Miscelánea Matemática **20**, *3-14 (1994)*

El problema más difícil de las Olimpiadas de matemáticas

Javier Alfaro Pastor
ITAM, Depto. de Matemáticas

El sexto problema de la olimpiada de matemáticas que se realizó en Australia está considerado como el problema más difícil que se ha presentado en las olimpiadas de matemáticas. El problema original es:

Prueba que si

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k \qquad \text{con} \quad a, b, k \in \mathbf{N}$$

entonces k es un cuadrado perfecto.

En este artículo haremos un análisis de éste problema, asi como de tres variantes del mismo que son:

a) $\frac{a^2+b^2}{ab-1} = k$ con $a, b, k \in \mathbf{N}$

b) $\frac{a^2-b^2}{ab+1} = k$ con $a, b, k \in \mathbf{N}$

c) $\frac{a^2-b^2}{ab-1} = k$ con $a, b, k \in \mathbf{N}$

Primero empezaremos por la solución del problema original, no solamente probando que k es un cuadrado, sino que también caracterizaremos a todas las parejas a, b que son solución del problema. Después haremos el mismo análisis para cada una de las tres ecuaciones restantes, observando las similitudes con el problema original y las grandes diferencias.

1 El problema original.

$$\frac{a^2+b^2}{ab-1}=k \qquad \text{con} \quad a,b,k\in \mathbf{N} \tag{1}$$

Debido a la simetría de la ecuación podemos suponer que $a \leq b$. Primero analizaremos un caso particular:

Caso 1. Si $a=b$ entonces $k=1$ o $k=0$.

Demostración: Si $a=b$ entonces $2a^2=k(a^2+1)$ y como a^2 y a^2+1 son primos relativos, tenemos que a^2+1 debe dividir a 2 y de aquí que $a^2+1=1$ o 2 con lo cual $a=1$ y $k=1$ o $a=0$ y $k=0$. En ambos casos k es un cuadrado.

De aquí en adelante podemos suponer que $a<b$. Para demostrar el problema en este caso, probaremos el siguiente lema.

Lema 1 *Si a,b y k son solución de (1) con $a<b$ entonces:*

i) *$a, ak-b$ y k tambien son solución de (1).*

ii) *Si $a>0$ entonces $a(k-1)<b\leq ak$*

iii) *Si $a=0$ entonces $k=b^2$.*

Demostración:

i) $a^2+(ak-b)^2=a^2+a^2k^2-2akb+b^2=kab+k+a^2k^2-2abk=k(a(ak-b)+1)$.

ii) $kab<kab+k=a^2+b^2<ab+b^2=b(a+b)$, dividiendo entre b, tenemos que $ka<a+b$ y de aquí $ka-a=a(k-1)<b$.

Si $ak<b$, tendríamos que $b=ak+s$ con $s>0$, y sustituyendo en (1) $a^2+(ak+s)^2=ka(ka+s)+k$ y simplificando tenemos que $a^2+s^2+kas=k$, lo cual sólo es posible si $a = 0$, lo cual analizaremos en (iii), por lo tanto si $a > 0$ entonces $b \leq ak$.

iii) $b^2 = k(0+1) = k$.

Una vez que hemos probado el lema, probaremos el resultado del problema original.

Demostración: Sean a, b, k solución de (1). Si $a = 0$, por el lema $k = b^2$. Si no, aplicando el lema obtenemos que a, $ak - b$, k tambien son solución de (1) y ademas $0 \leq ak - b < a$. Si $ak - b$ es cero entonces por el lema $k = a^2$. Si no, continuamos aplicando el lema y encontramos una sucesión $0 \leq x_r < x_{r-1} < \cdots < ak - b < a$.

Después de cuando mucho a pasos obtenemos que 0, x_r, k es solución de (1) (en cada paso k es la misma) y aplicando nuevamente el lema obtenemos que $k = x_r^2$, con lo cual probamos que k es un cuadrado perfecto.

Ahora analizaremos como son todas las soluciones de la ecuación (1). Como vimos en la demostración del problema, dada una solución a, b, k, podemos construir una sucesión $0 \leq x_r < x_{r-1} < \cdots < ak - b < a < b$, donde cada par de términos sucesivos, junto con la k inicial nos dan una terna solución. De aquí que podemos plantear el siguiente resultado:

Teorema 1 *Para cada P número natural. Consideremos la siguiente sucesión: $X_0^{(p)} = p$, $X_1^{(p)} = p^3, \ldots, X_n^{(p)} = p^2 X_{n-1}^{(p)} - X_{n-2}^{(p)}$. Entonces a, b y k son solución de (1) con $a \leq b$ si y sólo si existen $p, n \in \mathbf{N}$, de tal forma que $k = p^2$, y $a = X_n^{(p)}$, $b = X_{n+1}^{(p)}$.*

Demostración:

a) p, p^3 y p^2 son solución ya que $(p)^2 + (p^3)^2 = p^2(p \cdot p^3 + 1)$

b) Supongamos que $a = X_{n-1}^{(p)}$, $b = X_{n-2}^{(p)}$, $k = p^2$ son solución, es decir:

$$a^2 + b^2 = kab + k.$$

Entonces, $a + (ak - b)^2 = a^2 + a^2k^2 - 2abk + b^2 = kab + k - 2abk + a^2k^2 = a^2k^2 - abk + k = k(a(ak - b) + 1)$.

Por lo tanto, dos elementos consecutivos de la sucesión son solución de la ecuación.

La otra implicación del Teorema se sigue de la demostración y de la caracterización de las soluciones.

Ejemplo:

$$k^p = 2$$

2, 8, 30, 112, 418, 1560, 5822, 21728, ...

$$k^p = 3$$

3, 27, 240, 2133, 18957, 168480, ...

Analizando la forma de las soluciones como polinomios en p, se puede probar por inducción el siguiente teorema.

Teorema 2 *$a \in \mathbf{N}$ es solución de (1) si y sólo si existen p y $n \in \mathbf{N}$ tal que $a = pF_n(p^2)$, donde $F_n(x)$ esta dado por:*

$$F_m(x) = \sum_{i=0}^{t} \binom{m-i}{i} X^{m-2i}(-1)^i$$

donde $t = [\frac{m}{2}]$.

2 El segundo problema que vamos a analizar es:

$$\frac{a^2+b^2}{ab-1} = k \qquad \text{con} \quad a, b, k \in \mathbf{N} \tag{2}$$

Como en el primer problema, primero trataremos de determinar cuales son los posibles valores de k y despues determinar todas las soluciones. Este segundo problema tiene grandes semejanzas con el primero pero tiene una gran diferencia, el único valor posible de k es 5. Nuevamente por medio de relaciones de recurrencia caracterizaremos a todas las soluciones.

Iniciemos como en el caso anterior. Por la simetría de (2) podemos suponer que $a \leq b$.

Caso 1. Si $a = b$ entonces no hay solución. (y $a \neq 0$)

Demostración: Si $a = b$ entonces $2a^2 = k(a^2 - 1)$ y como a^2 y $a^2 - 1$ son primos relativos, tenemos que $a^2 - 1$ debe dividir a 2 y de aquí que $a^2 - 1 = 1$ o 2 con lo cual $a^2 = 2$ o $a^3 = 3$ lo cual es imposible en ambos casos.

De aquí en adelante podemos suponer que $a < b$. Para demostrar el resultado en este caso, probaremos el siguiente lema:

Lema 2 *Si a, b, k son solución de (2) entonces*

i) a, $ak - b$, k *son solución de (2)*

ii) $0 < ak - b$

iii) *Si* $a > 1$ *entonces* $ak - b < a$

iv) *Si* $a = 1$ *entonces* $k = 5$ *y* $b = 2$ *o* 3

v) *Si* $a = 0$ *entonces* $b = 0$ *y* $k = 0$.

Demostración: i) $a^2 + (ak - b)^2 = a^2 + a^2k^2 - 2akb + b^2 = kab - k + a^2k^2 - 2akb = a^2k^2 - kab - k = k(a(ak - b) - 1)$.
ii) $a^2 + b^2 = kab - k \Rightarrow b(ka - b) = a^2 + k$, de donde $ak - b > 0$
iii) Si $a = 2$ entonces $4 + b^2 = k(2b - 1)$, de donde $b^2 - 2kb + 4 + k = 0$ con b y k enteros, despejando b obtenemos que

$$b = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 + 4(4 + k)}}{2}.$$

Para que esto sea posible es necesario que $4k^2 - 16 - 4k = s^2$, con $s \in \mathbf{N}$ y s par. Entonces $4(k^2 - 4 - k) = s^2$ lo cual implica que $k^2 - 4 - k = r^2$ de donde $k^2 - r^2 = k + 4$ i.e. $(k+r)(k-r) = k+4$.

Como $k + r$ divide a $k + 4$ entonces $k + r < k + 4$ y por lo tanto $r \leq 4$.

a) $r = 0$. $k^2 = k + 4 \;\Rightarrow\; k \,|\, 4 \;\Rightarrow\; k = 1, 2, 4.$

$$\begin{aligned} k &= 1 \Rightarrow 1 = 5 \quad ! \\ k &= 2 \Rightarrow 4 = 6 \quad ! \\ k &= 4 \Rightarrow 16 = 8 \quad ! \end{aligned}$$

b) $r = 1$. $k^2 = k + 5 \;\Rightarrow\; k \,|\, 5 \;\Rightarrow\; k = 1, 5$

$$\begin{aligned} k &= 1 \Rightarrow 1 = 6 \quad ! \\ k &= 5 \Rightarrow 25 = 11 \quad ! \end{aligned}$$

c) $r = 2$. $k^2 = k + 8 \;\Rightarrow\; k \,|\, k = 1, 2, 4, 8$

$$\begin{aligned} k &= 1 \Rightarrow 1 = 9 \quad ! \\ k &= 2 \Rightarrow 4 = 10 \quad ! \\ k &= 4 \Rightarrow 16 = 12 \quad ! \\ k &= 8 \Rightarrow 64 = 16 \quad ! \end{aligned}$$

d) $r = 3$. $k^2 = k + 13 \;\Rightarrow\; k(k-1) = 13 \;\Rightarrow\; k = 1, 13$

$$\begin{aligned} k &= 1 \Rightarrow 1 = 14 \quad ! \\ k &= 13 \Rightarrow 169 = 26 \quad ! \end{aligned}$$

e) $r = 4$. $k^2 = k + 20 \Rightarrow k(k-1) = 20 \Rightarrow k\,|\,20$ y $k-1\,|\,20 \Rightarrow k = 1, 2, 4, 5$

$$\begin{aligned} k &= 1 \Rightarrow k-1=0 \quad ! \\ k &= 2 \Rightarrow k-1=2 \Rightarrow 20=2 \quad ! \\ k &= 4 \Rightarrow k-1=3 \quad ! \\ k &= 5 \Rightarrow 25=25 \text{ es el único que cumple.} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de k obtenemos que $b = 9$ o $b = 1$, pero como $b > a$, la única posibilidad es $b = 9$, asi tenemos que $ak - b = 10 - 9 = 1 < 2 = a$.

Si $a > 2$ entonces $a = 2 + s$, $s > 0$ y como $b > a$, $b = a + r$, $r > 0$ $kab - k = k(ab-1) = a^2 + b^2 < 2b^2$.

Pero $ab - 1 = (2+s)b - 1 = 2b + bs - 1 > 2b$, por lo tanto $k < b = a + r$.

Si $ak - b \geq a$ entonces $ak \geq a + b \Rightarrow akb \geq ab + b^2 \Rightarrow kab - b^2 \geq ab \Rightarrow a^2 + k \geq ab \Rightarrow k \geq ab - a^2 \Rightarrow k \geq a(b-a) = ar$. Como $k < a + r$, tenemos que $a + r > ar \Rightarrow a = 1$!. $(a > 2)$.

iv) Si $a = 1$ entonces $1 + b^2 = kb - k \Rightarrow b^2 - kb + 1 + k = 0$, con k, b naturales. Despejando b, obtenemos que

$$b = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4(1+k)}}{2} \qquad \text{debe ser natural.}$$

$k^2 - 4 - 4k = s^2 \Rightarrow k^2 - s^2 = (k+s)(k-s) = 4(k+1)$, por lo que $k + s \leq 4k + 4 \Rightarrow s \leq 4$.

a) $s = 0 \Rightarrow k(k-4) = 4 \Rightarrow k\,|\,4 \Rightarrow k = 1, 2, 4$ y $k > 4!$

b) $s = 1 \Rightarrow k(k-4) = 5 \Rightarrow k = 5$ y substituyendo, obtenemos que $b = 2$ o 3.

c) $s = 2 \Rightarrow k(k-4) = 8 \Rightarrow k\,|\,8$ y $k > 4 \Rightarrow k = 8$ y $k - 4 = 1$.
$k = 8 \Rightarrow K - 4 = 4!$

d) $s = 3 \Rightarrow k(k-4) = 13 \Rightarrow k\,|\,13$ y $k > 4 \Rightarrow k = 13$ y $k - 4 = 1$.
$k = 13 \Rightarrow k - 4 = 9$.

e) $s=4 \Rightarrow k(k-4)=20 \Rightarrow k\,|\,20$ y $k>4 \Rightarrow k=5,10,20$

$k=5 \Rightarrow 5*1=20!$

$k=10 \Rightarrow 10*6=20!$

$k=20 \Rightarrow 20*16=20!$.

Con lo cual queda probado el inciso iv).

v) $a=0 \Rightarrow b^2=-k \Rightarrow b=k=0$

Ahora probaremos que si a,b y k son soluciones de (2) entonces $k=5$ y caracterizaremos los valores posibles de a y b. Sean a,b y k soluciones de (2). Si $a=0$, por el lema, $k=b=0$. Si $a>0$ entonces $a, ak-b$, k son tambien solución de (2) y por el lema $0<ak-b$. Si $ak-b\geq a$ entonces $a=1$, $b=3$ o 2 y $k=5$. Si $ak-b<a$ entonces $a,ak-b$ y k son solución de (2) con $0<ak-b<a$. Si continuamos aplicando este proceso, encontramos una sucesión de números $0<x_k<x_{k-1}<\cdots<a$ tales que x_r, x_{r-1}, k son solución de (2). Después de cuando mucho a pasos, encontamos que r tal que $x_r=1$, $k=5$, $x_{r-1}=2,0,3$. Con lo cual queda probado que si a, b y k son solución de (2) entonces $k=5$. Para caracterizar todas las soluciones, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 3 *Consideremos las siguientes sucesiones recursivas.*

$$\begin{aligned} X_0^{(1)} &= 1,\ X_1^{(1)}=2\ Y\ X_n^{(1)}=5X_{n-1}^{(1)}-X_{n-2}^{(1)} \qquad y \\ X_0^{(2)} &= 1,\ X_1^{(2)}=3\ Y\ X_n^{(2)}=5X_{n-1}^{(2)}-X_{n-2}^{(2)}. \end{aligned}$$

Entonces a, b y 5 son solución de (2) $a<b$ si y sólo si existen n y j tales que:

$$a=X_n^{(j)} \quad , \quad b=X_{n+1}^{(j)} \qquad j=1,2$$

Demostración: Igual que en el problema anterior, la demostración se sigue de la caracterización de las soluciones.

Más aún a es solución de (2) si y sólo si $21a^2-20$ es un cuadrado perfecto.

Si a es solución de (2) entonces existe $b \in \mathbf{N}$ tal que $a^2 + b^2 - 5ab + 5 = 0$.

Si despejamos $a\bar{b}$ obtenemos que

a) $25a^2 - 4(a^2 + 5)$ debe ser un cuadrado perfecto y de igual paridad que a, esto es $21a^2 - 20 = s^2$ y $s \equiv a \bmod (2)$, lo cual siempre es cierto en esta ecuación.

Ejemplo:

$$j = 1$$

1, 2, 9, 43, 206, 987, 4729, ...

$$j = 2$$

1, 3, 14, 67, 321, 1538, 7369, ...

III) En el tercer problema que vamos a resolver, analizaremos juntas a las ecuaciones (3) y (4) debido a la relación que existe entre las soluciones de las dos. En este tercer problema vamos a probar que k pude ser cualquier número entero y tambien caracterizaremos a todas las soluciones de cada una de las ecuaciones por medio de relaciones de recurrencia.

$$\frac{a^2 - b^2}{ab + 1} = k \; , \tag{3}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{ab - 1} = k \qquad \text{con} \quad a, b \;\text{ y }\; k \in \mathbf{N} \tag{4}$$

En este problema, como queremos que $k \geq 0$, entonces $a \geq b$

Caso 1. Si $a = b$ entonces $k = 0$ o ($a = b = 1$ para (4)).

Demostración: $a = b \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow ka^2 \pm k = 0 \Rightarrow k(a^2 \pm 1) = 0 \Rightarrow k = 0$ o $a^2 \pm 1 = 0, \Rightarrow a^2 = \pm 1 \Rightarrow a^2 = 1$ en (4) y no hay solución en (3).

De aquí en adelante, podemos suponer que $a > b$. Nuevamente para probar el resultado, probaremos un lema.

Lema 3 *Sean $a, b, k \geq 0$ con $a > b \geq 0$, solución de (3).*

1) *Si $b = 0$ entonces $k = a^2$*

2) *Si $b > 1$, entonces b, $a - bk$ y k son solución de (4) y $0 < ak - b \leq b$*

3) *Si $b = 1$ entonces $a = 1 + k$*

Demostración:

1) Si $b = 0$ entonces $a^2 = k(0+1)$, con lo cual $a^2 = k$.

2) $b^2 - (a - bk)^2 = b^2 - a^2 + 2abk - b^2k^2 = -k - kab + 2abk - b^2k^2 = abk - b^2k^2 - k = k(b(a - bk) - 1)$.

Además $a^2 - b^2 = kab + k \Rightarrow a(a - bk) = b^2 + k > 0 \Rightarrow a - bk > 0$

Si $b < a - bk$ entonces $b^2 - (a - bk)^2 < 0 \Rightarrow k(b(a - bk) - 1) < 0 \Rightarrow b(a - bk) \leq 1 \Rightarrow b = 1!$.

3) Si $b = 1$, como $0 < a - bk < b = 1$ entonces $a - bk = 1$ y de aquí que $a = 1 + k$.

Lema 4 *Sean $a, b, k \geq 0$ con $a > b \geq 0$, solución de (4).*

1) *Si $b = 0$ entonces no hay solución*

2) *$b, a - bk$ y k son solución de (3)*

3) *Si $a - bk < 0$ entonces $b = 1$ y $a = k - 1$*

4) *Si $b > 1$ entonces $0 < a - bk < b$*

Demostración:

1) Si $b = 0$ entonces $a^2 = k(0 - 1)$, con lo cual $a^2 = -k!$.

2) $b^2 - (a - bk)^2 = b^2 - a^2 + 2abk - b^2k^2 = k - kab + 2abk - b^2k^2 = abk - b^2k^2 + k = k(b(a - bk) + 1)$.

3) Si $a-bk<0$ entonces $a-bk\leq -1$ y $b(a-bk)+1\leq 0 \;\Rightarrow\; b^2\leq (a-bk)^2$,

Si $b^2<(a-bk)^2$ entonces $bk<b<bk-a \;\Rightarrow\; b+a<bk$. $(*)$

Como $a>b$, $a=b+s$ con $s>0$.

Si en (4) substituimos a $\underline{a}$ por $b+s$, obtenemos que $b^2+2bs+s^2-b^2=k(b+s)b-k$ y simplificando, obtenemos $2bs+s^2+k=kb^2+kbs$. $(**)$

Si en $(*)$ substituimos a $\underline{a}$ por $b+s$, obtenemos $2b+s<bk \;\Rightarrow\; 2bs+s^2<bks \;\Rightarrow\; 2bs+s^2+k<bks+k$

Usando $(**)$, $kb^2+kbs<kbs+k \;\Rightarrow\; b^2<1$!.

Si $b^2=(a-bk)^2 \;\Rightarrow\; b(a-bk)=-1 \;\Rightarrow\; b=1$ y $a=1+k$.

4) Como $b<1$ entonces por 5) $a-bk>0$. Si $b<a-bk$ entonces $b^2<(a-bk)^2 \;\Rightarrow\; k(b(a-bk)+1)<0 \;\Rightarrow\; b(a-bk)<0 \;\Rightarrow\; a-bk<0$!.

Nuevamente para encontrar todas las soluciones de (3) y (4) usaremos los lemas que acabamos de demostrar.

Sean a,b,k, soluciones de (3) o (4), con $0\leq b<a$.

Si $b=0$ entonces $a^2=k$. Si $b>0$ entonces aplicamos el lema para obtener una solución de (4) o (3). Si no seguimos aplicando el lema hasta encontar una solución donde el número menor sea 1 o -1 y con esto encontramos una solución de la forma :

$1,1$ y k si la última solución fue de (4) o

-1, 1 y k si la última solución fue de (3).

Teorema 4 *Para cada $K\in\mathbf{N}$, consideremos las siguientes sucesiones recursivas.*

$$\begin{array}{llcll}
X_0^{(1)}=1 & X_1^{(1)}=1 & y & X_n^{(1)}=kX_{n-1}^{(1)}+X_{n-2}^{(1)} & y\\
X_0^{(2)}=-1 & X_1^{(2)}=1 & y & X_n^{(2)}=k\,X_{n-1}^{(2)}+X_{n-2}^{(2)} &
\end{array}$$

Entonces a,b,k son solución de (3) o (4) si y sólo si existen $n,j\in\mathbf{N}$, tales que $a=X_n^{(j)}$ y $b=X_{n-1}^{(j)}$

Ejemplo:

$$k = 1$$

$j = 1$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

$$k = 5$$

$j = 2$

-1, 1, 4, 21, 109, 566, 2939, 15261, ...

Nuevamente se puede ver que las soluciones quedan determinadas por un tipo de polinomios. El siguiente teorema también se puede probar por inducción.

Teorema 5 *$a \in \mathbf{N}$ es solución de (3) o (4) si y sólo si existen p y $n \in \mathbf{N}$ tal que $a = F_n(k)$ donde $F_n(k)$ es:*
Si n es impar

$$F_n(k) = k^{n-1} + \sum_{j=2}^{\frac{n+1}{2}} \left[\binom{n-j}{j-2} k^{n-2j+2} + \binom{n-j}{j-1} k^{n-2j+1} \right]$$

Si n es par

$$F_n(k) = k^{n-1} + \sum_{j=2}^{\frac{n}{2}} \left[\binom{n-j}{j-2} k^{n-2j+2} + \binom{n-j}{j-1} k^{n-2j+1} \right] + \binom{(n-2)/2}{(n-2)/2}$$