Miscelánea Matemática **40** (2004) 77–85 SMM

El punto de Fermat

Silvestre Cárdenas
Facultad de Ciencias, UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México
Circuito Exterior, C. U.
México D.F.
04510 México
silver@servidor.unam.mx

Los resultados que presentaremos enseguida son una muestra de cómo, con Geometría elemental, se puede atacar y resolver, de diversas formas, un problema que no es trivial; por ello los consideramos interesantes, tanto para estudiantes como para maestros de Matemáticas.

Se llama Punto de Fermat al punto del plano para el cual la suma de las distancias a los vértices de un triángulo dado, cuyos ángulos interiores son menores a $120°$, es la mínima posible. Dicho punto también se conoce como Punto de Fermat-Torricelli o como Punto Isogónico y es el primer punto notable del triángulo que se encontró después de la época de Euclides.

El planteamiento del problema de localizar dicho punto se le atribuye a Pierre de Fermat (1601-1665), y se dice que él mismo se lo envió a Evangelista Torricelli (1608-1647) como un reto [1]. No todo el mundo está de acuerdo con esta historia, pues no se tiene ninguna referencia documental que la confirme. Hay quienes dicen que el problema le llegó a Torricelli por otra vía. Lo importante es que Torricelli lo resolvió, aunque no publicó la solución. Fue un discípulo suyo, Vincenzo Viviani (1622-1703) quien lo hizo, en 1659, en nombre de su maestro.

A pesar de que esta historia es comúnmente aceptada, Courant y Robbins [2] le atribuyen el planteamiento y la solución de dicho problema a Jacob Steiner (1796-1863).

Actualmente se conocen varias soluciones del problema, enseguida presentaremos algunas de ellas:

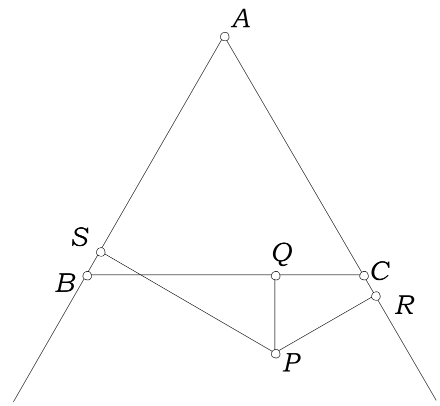

Figura 1.

La primera es una posible reconstrucción de la que publicó Viviani. Para mostrarla vamos a recordar una propiedad de los triángulos equiláteros: el *Teorema de Viviani*, que dice lo siguiente:

La suma de las distancias de cualquier punto del plano a los lados de un triángulo equilátero es constante e igual a la medida de la altura de dicho triángulo.

Demostración: En la Figura 1 consideramos el triángulo ABC y el punto interior P, tal que PQ, PR y PS son las distancias de P a BC, CA y AB, respectivamente. Consideremos ahora las áreas de los triángulos PBC, PCA y PAB y sumémoslas, de manera que obtengamos el área Δ del triángulo original ABC:

$$\Delta = \frac{PQ \times l}{2} + \frac{PR \times l}{2} + \frac{PS \times l}{2} = \frac{h \times l}{2}\,,$$

donde h es la altura del triángulo y l la longitud de cada uno de sus lados, así que $PQ + PR + PS = h$.

En el caso de que el punto sea exterior, estableceremos la convención de tomar como negativo al término que corresponda a la distancia al lado opuesto al vértice cuyo ángulo interior contenga al punto dado. Por ejemplo, en la Figura 2, el punto exterior queda comprendido en el ángulo interior correspondiente al vértice A, así que tomaremos PQ negativa.

Regresemos al problema de Fermat:

Tracemos triángulos equiláteros sobre los lados del triángulo dado y los circuncírculos de dos de ellos, según se muestra en la Figu-

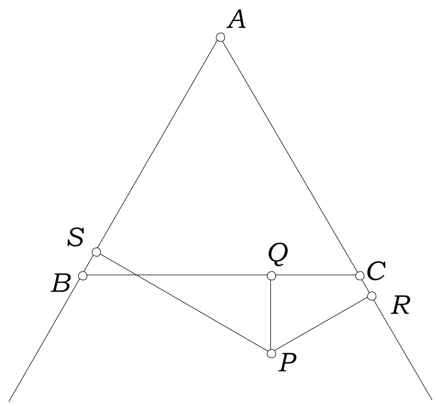

Figura 2.

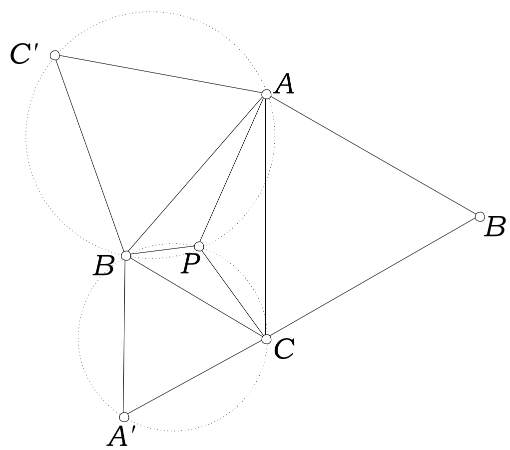

Figura 3.

ra 3. Dichos circuncírculos se cortan, además de en B, en un punto interior del ángulo ABC, al que llamaremos P. Ello implica que $\angle APB = \angle BPC = 120°$. Por lo tanto, el circuncírculo del tercer triángulo se interseca con los dos primeros precisamente en el punto P, pues $\angle CPA = 120°$. Demostremos ahora que P es el punto de Fermat:

En la Figura 4 trazamos perpendiculares a AP, BP y CP por A, B y C, respectivamente. El triángulo así construido, $\triangle LMN$, es equilátero. Tomemos otro punto P', diferente de P, por el Teorema de Viviani:

$$AP + PB + PC = A'P' + B'P' + C'P' < AP' + BP' + CP'$$

para toda P' diferente de P, lo cual demuestra que P es el punto bus-

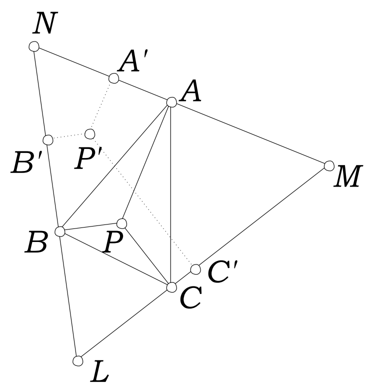

Figura 4.

cado.

Ahora sólo quedaría por demostrar que efectivamente el punto P siempre existe, para ello probaremos que es el punto de intersección de las rectas que unen los vértices del triángulo dado con los vértices opuestos de los tres triángulos equiláteros construidos sobre los lados del $\triangle ABC$, cuyos vértices llamaremos A', B' y C', según se muestra en la figura 5 siguiente, que, por cierto, está mal hecha intencionalmente, con el objeto de que se vea la posibilidad de que AA', BB' y CC' no fueran concurrentes, es decir, que la figura no nos lleve a una mala demostración. Podemos hacer dicha demostración de dos maneras:

La primera sería usar el Teorema de Ceva en su forma trigonométrica, que es un camino un poco largo, por lo que no lo haremos aquí.

La segunda es la siguiente:

1. $\triangle C'AC$ y $\triangle BAB'$ son congruentes porque
   a) $C'A = BA$ son lados del triángulo equilátero $AC'B$
   b) $AB' = AC$ son lados del triángulo equilátero $AB'C$
   c) $\angle C'AC = 60° + \gamma + \beta = \angle BAB'$.
2. Sea O el punto en el que se cortan AA' y BB'. El ángulo $C'AB = 60°$, entonces, $\angle AOC' = \angle C'OB = 60°$, puesto que el cuadrilátero $C'BOA$ es cíclico, ya que $\angle C'BO + \angle OAC' = 180°$.
3. Sea O' el punto en el que concurren CC' y AA'. El ángulo $B'CA = 60°$, entonces, $\angle CO'B' = \angle B'O'A = 60°$, ya que el cuadrilátero $AO'CB'$ es cíclico.

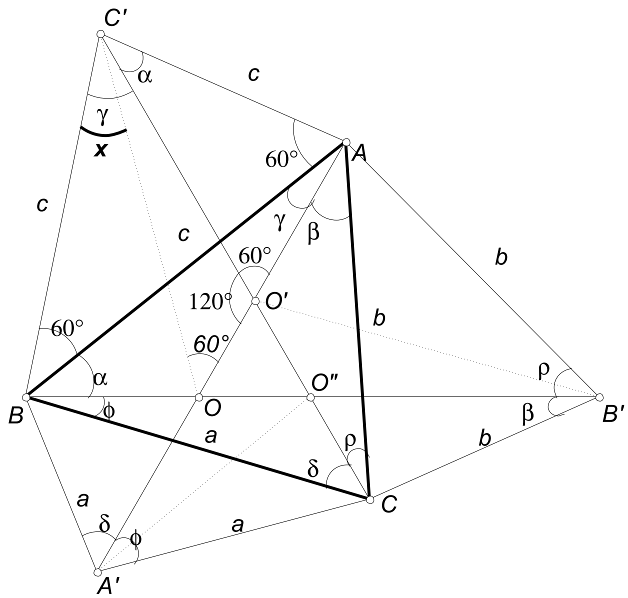

Figura 5.

4. Sea O" el punto de intersección de BB' y CC'. El ángulo $A'BC = 60°$, entonces, $\angle BO"A' = \angle A'O"C = 60°$, pues el cuadrilátero $BO"CA'$ es cíclico.

5. Como $\alpha + \gamma = \beta + \rho = \delta + \varphi = 60°$, el ángulo entre las rectas AA' y BB' es 120°, al igual que el ángulo entre BB' y CC' y el ángulo entre CC' y AA'; de donde O, O' y O" coinciden o forman un triángulo equilátero.

6. Como el cuadrilátero $C'BOA$ es cíclico, entonces, la diagonal $C'O$ y el lado CB deben formar un ángulo igual al que forman la diagonal AB y el lado AO, es decir, γ, lo cual implica que $x =?$. Por lo tanto, el ángulo $OC'O' = 0°$ y entonces, $OO' = 0$, al igual que $O'O$" y $O"O$, por lo que AA', BB' y CC' concurren.

Una vez determinado el punto P se han encontrado otras maneras de demostrar que es precisamente el punto para el cual la suma de las distancias a los vértices del triángulo es mínima. En una de ellas se utiliza la propiedad de que dicha suma es precisamente igual a la distancia CC', que obviamente es igual a AA' y a BB'. Veamos:

De la Figura 6, tenemos que:

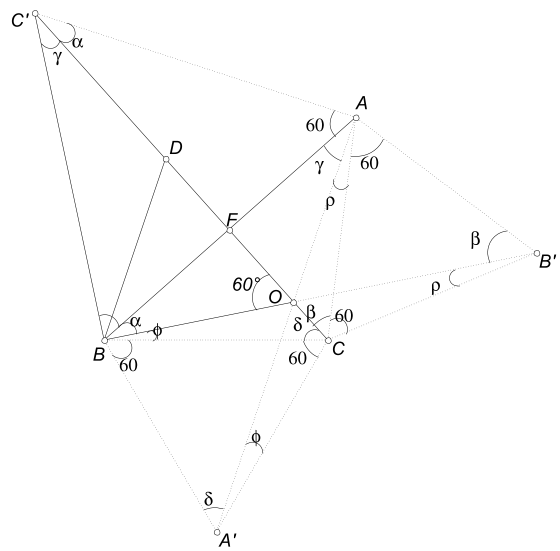

Figura 6.

1. Sea D en $C'C$ tal que $OD = OB$. Como el triángulo $C'AF$ es semejante al triángulo BOF, $\angle C'OB = 60°$ y, por lo tanto el triángulo DBF es equilátero.

2. El triángulo $C'DB$ es congruente con el triángulo AOB, pues $DB = OB$, $\angle C'DB = \angle AOB = 120°$ y $\angle BC'D = BAO = \gamma$. Por lo tanto, $C'D = AB$ y $DO = OB$. Entonces, $C'D + DO + OC = AO + BO + CO = C'C$.

3. Para demostrar que $AO + BO + CO$ es mínima, supongamos que el ángulo que forman las rectas AO y BO fuera diferente de $120°$ (lo cual implica que también lo serían los ángulos entre BO y CO, etc.), según se muestra en la Figura 7.

i) Construyamos el triángulo equilátero $C'AB$.

ii) Con $C'B$ como lado, construyamos una recta que forme un ángulo γ igual al que forman los segmentos AB y AO'. Sobre la recta trazada tomemos $C'D = AO'$, por lo tanto el triángulo $C'DB$ será congruente con el triángulo $AO'B$.

iii) Tracemos el segmento DO', que será igual al BO' y al DB, pues el ángulo DBO' es $60°$, ya que $\angle DBA + \tau = 60°$, por ser el triángulo $C'AB$ equilátero.

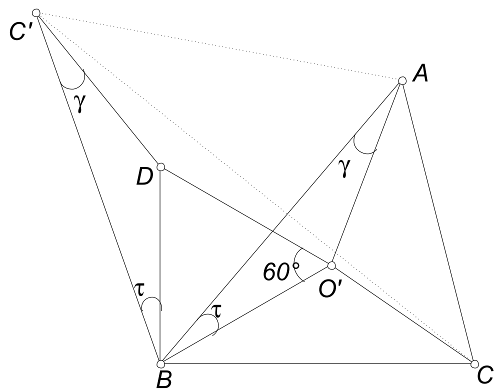

Figura 7.

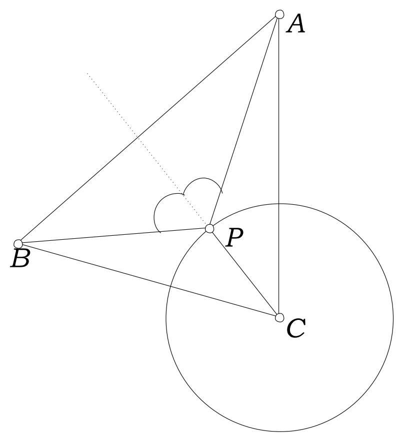

Figura 8.

Entonces, tenemos que $C'D = AO'$ y $DO' = BO'$, por lo que $AO' + BO' + CO' = C'D + DO' + CO'$, que es mayor que $C'C$.

Vamos ahora a describir la demostración de Steiner que aparece en [2]:

Tomemos un punto P en el interior del triángulo tal que $a = PA$, $b = PB$ y $c = PC$; tracemos un círculo con centro en C, de radio c, según se muestra en la Figura 8. Eso quiere decir que los segmentos AP y BP deben llegar al círculo formando ángulos iguales, para que su suma $a + b$ sea mínima, lo cual es fácil de demostrar. Pero, algo similar pasaría si formásemos un círculo con centro en A y radio a. Entonces el punto P será aquel que cumpla con que $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$.

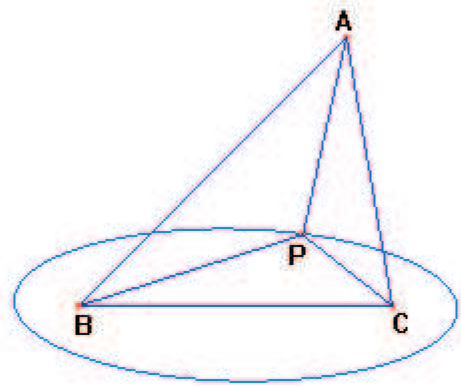

Figura 9.

Una variante de esta demostración es considerar la elipse cuyos focos son dos de los vértices del triángulo, digamos B y C, como $BP+PC$ es constante, sólo nos interesa el punto P de la elipse que esté a la menor distancia de A, que por una razón similar al caso de la circunferencia, es aquél en que AP biseca al ángulo BPC. Como eso pasa para cada uno de los vértices del triángulo, la solución es que P es el punto isogónico.

Finalmente, supongamos que para un triángulo cualquiera ABC, hay un punto P tal que $AP+BP+CP$ es mínima, tomemos el triángulo $A'BC$, donde A' es un punto sobre AP distinto de A. Supongamos que para este nuevo triángulo el mejor punto fuera P', distinto de P. Eso implica que:

$$AP+BP+CP \leq AP'+BP'+CP'$$

$$A'P'+BP'+CP' \leq A'P+BP+CP. \quad \text{(Ver la Figura 10)}$$

Sumando miembro a miembro:

$$AP+BP+CP+A'P'+BP'+CP' \leq AP'+BP'+CP'+A'P+BP+CP$$

$$AP+A'P' \leq AP'+A'P, \text{ es decir, } AP-A'P+A'P' \leq AP', \text{ luego:}$$

$$AA'+A'P' \leq AP'.$$

Entonces, por la desigualdad del triángulo, P' tiene que ser colineal con A y A', y consecuentemente, estar en la línea AP.

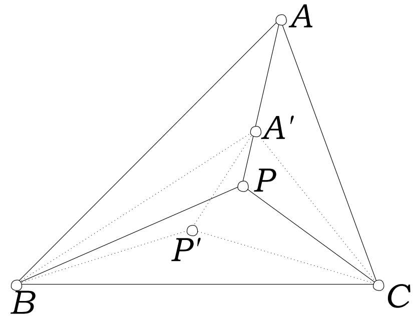

Figura 10.

Por un razonamiento similar, P' tiene que estar en la línea BP y en la CP. Es decir, $P' = P$. Tomemos entonces A', B' y C' de tal manera que formen un triángulo equilátero, claramente P coincide con el centroide, cuyas líneas a los vértices del triángulo forman ángulos de $120°$ tomadas por pares.

Por cierto que la generalización del problema es un reto actual cuando se trata de elegir, por ejemplo, la mejor situación de una central eléctrica que abastezca tres o más ciudades, con el menor gasto de material posible. Lo cual deja abiertas algunas preguntas relacionadas con el Punto de Fermat:

1. ¿Qué pasaría si el triángulo tuviera un ángulo de $120°$?
2. ¿Y si tuviera un ángulo mayor a $120°$?
3. Si trazamos triángulos equiláteros sobre los lados, como en la figura 5, pero en vez de hacerlo hacia el exterior del triángulo ABC lo hiciéramos hacia el interior de éste ¿las líneas AA', BB' y CC' también serían concurrentes?

$\square$

Referencias

[1] Howard Eves, Estudio de las Geometrías. UTEHA.

[2] Richard Courant y Herbert Robbins, What is Mathematics? Oxford University Press.