formados entre dichos planos (ver la Fig. 3). Nótese que, mientras que q y p son cuaterniones puros, en general, pq no lo es, sin embargo, $|pq| = 1$.

La aplicación $r \mapsto (pq)r(pq)^*$, siendo el resultado de dos reflexiones, representa una rotación en $\mathbb{R}^3$ alrededor del origen. El eje de dicha rotación está en la dirección de n, lo cual se puede deducir notando que n queda invariante bajo esta aplicación por estar en ambos planos, Q y P, y los puntos de cada plano son invariantes bajo la reflexión en ese plano. Alternativamente, dado que n es un cuaternión puro, $n^* = -n$, así que $nn^* = 1$ equivale a $n^2 = -1$, por lo que bajo la composición de reflexiones en los planos Q y P, $n \mapsto (pq)n(pq)^* = (\cos\phi + \operatorname{sen}\phi \, n)n(\cos\phi - \operatorname{sen}\phi \, n) = (\cos\phi \, n - \operatorname{sen}\phi)(\cos\phi - \operatorname{sen}\phi \, n) = n$.

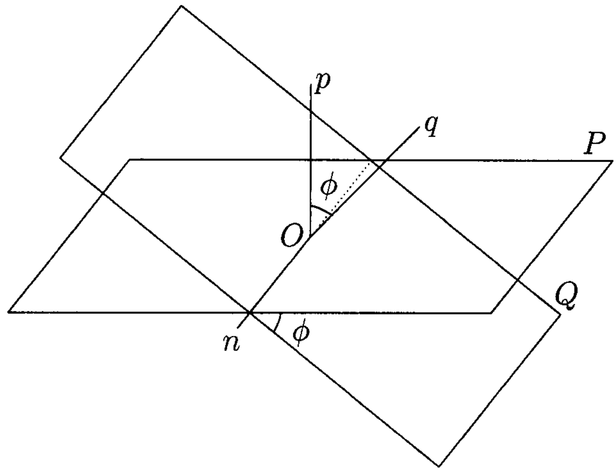

Figura 3. Los cuaterniones puros q, p y n tienen norma igual a 1 y la dirección de n, siendo ortogonal a las de q y p, está en la línea de intersección de los planos Q y P. En el caso mostrado, las direcciones de q y p se han escogido de tal manera que ϕ es menor que 90°.

La ecuación (13) implica que la rotación representada por la ecuación (12) depende solamente del ángulo ϕ entre los planos Q y P, y de la dirección que tenga la línea en que se intersectan estos planos. Gracias a este hecho podemos ver fácilmente que la ecuación (12) representa una rotación en $\mathbb{R}^3$ (alrededor de la dirección de n) por un ángulo 2ϕ. En efecto, consideremos un punto arbitrario (x, y, z), el cual corresponde al cuaternión r [ecuación (6)], y rotemos los planos Q y P alrededor de su línea de intersección, manteniendo fijo el ángulo entre los planos, hasta que el punto (x, y, z) esté en el plano $\widetilde{Q}$ que se obtiene por esta rotación (ver la Fig. 4). Entonces, (x, y, z)

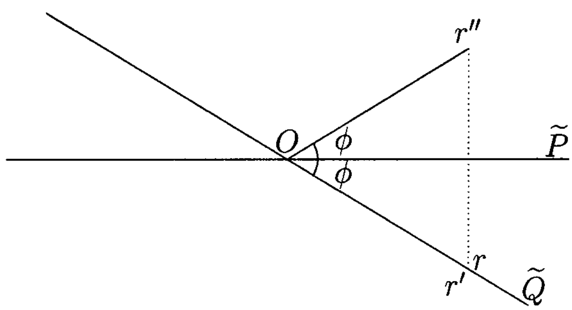

Figura 4. Los planos Q y P se han rotado rígidamente alrededor de su línea de intersección, obteniéndose los planos $\widetilde{Q}$ y $\widetilde{P}$, con el punto (x, y, z) estando en el plano $\widetilde{Q}$. La línea de intersección de los planos Q y P es normal al plano de la figura.

queda fijo bajo la reflexión en $\widetilde{Q}$, por lo que la imagen de (x, y, z) bajo la reflexión en $\widetilde{Q}$ seguida de la reflexión en $\widetilde{P}$ se obtiene simplemente reflejando (x, y, z) en el plano $\widetilde{P}$ lo cual, evidentemente, da un punto tal que la línea que lo une con el origen forma un ángulo 2ϕ con la línea que une el origen con (x, y, z). Así, de las ecuaciones (12) y (13) resulta que la rotación alrededor del eje dado por el cuaternión puro n, de norma igual a 1, por un ángulo α, está representada por la aplicación

$$r \mapsto \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\, n\right) r \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\, n\right). \tag{14}$$

Es fácil probar que cualquier cuaternión de norma igual a 1, q, puede expresarse en la forma $q = \cos(\alpha/2) + \operatorname{sen}(\alpha/2)\, n$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y algún cuaternión puro de norma igual a 1, n, por lo que cada cuaternión de norma igual a 1 define una rotación en $\mathbb{R}^3$ alrededor del origen, dada por la ecuación (14). Sin embargo, la correspondencia entre los cuaterniones de norma igual a 1 y las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ es dos a uno: el cuaternión de norma igual a 1, q, y su negativo, $-q$, corresponden a una misma rotación. (De hecho, si $q = \cos(\alpha/2) + \operatorname{sen}(\alpha/2)\, n$, entonces $-q = -\cos(\alpha/2) - \operatorname{sen}(\alpha/2)\, n = \cos[(\alpha + 2\pi)/2] + \operatorname{sen}[(\alpha + 2\pi)/2]\, n$, por lo que q y $-q$ definen rotaciones alrededor de un mismo eje, que difieren por una vuelta completa, produciendo entonces la misma transformación sobre los puntos de $\mathbb{R}^3$.) Además, esta correspondencia es un homomorfismo del grupo de los cuaterniones de norma igual a 1 (con la operación de multiplicación de cuaterniones) sobre el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ (con la operación de composición). En efecto, si q y q' son dos cuaterniones de norma igual a 1, la composición de la rotación dada por q seguida de la rotación dada por q' se representa por

$$r \mapsto q'(qrq^*)q'^* = (q'q)r(q'q)^*, \tag{15}$$

que es la rotación dada por el cuaternión de norma igual a 1, $q'q$.

Así, por ejemplo, el cuaternión de norma igual a 1

$$q = \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\, i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

representa la rotación por $\pi/2$ radianes alrededor del eje $(1, 0, 0)$ y

$$q' = \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\, j = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

representa la rotación por $\pi/2$ radianes alrededor del eje $(0,1,0)$, luego, usando las ecuaciones (2), se halla que

$$q'q = \frac{1}{2}(1+j)(1+i) = \frac{1}{2}(1+i+j-k),$$

el cual se puede expresar como

$$q'q = \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\left(\frac{i+j-k}{\sqrt{3}}\right),$$

lo que muestra que la rotación por $\pi/2$ radianes alrededor del eje $(1,0,0)$ seguida de la rotación por $\pi/2$ radianes alrededor del eje $(0,1,0)$ equivale a la rotación por $2\pi/3$ radianes alrededor del eje $(1,1,-1)/\sqrt{3}$.

De lo expuesto anteriormente se desprenden las siguientes conclusiones:

1) Cualquier rotación en $\mathbb{R}^3$ alrededor del origen equivale a la composición de dos reflexiones sobre planos que pasan por el origen. Ambos planos contienen al eje de rotación y el ángulo entre sus normales es la mitad del ángulo de rotación.

2) La composición de cualquier número de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ alrededor del origen equivale a una sola rotación alrededor de algún eje que pasa por el origen. Este resultado (conocido como Teorema de Euler [7]) sigue de que la composición de cualquier número de rotaciones alrededor del origen corresponde a un producto de cuaterniones de norma igual a 1, el cual es también un cuaternión de norma igual a 1, que es de la forma $\cos(\alpha/2) + \operatorname{sen}(\alpha/2)\, n$, donde n es un cuaternión puro de norma igual a 1.

3) La reflexión sobre cualquier plano que pase por el origen equivale a una rotación por 180° alrededor de la dirección normal al plano seguida de la inversión a través del origen (esto es, la aplicación $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$). En efecto, si n es un cuaternión puro de norma igual a uno, normal a un plano Q, la rotación por π radianes alrededor de n está representada por el cuaternión $\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2)\, n = n$, por lo que el efecto de esta rotación seguida de la inversión a través del origen está dado por $r \mapsto -(nrn^*)$, que es precisamente la expresión (11).

4) El grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$ alrededor del origen puede identificarse con el espacio real proyectivo tridimensional $\mathbb{RP}^3$ (es decir, son topológicamente equivalentes). Este hecho sigue de que los cuaterniones de norma igual a 1 están en correspondencia uno a uno con los puntos de la esfera S^3 en $\mathbb{R}^4$ (ver la ecuación (5)) y de que los cuaterniones de norma igual a 1, q y $-q$, que corresponden a puntos de S^3

diametralmente opuestos, representan una misma rotación en $\mathbb{R}^3$. El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^3$ se define como el conjunto de rectas en $\mathbb{R}^4$ que pasan por el origen. Cada una de tales rectas intersecta la esfera de radio 1, S^3, en dos puntos diametralmente opuestos, por lo que hay una correspondencia uno a uno entre las parejas de puntos diametralmente opuestos de S^3 y las rectas que pasan por el origen.

3 Comentarios finales

A pesar de los esfuerzos de Hamilton y otros (como Tait y Peirce), los cuaterniones no fueron empleados ampliamente en la física, imponiéndose, en cambio, el formalismo vectorial que se usa actualmente, el cual fue desarrollado por J.W. Gibbs y O. Heaviside con base en el álgebra de los cuaterniones [1]. En lugar de la representación de rotaciones por cuaterniones, en la actualidad es más común utilizar matrices complejas 2×2 que obedecen relaciones análogas a las ecuaciones (1) y (2) [3–7].

Referencias

[1] M. J. Crowe, *A history of vector analysis*, Dover, New York, 1994.

[2] E. T. Bell, *Men of mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937.

[3] R. P. Burn, *Groups: a path to geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[4] E. Cartan, *The theory of spinors*, Dover, New York, 1981.

[5] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.

[6] G.F. Torres del Castillo, *Rotaciones y espinores*, Revista Mexicana de Física **40**, 119 (1994).

[7] H. Goldstein, *Classical mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.