Miscelánea Matemática **62** (2016) 45-61 SMM

Alexandre Grothendieck: de la luz a la sombra

Carlos Bosch y César L. García
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
México, DF 01080
bosch@itam.mx, clgarcia@itam.mx

1. Introducción

El «Einstein de las matemáticas» es llamado por unos. «El último gran matemático universal» es llamado por otros. Lo que no deja lugar a dudas es que Alexandre[1] Grothendieck fue una de las mentes más prodigiosas y revolucionarias del siglo XX. Su impacto y papel en diversas áreas de las matemáticas lo exhiben así. Pero, como platicaremos en este artículo, su influencia permea más allá de las matemáticas. Sus convicciones lo llevaron a tomar actitudes ante la vida que despertaron la curiosidad e intriga de muchos: a finales de la década de los ochenta se declaró, física e intelectualmente, fuera de los círculos científicos y sociales. Por decisión propia se aisló del mundo hasta su fallecimiento, a los 86 años, el 13 de noviembre del 2014. Una vida singular, polémica y profunda, merece la pena ser contada una vez más. Aquí nos damos a la tarea de bosquejar algunos puntos importantes de su vida y su obra. Por supuesto, estaremos sujetos a nuestras propias preferencias y también a nuestras inclinaciones matemáticas, en parte para no decir barbaridades o bien para no repetir algo que ya se ha sido dicho o escrito en demasía. Para aquellos lectores interesados en seguir o profundizar algunas de las ideas aquí expuestas recomendamos como punto de partida la página del *Círculo de Grothendieck*, ([1]). Esta página es quizá uno de los sitios con la mejor antología de manuscritos de, y sobre Grothendieck. Además, después del fallecimiento de Grothendieck, su familia ha dado anuencia para que parte de su obra sea pública, pues

Los autores agradecen el apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura, A.C. y los valiosos comentarios y sugerencias de los árbitros de este manuscrito.

[1] El nombre Alexandre se usa a menudo en lugar de Alexander, pues Grothendieck mismo lo elige así desde su estadía en Francia.

recordemos que el mismo Grothendieck se opuso al uso y reproducción de sus trabajos literarios y científicos en una «Déclaration d'intention de non-publication» (la carta, de su puño y letra, puede ser obtenida en ([1])). Esta declaración explica, por un lado, la intención de Grothendieck de no volver a publicar, no solo artículos científicos sino de ningún otro tipo y, por otro lado, la prohibición explícita de que alguna parte del material que ya ha publicado sea usado incluso como acervo de biblioteca.

2. Primeros años. De niño a matemático

Comenzamos la historia con Alexander Shapiro y Johanna Grothendieck, padres de Alexandre Grothendieck. A. Shapiro nació en Ucrania en el seno de una familia judía. Fué anarquista y participó en varios levantamientos anti zaristas en Rusia lo que lo llevó a pasar diez años en prisión, de donde salió para refugiarse en Berlín. En Berlín comenzó trabajando como fotógrafo en las calles, para establecerse más adelante con un pequeño estudio de fotografía. Johanna Grothendieck, a la que llaman con cariño Hanka, nació en Hamburgo en la cuna de una familia pequeño burguesa protestante. Muy joven se fue a Berlín, lugar de la vanguardia cultural y revolucionaria del momento. Fue en los círculos revolucionarios donde se relacionó con A. Shapiro. En 1928 tienen un hijo al que llaman Alexander Grothendieck (Schurik de cariño). En 1933, cuando Hitler arriba al poder, la pareja huye a París pero deja a Alexandre, de cinco años, en Hamburgo con la familia Heydorns. Poco después la pareja, por convicciones políticas, parte a España para luchar en apoyo a la República Española durante la guerra civil. En octubre de 1939, de regreso a Francia, en vista de su nacionalidad alemana y por ser refugiados de la guerra civil española, Johanna y Alexander son recluídos en campos de concentración, primero en Rieucros Camp, en el sur de Francia, y después en campos distintos. Durante la segunda guerra mundial, los Heydorns participan activamente en la resistencia lo cual pone en peligro la seguridad del pequeño Alexandre de 11 años de edad. Los Heydorns se dan a la tarea de localizar a los padres de Alexandre y, después de ubicarlos, lo envían por tren al campo de concentración de Vernet, Francia donde se encuentra su padre, quién después será destinado a Auschwitz donde muere en 1942. Para el verano del mismo año, Alexandre Grothendieck vuelve a cambiar de ambiente: es enviado a Rieucros donde se encuentra con su madre, Hanka, en un campo de concentración para mujeres y niños. Alexandre es el mayor de los niños y lo dejan que asista a la secundaria más cercana. Él mismo relata este hecho en *Récoltes et Semailles* [11, p. 32], donde habla de las nevadas, los vientos y sobre todo de sus zapatos a los que siempre se les metía el agua. Finalmente cierran el campo de concentración y después de ir de un lado a otro, madre e hijo se instalan cerca de Montpellier donde ella trabaja en una granja y Alexandre termina su bachillerato. Su genialidad vuelve a vislumbrarse cuando comenta en *Récoltes et Semailles*, sobre sus libros de matemáticas básicas, diciendo que hay una total ausencia de definiciones serias sobre la noción de longitud de curva, área de una superficie y volumen de un sólido y finaliza diciendo que «me he prometido llenar esa laguna en cuanto tenga un tiempo libre».

Grothendieck asiste a cursos de matemáticas en la Universidad de Montpellier donde, según él, la enseñanza no es muy buena y termina estudiando, en gran medida, por su cuenta. Como él mismo dice: «los cursos de la Fac. no estaban hechos para satisfacerme» ([11, p. 33]). Aquí es donde el genio de Grothendieck se deja ver una vez más y con mayor impacto: en algún momento, Grothendieck comunica a uno de sus profesores, M. Soula, que ha descubierto un método para calcular volúmenes de cuerpos muy complejos. En forma independiente y trabajando solo, Grothendieck ha descubierto una forma general de la integral de Lebesgue, descubierta algunos años atrás. Esto le sirve al joven Alexandre para que Soula, que había sido estudiante de E. Cartan, lo envíe con una carta de recomendación para los Cartan, Élie (padre) y Henri (hijo) a París. Sin conocer el ambiente académico de esa época llega al seminario de Henri Cartan donde se codea con grandes personalidades de la época como Jean Dieudonné, Laurent Schwartz y André Weil, entre otros. Con gran valentía y esfuerzo trata de seguir las pláticas del seminario hasta que un día interrumpe a H. Cartan dirigiéndose a él como un igual, lo cual causa una mala impresión.

Después de ese episodio, cansado de la ajetreada vida parisina, por sugerencia de sus compañeros y también por sus propios intereses matemáticos, Grothendieck se siente obligado a tomar otros rumbos. Por recomendación de H. Cartan y A. Weil se va, en septiembre de 1949 a Nancy, donde es recibido por Jean Dieudonné y Laurent Schwartz. En Nancy la vida es más tranquila y los profesores se pueden ocupar de sus estudiantes con más dedicación. La primera recomendación que le hace Dieudonné es que no redescubra cosas existentes, que en eso no hay que ocupar su tiempo, refiriéndose específicamente al redescubrimiento que hizo de la teoría de Lebesgue. En poco tiempo bajo la dirección de Laurent Schwartz escribe una magnífica tesis de doctorado en la que describe una nueva topología en el producto tensorial de dos espacios vectoriales topológicos.

Concluídos sus estudios doctorales, Grothendieck no obtiene trabajo en Francia ya que es apátrida y solamente tiene el pasaporte Nansen otorgado por la ONU a los refugiados sin patria, amén de que no quiere pedir la nacionalidad francesa, que obtendría fácilmente, pues se niega a hacer el servicio militar y pasar un tiempo en el cuartel. Debemos decir que Grothendieck tiene una fuerte filosofía antimilitarista. Esto le complica mucho la vida en Francia. Así, de 1953 a 1954, recomendado por L. Schwartz, se va a Sao Paulo, Brasil, a enseñar sobre la teoría de espacios vectoriales topológicos. En 1955 pasa una parte del año en la Universidad de Kansas, en Lawrence Kansas, otra parte en la Universidad de Chicago y, finalmente, regresa a Francia el que tal vez sea el más grande matemático del siglo pasado. En la siguiente sección comentamos un poco más sobre la trayectoria académica de Grothendieck a partir de su regreso a Francia. Si el lector desea conocer más detalles biográficos puede consultar, como punto de partida, las referencias ([17], [18], [19], [23], [26]), todas ellas disponibles en línea.

3. Tesis Doctoral

Grothendieck llegó a Nancy, Francia, en 1949 para trabajar con Laurent Schwartz y Jean Dieudonné. Schwartz, en ([27, p. 282]), relata su arribo:

> ... El más fabulosos regalo para Nancy vino en la persona de Alexandre Grothendieck....Él (Grothendieck) le mostró a Dieudonné un trabajo de 50 páginas sobre integración con valores en un grupo topológico. El trabajo era correcto pero sin interés alguno. Dieudonné, con toda la agresividad que podía tener, le dió un severo regaño argumentando que no debía trabajar de esa manera: solo generalizando por el placer de hacerlo.

Más adelante Schwartz comenta ([27, pág, 283]) cómo empezó a trabajar con Grothendieck:

> Acababamos (Dieudonné y Schwartz) de publicar el artículo «Los espacios $\mathcal{F}$ y $\mathcal{LF}$» que contenía catorce problemas que no habíamos podido resolver. Dieudonné le propuso a Grothendieck que pensara algunos de estos problemas, los que él prefiriera. Desapareció por unas cuantas semanas. Cuándo regresó había resuelto la mitad de las preguntas. Soluciones profundas y difíciles que necesitaban nuevos conceptos. Nos maravilló.

Schwartz se dio cuenta que había encontrado un matemático de primera línea. En 1953 le dio el tema de tesis. En esa época Schwartz trabajaba en la teoría de distribuciones con valores vectoriales. Un problema central en ese momento era equipar al espacio de distribuciones con una topología adecuada. El problema general propuesto a Grothendieck fue el de encontrar una topología adecuada para el producto tensorial de dos espacios localmente convexos. En el verano Grothendieck reportó sus resultados a Schwartz. Primero dijo que en el producto tensorial hay dos topologías naturales, llamadas *proyectiva* e *inyectiva*, tan naturales, para el espacio en cuestión, la una como la otra. El maestro se quedó mudo ya que él había descubiertó solo una topología natural en el caso particular del espacio de distribuciones. Sin embargo, poco después, Grothendieck probó que la topología proyectiva y la inyectiva coinciden en el espacio de distribuciones y, además, coinciden con la encontrada por Schwartz.

Antes de que acabase el año la tesis estaba terminada. Una obra maestra de más de trescientas páginas con los principales resultados de la teoría de productos tensoriales de espacios vectoriales topológicos; con métodos y técnicas inovadoras y muchas ideas fundamentales para renovar al análisis funcional. En ([27, p. 284]) Schwartz comenta sobre el trabajo:

> ...es un monumento, una obra de arte de primera calidad. Fué necesario leerla, entenderla, aprender de ella ya que es difícil y profunda. Me llevó seis meses de tiempo completo ¡Qué trabajo tan denso, pero que alegría!... Aprendí muchas cosas. Ha sido la más bella de mis tesis...

El halago de Schwartz al trabajo de Grothendieck es muy significativo, hay que recordar, por ejemplo, que Schwartz ya había tenido como estudiantes a grandes matemáticos como Leopoldo Nachbin y François Tréves; Schwartz mismo es una de las grandes figuras del análisis del siglo XX (entre otros reconocimientos obtuvo la medalla Fields en 1950).

En la tesis de Grothendieck hay mucho más de lo que hemos señalado. Trabaja, además, la propiedad de aproximación en espacios de Banach. Esta propiedad dice: un espacio de Banach separable Y tiene la *propiedad de aproximación* si para todo subconjunto compacto K de Y y para toda $\varepsilon > 0$ existe un operador de rango finito, $T_\varepsilon : Y \to Y$, tal que $\sup_{y \in K} \|y - T_\varepsilon y\| < \varepsilon$ (en el trabajo de Grothendieck la propiedad de aproximación esta formulada en lenguaje de productos tensoriales). Grothendieck probó que un espacio de Banach, Y, tiene la propiedad de aproximación si y solo si para todo espacio de Banach X, todo operador compacto de X a Y puede ser aproximado uniformemente (en la norma de operador) por operadores de rango finito. Aunque la propiedad de aproximación era una noción conocida desde los años treintas del siglo pasado, fue Grothendieck quién hizó el primer estudio sistemático de esta propiedad y algunas variantes de ella, como la llamada *propiedad de aproximación acotada.* Esta propiedad de aproximación acotada es similar a la propiedad de aproximación con el agregado de que las normas de los operadores T_ε estén uniformemente acotadas por alguna constante $\lambda > 0$. La propiedad de aproximación es implicada por la propiedad de aproximación acotada y las dos propiedades son equivalentes en espacios de Banach reflexivos según probó Grothendieck también en su tesis.

Al leer la definición de la propiedad de aproximación, es natural preguntarse si todo espacio de Banach Y tiene la propiedad de aproximación. En el argot de los estudiosos de la teoría de espacios de Banach esta pregunta es conocida como el *problema de aproximación* y es un problema que, como ya mencionamos aparece en los años treinta del siglo pasado. El problema de aproximación esta ligado al famoso *problema de la base* que pregunta si todo espacio de Banach separable Y admite una base de Schauder, es decir, la existencia de una sucesión (y_n) en Y tal que para todo vector y en Y, y puede escribirse en forma única como $y = \sum a_n y_n$ para alguna sucesión de escalares (a_n). Es relativamente sencillo observar que espacios de Banach separables que tienen una base de Schauder cumplen la propiedad de aproximación (ver por ejemplo, [7]). El problema de la base aparece por primera vez en el libro operadores lineales de S. Banach de 1932 ([4, p. 111]).

Al problema de la base se le conoce coloquialmente como el *problema del ganso de Mazur* pues un problema muy parecido aparece formulado en el Libro Escocés (problema 153, [2]) y Stanislaw Mazur ofrecía por su solución un ganso vivo. El problema de aproximación fue resuelto de manera negativa[2] en 1972 por Per Enflo, ([9]) y, como detalle anecdótico, puede encontrase en línea la foto testimonial donde Mazur entrega en una canasta, el volátil vivo a Enflo.

En la tésis de Grothendieck, también se desarrollan operadores nucleares, operadores integrales y otros más que fueron estudiados y generalizados en los años sesentas por B. S. Mityagin, A. Pelczynski y A. Pietsch. Otra parte de las trescientas páginas de su tesis, se dedican a estudiar y caracterizar a los espacios localmente convexos E tales que $E \otimes_\pi F = E \otimes_\epsilon F$ (coincidencia de las topologías proyectiva e inyectiva) para cualquier espacio localmente convexo F. A estos espacios, E, los llamó *nucleares* (esta parte motivada por que los espacios de distribuciones y sus duales son espacios nucleares). Aquí se ve la forma de trabajar de Grothendieck: poner el problema en el marco más general posible y resolverlo con una teoría igualmente general. La tesis contiene muchas más cosas relacionadas con el producto tensorial de dos espacios localmente convexos.

[2]El contraejemplo de Enflo también prueba, en particular, la no existencia, en general, de bases de Schauder para espacios de Banach separables.

Resta decir que la tesis fue publicada integra en 1955 como el número 16 de las prestigiosas Memorias de la Sociedad Matemática Americana, ([14]), bajo el título *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* y, como esta publicación tardó en aparecer un par de años, los anales del instituto Fourier de Grenoble en 1954, pero con fecha de 1952, publicaron en sus páginas 73 a 112 el «*Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensorieles topologiques et des espaces nucléaires*». Aunque el título tiene la palabra *Résumé* no es el famosísimo *Résumé* del cual nos ocupamos a continuación.

4. Otros trabajos en análisis funcional

Grothendieck publicó 25 trabajos relacionados con temas de análisis funcional, 23 de ellos entre 1950 y 1956, uno más en 1957 y el último en este tema en 1961. Solo comentaremos un par de esos artículos aquí. En 1953 aparece en el Canadian Journal of Mathematics ([13]) «*Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$». En la introducción nos indica:

> ... este artículo se consagra esencialmente a las aplicaciones lineales débilmente compactas de $C(K)$ en espacios localmente convexos F cualesquiera. Esto resulta ser equivalente al estudio de subconjuntos débilmente compactos en el espacio de medidas de Radón en K (el espacio dual de $C(K)$)

Este artículo contiene algunos de los resultados de compacidad débil más útiles en los espacios de medidas de Radón. El método que usa Grothendieck para estudiar clases de operadores es a través de su factorización a través de espacios «clásicos» del tipo $C(K)$ (espacio de funciones continuas reales con dominio K), $L_1(\mu)$ (espacio de funciones Lebesgue integrables) o espacios de Hilbert. Esta es una técnica que ya usó en su tesis y que usará aun más en el famosísimo *Résumé* ([12]), del cual nos ocupamos más adelante. Entre los resultados más importantes, usando la técnica de factorización, obtiene teoremas tipo teoremas representación de Riesz para medidas vectoriales.

En el último capítulo, Grothendieck trabaja con los espacios $C(K)$ con K compacto y totalmente disconexo (el conjunto ternario de Cantor clásico, con la topología inducida de la recta real, es un ejemplo de un conjunto totalmente disconexo). Prueba que todo operador continuo de $C(K)$ a un espacio de Banach separable es débilmente compacto y define la clase, ahora conocida como de *espacios de Grothendieck*, que consiste de todos los espacios X tales que todo operador de X a un espacio de Banach separable es débilmente compacto. Matemáticos como Jean Bourgain (también medallista Fields) se han preocupado de estudiar esta clase de espacios a fondo y en 1983 probó que H^∞, el espacio de funciones holomorfas y acotadas en el disco unitario, es un espacio de Grothendieck ([5]).

El *Résumé* de Grothendieck es, sin duda, una piedra angular en el desarrollo de la teoría de espacios de Banach. Sin embargo, su impacto y aprecio fue posterior a la fecha de su publicación en 1953. Según G. Pisier, ([25]) algunas posibles razones por las cuales el artículo pasó desapercibido fueron: primero, porque es un artículo en francés, publicado en una revista brasileña (el boletín de la Sociedad Matemática de Sao Paulo) de poca circulación en aquel entonces y segundo, porque en el *Résumé*, Grothendieck abandonaba el contexto de espacios vectoriales topológicos, muy en boga en aquellos años, por el de espacios de Banach. La situación de abandono del Résumé cambió drásticamente, quince años después de su publicación, cuando J. Lindenstrauss y A. Pełczyński en ([20]) descubrieron las valiosas joyas escondidas ahí. Aún más, descubrieron que el *Résumé* contenía respuestas a problemas abiertos que fueron planteados después de la aparición del *Résumé* mismo!

Lindenstrauss y Pełczyński escriben en la introducción de ([20]):

> La principal intención de este artículo es dar una nueva presentación, así como muchas aplicaciones de los resultados del artículo de Grothendieck (se refieren al *Résumé*). En ese excelente artículo se esboza la teoría del producto tensorial entre espacios de Banach. El climax de dicho artículo es un teorema llamado por Grothendieck, «teorema fundamental de la teoría de productos tensoriales de espacios métricos».

El teorema fundamental de Grothendieck es una relación no trivial y sorprendente entre el espacio de Hilbert L_2 y los espacios de Banach L_1 y L_∞ (estos espacios son fundamentales en análisis por su propiedad de universalidad, en el sentido de que todo espacio de Banach separable es isomorfo a un subespacio de L_∞ y por otro lado todo espacio de Banach separable es isomorfo a un cociente de L_1). El cimiento del teorema fundamental es *la desigualdad de Grothendieck*, que escribimos a continuación:

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ real o compleja, una norma para A se define de la siguiente manera

$$\|A\| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} s_i t_j : |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1 \right\}.$$

Esta no es sino la norma de operador de la matriz A vista como un operador lineal entre ℓ_∞^n y ℓ_1^m (denotan a los espacios $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ equipados con las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ respectivamente). Por otro lado definimos

$$G(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\langle h_i, k_j\rangle : h_i, k_j \in H, \|h_i\| \leq 1, \|k_j\| \leq 1\right\},$$

donde H es un espacio de Hilbert (real o complejo). Al igual que $\|A\|$, $G(A)$ es una norma de operador para A entre $\ell_\infty^n(H)$ y $\ell_1^m(H)$ (ahora los vectores tienen entradas en el espacio de Hilbert H y la expresión algebraica de la norma es la misma que se tiene para $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$) La desigualdad de Grothendieck establece la existencia de una constante positiva, K_G, que no depende de m y n, y tal que para cualquier matriz A de $m \times n$

$$G(A) \leq K_G\|A\|. \tag{1}$$

La constante K_G se llama *constante de Grothendieck* y, hoy en día, su valor exacto es desconocido. Grothendieck obtuvo, en el *Résumé* ([12, p. 47]), la estimación $\pi/2 \leq K_G \leq \text{senh}(\pi/2)$, en el caso de matrices y espacios vectoriales reales, y $4/\pi \leq K_G \leq 2\text{senh}(\pi/2)$, en el caso de matrices y espacios vectoriales complejos. Desde el punto de vista matemático, el valor exacto de K_G es una curiosidad, su verdadera importancia es su universalidad con respecto a A y H (aunque la conexión entre K_G y el teorema de Bell en mecánica cuántica dan relevancia al valor de K_G ([24]). Debemos notar que ha habido esfuerzos por determinar el valor de K_G (ver, por ejemplo, en ([24, §4]) una breve crónica de los intentos y avances en el cálculo de K_G). A la fecha, la mejor estimación en el caso de matrices y espacios vectoriales reales es $1.66 < K_G < 1.782$. Mientras que en el caso de escalares complejos, $1.338 < K_G < 1.4046$. La desigualdad de Grothendieck no solo ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de espacios de Banach y el análisis funcional en general, también ha encontrado usos en campos aparentemente ajenos como en el problema de aproximación de la norma de corte para una matriz real. La norma de corte es un concepto que es usado en el diseño de algoritmos de aproximación eficientes para gráficas densas o problemas matriciales (la discusión y el uso de la desigualdad en este contexto puede verse en ([22])). Sobre el teorema de Grothendieck, el artículo de G. Pisier, ([25]), sobre el pasado y presente del teorema es sin duda la mejor antología disponible y, a pesar de ya estar publicado, el artículo sigue siendo actualizado, comentado y editado (una versión electrónica se puede encontrar en ([24])).

5. Matemático universal

Grothendieck incursionó y dejó huella notable en muchas áreas de las matemáticas. El mismo hace un recuento de estas áreas y de su trabajo en ([10]). Entre otras cita: análisis funcional, álgebra homológica, topología, álgebra, geometría analítica, grupos algebraicos, grupos discretos y grupos formales, aritmética y geometría algebraica.

La geometría algebraica es sin duda el área en la que Grothendieck recibió los mayores reconocimientos. Los varios volúmenes de su obra monumental (algunos revisados por o en coautoría con J. Dieudonné), *Éléments de Géométrie Algébrique*, publicados en su mayoría en la colección de publicaciones matemáticas del Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS por sus siglas en francés), así como los numerosos ejemplares del seminario de geometría algebraica (la mayor parte aparece en las Lectures Notes de Springer-Verlag) son, a juicio de los expertos, una de las obras más enriquecedoras en la historia de las matemáticas.

Recomendamos mirar la bibliografía temática de publicaciones de Grothendieck comentada por G. Aiello ([3]) o el reciente artículo de P. Cartier ([6]), donde se comenta en forma esquemática sobre el trabajo de Grothendieck en geometría algebraica y álgebra homológica entre otros.

En 1955, un año antes de que Grothendieck regresara a París y se reincorporara al seminario de Henri Cartan, Serre revolucionó la geometría algebraica con su artículo *Faisceaux algébriques cohérents* ([28]), en el cual prueba que la topología de Zariski permite construir una teoría de haces para las variedades algebraicas sobre un campo arbitrario. A partir de ese trabajo y de las conjeturas de Weil, Grothendieck se propone un programa: refundamentar toda la geometría algebraica en cualquier característica usando métodos cohomológicos: se trata de establecer una liga entre la topología de las variedades algebraicas sobre los complejos y la aritmética de esas variedades sobre un campo finito.

En 1957 Grothendieck obtiene resultados realmente profundos al generalizar el teorema de Riemann-Roch a cualquier dimensión, sobre un campo de característica cualquiera y sobre un espacio eventualmente singular ([16]). Este trabajo da pie a lo que actualmente se conoce como el teorema de Riemann-Roch-Grothendieck.

En 1959 gracias al apoyo de Dieudonné, Grothendieck se convierte en profesor permanente del recién fundado IHÉS en donde continua con su plan de refundamentar la geometría algebraica y es entonces que inicia su célebre seminario de geometría algebraica conocido en esa época como SGA y en donde se incubaron grandes talentos como

Deligne, Demazure, Illusie y Verdier entre otros. Es en esa época que redacta con Jean Dieudonné el libro *Éléments de Géométrie Algébrique.* A partir de ese momento Dieudonné se convierte en cierto sentido en el escribano de Grothendieck. Michel Demazure, en video disponible en YouTube, cuenta esta situación en *Souvenirs d'Alexander Grothendieck* y explica como Dieudonné clasificaba a todos los matemáticos y al hacerlo él se consideró estar por debajo de Grothendieck y por lo tanto estaba a su servicio en lo que a matemáticas respecta. Dieudonné tenía una gran admiración y respeto por la inteligencia y por lo tanto no se sentía mal de trabajar así para un matemático más joven que él. Luc Illusie, otro de los alumnos de doctorado de Grothendieck, recuerda que cuando Cartan lo encaminó con él, se sintió inicialmente aterrorizado, dice Illusie:

> Lo veía una vez cada dos meses, un día en la mañana y no me dejaba ir más que hasta las once de la noche y todo el día se la pasaba corrigiendo mi trabajo e improvisando matemáticas. Era un manantial de intuición. Para no olvidarme de nada lo grababa. En esa época era alegre, optimista, generoso y cálido.

Para poder explotar toda su intuición Grothendieck necesitaba ayudantes, profesores y alumnos que realmente colaboraran codo a codo en su cometido. La colaboración Grothendieck-Dieudonné-Serre es una de las más enriquecedoras de la historia de las matemáticas, cada uno jugando un papel distinto. Fue esa colaboración que llevó a la redacción de la obra colosal *Éléments de Géométrie Algébrique.* Tres caras con papeles diferentes para una misma obra. Su trabajo sentó las bases en muchas áreas de las matemáticas. Basta decir que sin las herramientas de la geometría aritmética (subproducto de la geometría algebraica) Andrew Wiles hubiera recorrido quizá un camino más largo para llegar a su famosa prueba del teorema de Fermat.

Para entender la importancia de su contribución hay que regresarse a las nociones fundamentales. Cada curva se caracteriza por una ecuación. La geometría algebraica trata de caracterizar a estos objetos (las curvas) por propiedades que son intrínsecas a ellas, es decir, por propiedades que no van a cambiar si se aplica cierto tipo de transformaciones a esos objetos. Al conjunto de esas propiedades se les llama *conjunto de invariantes del objeto.* Cada objeto va a quedar definido a través de sus invariantes.

A principios del siglo XX se desarrolla la teoría de los conjuntos algebraicos de dimensión cualquiera sobre un espacio afín $\mathbb{K}^n$, un espacio de n dimensiones donde $\mathbb{K}$ es un campo algebraicamente cerrado.

Posteriormente Weil define el concepto de variedad algebraica que sustituye el de curva cuando el campo es algebraicamente cerrado y Serre, en 1955, da una definición más sencilla y clara de esta noción. En su trabajo, Grothendieck empieza por generalizar el concepto de variedad algebraica a campos que no son algebraicamente cerrados y luego a conjuntos más generales como son los anillos. En el anillo de los enteros, por ejemplo, Grothendieck define una topología que hace posible el estudio de los invariantes (por ejemplo la dimensión) de sus variedades algebraicas que llama «cohomologie étale»). Es así que reagrupa las dos grandes teorías: la teoría de grupos (teoría de Galois) y la de la topología clásica (teoría de Poincaré).

Su otro aporte fundamental como ya lo indicamos fue transportar la nocion de geometría en la aritmética permitiendo así resolver problemas abiertos (por ejemplo el teorema de Fermat) en la teoría clásica de los números.

6. Del IHÉS a Los Pirineos

Si los premios permiten medir el talento, el de Grothendieck es inmenso. En 1966 obtuvo la medalla Fields, principalmente por su trabajo en geometría algebraica, el desarrollo de la teoría K y sus contribuciones revolucionarias en el álgebra homológica, en particular su famoso artículo en Tôhoku ([15]). Para protestar contra la represión que sufrió Hungría en 1956 a manos de la Unión Soviética no quiso presentarse en el congreso Internacional de Matemáticas en Moscú para recibir la medalla Fields. Al respecto escribió una carta que el presidente de la Unión Matemática Internacional, George de Rham, se negó a leer. En la presentación de las medallas[3], fue Jean Dieudonné quién presentó a Grothendieck y en su discurso dijo ver, ([8])

> . . . si fuese necesario buscar un padrino espiritual a Grothendieck, este me parece a mí que sería Hilbert, y es con el único que podríamos compararlo. Al igual que Hilbert su lema podría ser: simplificar generalizando . . .

En otra parte de su discurso indica que Grothendieck es de un tamaño tal que no lo pisa nadie (matemáticamente hablando). La medalla Fields fue aceptada a nombre de Grothendieck por León Motchane (matemático y empresario, cofundador y mecenas del IHÉS). A final de

[3]Como detalle curioso, este fue el Congreso Internacional de Matemáticas donde se instituye que deben darse hasta cuatro medallas en virtud de la creciente expansión en investigación en matemáticas.

cuentas, la medalla de 7.5cm de diámetro y con baño de oro fue subastada por Grothendieck y lo obtenido lo donó al gobierno de Vietnam que en esos años padecía la intervención bélica de los Estados Unidos.

A la medalla Fields le siguió la medalla Émile Picard, otorgada cada seis años por la Academia de Ciencias de Francia, en 1977. Esta, cuenta la leyenda, acabó en casa de un alumno haciendo las veces de cascanueces. En 1988 le otorgaron el premio Crawford creado por la Academia Real de Suecia para reconocer las áreas olvidadas por Nobel. Grothendieck le da poca importancia al medio millón de dólares que otorga el premio y simplemente no lo acepta.

¿Por qué este genio dejó de hacer matemáticas siendo aún muy joven?

Grothendieck era admirado por su brillantez. Al terminar su tesis doctoral en 1953 la amistad con Laurent Schwartz, su director de tesis, crece al grado que en múltiples ocasiones va a su casa a tocar piano, amén de que además ambos tienen ideas políticas similares. Años antes, en 1935, un grupo de jóvenes y brillantes matemáticos franceses deciden crear el grupo Bourbaki, entre otras cosas, para escribir libros de texto con todo el rigor matemático y así tener las herramientas para formar mejores matemáticos. Sin embargo se les escapó el mejor: Grothendieck ni se formó con esos libros, ni encuentra trabajo en Francia por ser apátrida, es lo que describiríamos como un «solo vino». No captar este talento es tal vez el primer fracaso de la escuela bourbakista.

León Motchane, visita a su hermano en el Instituto para Estudios Avanzados de Princeton y decide entonces invertir el dinero necesario para crear en Francia algo parecido. En 1958 con la ayuda de Robert Oppenheimer y Jean Dieudonné, crea el IHÉS del cuál será su director hasta 1971. El Instituto se encuentra a unos 30 kilómetros del centro de París. En el IHÉS, el primer contratado es Jean Dieudonné y el segundo Alexandre Grothendieck. Dieudonné, hombre de derechas, se pone al servicio de Grothendieck, anarquista irrespetuoso que finalmente pide la ciudadanía francesa en 1971. Así, poco a poco se va armando la maquinaria que Grothendieck necesita para continuar avanzando con paso firme.

El medallista Fields más joven de toda la historia, Jean Pierre Serre (recibió la medalla a los 28 años) en esa época flamante catedrático del College de France al cual Grothendieck también perteneció un par de años, se une a ellos para llevar a cabo los primeros trabajos en el recién creado IHÉS. Ese trío Dieudonné-Grothendieck-Serre junto con un puñado de alumnos revolucionaron varias áreas de las matemáticas trabajando de sol a sol durante varios años en el IHÉS donde los investigadores no tienen carga docente. Todo parecía ser miel sobre hojuelas. Sin embargo, en 1966 llega la primera protesta importante de

Figura 1. Grothendieck en Vietnam.

Grothendieck a raíz del congreso en Moscú. Los bombardeos americanos y el desembarco de los marines en Vietnam hacen que en Francia los intelectuales formen el «Movimiento para la paz» y L. Schwartz funda en 1966 el «Comité Nacional de Vietnam». Schwartz, al contrario del grupo Bourbaki, se involucra políticamente junto con su amigo Grothendieck en las protestas contra la guerra y el apoyo a Vietnam. Este último, para apoyar al pueblo vietnamita, hace un viaje a Hanoi en noviembre de 1967 para dar unos cursos. Los bombardeos son tales que, los alumnos y el maestro buscan refugio en la selva vietnamita y se trasladan al pueblo de Dai Tu. Grothendieck dicta varias conferencias sobre productos tensoriales y geometría algebraica. En Vietnam los americanos ponen al servicio de la guerra su investigación de punta. Grothendieck es testigo del horror que es la guerra tecnológica a la que se opone rotundamente y decide apoyar lo más posible a la Universidad de Hanoi: sugiere a varios matemáticos que se vayan a Vietnam, a otros les pide que envíen libros y artículos y por otra parte él imparte varias conferencias sin contenido matemático o político sino más bien para elevar el honor del espíritu humano y para defender el desarrollo de la comunidad matemática de Vietnam.

Posteriormente Grothendieck se pronuncia por el desarme total. Se da entonces cuenta que en ese momento Francia es el tercer productor y exportador de armas en el mundo y que en particular 30 % de la investigación científica es subvencionada por el Ministerio de Defensa. También llega a saber que Motchane aceptó algunos de esos apoyos para completar las finanzas del IHÉS. Esto hace que Grothendieck se le enfrente y le pida que no tome esos subsidios.

Llega mayo de 1968 en Francia y las ideas de democratizar la ciencia le parecen a Grothendieck totalmente incoherentes y contradictorias al espíritu de las ciencias. Sin embargo participa en el movimiento con reticencia. Él defiende la investigación científica en ese momento y sin embargo dos años después pide llanamente a la comunidad científica que la abandone. Poco a poco se convence de que la vía académica es una vía muerta. Motchane ha dejado de recibir las subvenciones del Ministerio de Defensa pero en 1970 vienen tiempos difíciles y solicita nuevamente apoyo a las fuentes militares. Grothendieck se entera y trata de que todos los investigadores de IHÉS renuncien. Algunos aceptan aunque no lo hacen a pesar de estar en contra de ese tipo de subvenciones. El único que renuncia es Alexandre Grothendieck. En ese verano participa en unas conferencias en Canadá y cada vez se interesa más en los temas ecológicos y en el porvenir del planeta. Junto con varios investigadores jóvenes americanos y canadienses, crea el movimiento «Survivre et Vivre» (sobrevivir y vivir). Hacen una publicación en donde los primeros números se dedican a denunciar y analizar la alianza entre la ciencia y los militares.

Respecto a su situación laboral, deja de pertenecer al IHÉS pero le consiguen, inicialmente por dos años, estar en el prestigioso Collége de France en donde tiene que impartir un curso nuevo cada año, un curso inédito. En efecto Grothendieck impartió un curso inédito como se lo piden pero no en matemáticas como todos lo esperaban. Su curso se llamó: «Ciencia y Ecología en la Crisis Evolucionista Actual: ¿Vamos a Continuar la Investigación Científica?» Su contrato ya no es renovado en 1972 pues es demasiado revolucionario para esta institución.

Grothendieck cada vez se aparta más del medio científico y se dedica a cuestiones pertinentes al movimiento ecológico Survivre et Vivre. Tras lograr un trabajo administrativo de un año en el CNRS (Centre National de Recherche Scientifique) logra incorporarse como profesor en 1973 en la Universidad de Montpellier. Aunque es imposible que un genio como él deje de reflexionar en matemáticas, abandona por completo la tarea de publicar. En esta época su influencia en el quehacer matemático se hace a través de cartas a sus amigos y alumnos.

En 1984 regresa al CNRS nuevamente a un puesto administrativo y al cumplir los 60 años, en 1988, se retira definitivamente, habiéndose sentido maltratado por el sistema académico francés. También en 1988 aparecen sus memorias tituladas *Récoltes et Semailles* (Cosechas y Siembras) en las que critica fuertemente el panorama general de las matemáticas, las ciencias y la investigación en Francia. Sin embargo este trabajo de unas mil páginas no tiene una buena acogida entre las casas editoriales y nadie lo quiere publicar. En *Récoltes et Semailles* pone especial acento en el trato que sufren los matemáticos que empiezan respecto a las figuras consagradas. Además apoya la construcción de las teorías generales, como quehacer matemático, frente a la tarea más reconocida de obtener pequeños resultados concretos. El texto revela una gran amargura, un divorcio con sus pares y un rechazo a la investigación científica. En esa época se aísla definitivamente de la comunidad científica y solo tiene contacto con muy pocas personas. En ([21]) puede leerse la crónica de lo que quizá haya sido una de las últimas entrevistas a Grothendieck en su retiro.

En 1990 se retira totalmente a un pueblito en los Pirineos. Casado dos veces deja cuatro hijos cuando muere el 13 de noviembre de 2014 a los 86 años en el Hospital Saint-Girons. Alexandre Grothendieck explicó la razón por la que las matemáticas son importantes: permiten a la humanidad hacer cosas difíciles y crear las herramientas con las cuales las cosas difíciles se pueden hacer de manera sencilla.

Bibliografía

[1] «The grothendieck circle», `http://www.grothendieckcircle.org/`.

[2] «Scottish book», `https://en.wikipedia.org/wiki/Scottish_Book`.

[3] G. Aiello, «Thematic bibliography», Disponible en The Grothendieck Circle, `http://www.grothendieckcircle.org/`.

[4] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Chelsea Publishing, AMS, 1978.

[5] J. Bourgain, «Propriété de Grothendieck de H^∞», *Publ. Math. Univ. Paris VII*, vol. 16, 1983, 19–27, Seminar on the geometry of Banach spaces (Paris, 1982).

[6] P. Cartier, «Alexander Grothendieck: A country knwon only by name», *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 62, núm. 4, 2015, 373–382.

[7] P. G. Casazza, *Approximation properties*, vol. 1, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, 2001.

[8] J. Dieudonné, *Les travaux de Alexander Grothendieck*, Proceedings of International Congress of Mathematics, Moscow, 1966, Ed. Mir, 1968.

[9] P. Enflo, «A counterexample to the approximation problem in Banach spaces», *Acta Math.*, vol. 130, 1973, 309–317.

[10] A. Grothendieck, «Esquisse thématique des principaux travaux mathématiques de (et par) A. Grothendieck», Disponible en The Grothendieck Circle, `http://www.grothendieckcircle.org`.

[11] ———, «Récoltes et Semailles. Réflexions et Témoignage Sur un Passé de Mathématicien», Versión electrónica. Colección de manuscritos de junio de 1983, febrero de 1984, mayo de 1985 y enero de 1986. Copia personal de los autores. Ya no disponible en The Grothendieck Circle (`http://www.grothendieckcircle.org/`).

[12] A. Grothendieck, «Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques», *Boll. Soc. Mat., São-Paulo*, vol. 8, 1953, 1–79, Reimpreso en *Resenhas* **2**, no. 4, (1996) 401-480.

[13] ———, «Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $c(k)$», *Canadian J. Math.*, vol. 5, 1953, 129–173.

[14] ———, «Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires (french)», *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 16, 1955, 140.

[15] A. Grothendieck, «Sur quelques points d'algèbre homologique, i», *Tôhoku Math. J. (2)*, vol. 9, núm. 2, 1957, 119–221.
[16] A. Grothendieck, *Classes de faisceaux et théorème de riemann-roch, (1957)*, Springer-Verlag, 1971, Published in SGA 6.
[17] A. Jackson, «Comme appelé du néant-as if summoned from the void: the life of Alexandre Grothendieck», *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 51, núm. 4, 2004, 1038–1056.
[18] ———, «Comme appelé du néant-as if summoned from the void: the life of Alexandre Grothendieck. Part II», *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 51, núm. 10, 2004, 1196–2012.
[19] G. Lebrun, «Alexander Grothendieck, le génie secret des mathématiques», Publicado en `http://voilacestdit.blog4ever.com/grothendieck-2`.
[20] J. Lindenstrauss y A. Pełczyński, «Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications», *Studia Math.*, vol. 29, 1968, 275–326.
[21] R. Lisker, «Visiting Alexandre Grothendieck», Ferment Magazine, 1988. Disponible en `http://www.fermentmagazine.org/Quest88.html`.
[22] A. N. N. Alon and, «Approximating the cut-norm via Grothendieck's inequality», *SIAM Journal on Computing*, vol. 35, issue 4, 2006, 787–803.
[23] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, «Mactutor history of mathematics archive», `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`.
[24] G. Pisier, «Grothendieck's theorem, past and present», Versión electrónica sin cortes y expandida. Disponible en `http://www.math.tamu.edu/~pisier`.
[25] ———, «Grothendieck's theorem, past and present», *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 49, núm. 2, 2012, 237–323.
[26] W. Scharlau, «Who is Alexandre Grothendieck?», *Notices of the AMS*, vol. 5, núm. 8, 2008, 931–941.
[27] L. Schwartz, *A Mathematicien Grappling with His Century*, Birkhäuser, 2001.
[28] J. P. Serre, «Faisceaux algébriques cohérents», *Ann. of Math.*, vol. 61, núm. 2, 1955, 197–278.