# COMENTARIOS SOBRE SUCESIONES LINEALMENTE RECURRENTES

**Julio E. Damy Ríos***

## I. Introducción

Las sucesiones linealmente recurrentes tienen propiedades generales muy interesantes que en este artículo trataremos de presentar; quizás algunas de ellas sean muy obvias o muy conocidas, nuestra idea, sin embargo, es familiarizar al lector con estas sucesiones.

Se dice que una sucesión $\left\{R_i\right\}_0^\infty$ es linealmente recurrente de orden $n$, cuando cualquier elemento $R_i$ $(i \geqslant n)$ de ella es igual a una combinación lineal de los $n$ elementos precedentes; es decir:

$$R_{k+n} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{k+j} \qquad (k \geqslant 0)\,(a_0 \neq 0) \tag{1}$$

Los coeficientes $\left\{a_j\right\}_0^{n-1}$ definen una familia de sucesiones recurrentes y les llamaremos los coeficientes de la familia. Cada una de las sucesiones de la familia quedan definidas si conocemos los $n$ primeros elementos $(R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$ de la sucesión, a los cuales les llamaremos los valores iniciales de la sucesión o simplemente $\left\{y_k\right\}_0^{n-1}$.

$$y_k = R_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

EJEMPLOS: 1) Familia de sucesiones recurrentes con $n = 3$;

$$a_0 = -2; a_1 = 1; a_2 = 2.$$

Consideremos la sucesión con $\left\{y_k\right\}_0^2$ igual a los siguientes valores $y_0 = -1$; $y_1 = 2$; $y_2 = +1$ los primeros términos de la sucesión serán:

* Profesor de Análisis Estructural I, y II en la Facultad de Ingeniería, UNAM.

$$\{R_k\}_0^{\infty} = -1, 2, 1, 6, 9, 22, 41, 86, 169, \ldots$$

En adelante nos referiremos a esta sucesión, como la "sucesión 1'.

2) La sucesión de Fibonacci[1] $\{F_k\}_0^{\infty}$ es una sucesión recurrente de orden 2:

$$a_0 = 1; \qquad a_1 = 1$$

$$y_0 = 0; \qquad y_1 = 1$$

Algunas de las propiedades de la sucesión de Fibonacci, como veremos más adelante, son válidas para cualquier valor de $\{y_k\}_0^1$

## 2. ECUACION CARACTERISTICA ASOCIADA

Se define a la ecuación

$$Z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j Z^j = 0 \qquad (2)$$

Como la ecuación característica asociada a la familia de sucesiones linealmente recurrentes de coeficientes $\{a_j\}_0^{n-1}$. A las $n$ raíces de (2) $(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n)$ se les llama las raíces características de la sucesión. Evidentemente que ninguna de la raíces características es nula, porque: $a_0 \neq 0$. Al polinomio $\varphi(Z) = Z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j Z^j$ se le llama el polinomio característico de la familia de coeficientes $\{a_j\}$ obsérvese que: $\varphi(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2) \ldots (Z - Z_n)$ (2)

EJEMPLOS: 1) "Sucesión 1"

Ecuación característica: $Z^3 + 2 - Z - 2Z^2 = 0$

Raíces características: $Z_1 = -1; Z_2 = 1; Z_3 = 2$

2) Sucesión de Fibonacci

Raíces características $Z_1 = (1 - \sqrt{5})/2; Z_2 = (1 + \sqrt{5})/2$

1. Guillermo Espinosa V. *La sucesión de Fibonacci*. Revista Matemática, Noviembre de 1969.

A continuación veremos algunas propiedades de las raíces características.

**Teorema 1.** *La sucesión geométrica* $_1^n\left\{ {}_jG_k \right\}_0^\infty$

$${}_jG_k = Z_j^k \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{3}$$

donde $Z_j$ es una de las raíces características de la familia de sucesiones recurrentes de coeficientes $\left\{ a_j \right\}_0^{n-1}$, es también una sucesión recurrente de la misma familia.

*Demostración:*

Por la ecuación (2)

$$Z_j^n = \sum_{l=0}^{n-1} a_l\, Z_j^l$$

multiplicando por $Z_j^k$

$$Z_j^{k+n} = \sum_{l=0}^{n-1} a_l\, Z_j^{k+l} \tag{4}$$

o sea que

$${}_jG_{k+n} = \sum_{l=0}^{n-1} a_l\; {}_jG_{k+l} \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

**Teorema 2.** *Todo elemento de la sucesión recurrente* $\left\{ R_k \right\}_0^\infty$ *de orden n, si las n raíces características son diferentes, es igual a una combinación lineal de las potencias k de las n raíces características*

$$R_k = \sum_{j=1}^{n} b_j\, Z_j^k \qquad (K \geqslant 0) \tag{5}$$

*Demostración:*

a) Para $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$, se pueden plantear $n$ ecuaciones lineales en $\left\{ b_j \right\}_1^n$ de la forma

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} b_j\, Z_j^k \qquad [0 \leqslant k \leqslant (n-1)] \tag{6}$$

El determinante $V(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ del sistema de ecuaciones (6) es de la forma

$$V(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & \ldots & Z_n \\ Z_1^2 & Z_2^2 & Z_3^2 & \ldots & Z_n^2 \\ - & - & - & - & - \\ Z_1^{n-1} & Z_2^{n-1} & Z_3^{n-1} & \ldots & Z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Se demuestra[2] que $V(Z_1, Z_2 \ldots, Z_n)$ es igual a:

$$V(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = (Z_n - Z_1)(Z_n - Z_2) \ldots (Z_n - Z_{n-1})(Z_{n-1} - Z_1)$$
$$(Z_{n-1} - Z_2) \ \ldots \ (Z_3 - Z_1)(Z_3 - Z_2)(Z_2 - Z_1)$$

o bien

$V(Z_1, Z_2 \ldots Z_n) = \pi_{j=2}^{n} (\pi_{j=1}^{j-1} (Z_j - Z_k))$ por lo que $V(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)$ es distinto de cero si las $n$ raíces $\left\{ Z_j \right\}_1^n$, son diferentes: Por consiguiente, los coeficientes $\left\{ b_j \right\}_1^n$ se determinan a partir del sistema de ecuaciones (6).

b) $k \geqslant n$

Sea $\left\{ S_k \right\}_0^\infty$ una sucesión definida como:

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} b_j Z_j^k$$

o bien, si $k' = k - n$

$$S_{k'+n} = \sum_{j=1}^{n} b_j Z_j^{k'+n} \qquad (k' \geqslant 0) \tag{7}$$

Por el Teorema 1 [ecuación (4)]

$$S_{k'+n} = \sum_{j=1}^{n} b_j \left( \sum_{l=0}^{n-1} a_l Z_j^{k'+l} \right).$$

2. H. S. Hall, S. R. Knight. Higher Algebra. Macmillan, 1950.

o bien

$$S_{k'+n} = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \left( \sum_{j=1}^{n-1} b_j Z_j^{k'+l} \right)$$

pero por (7)

$$\sum_{j=1}^{n} b_j Z_j^{k'+l} = S_{k'+l}$$

por consiguiente

$S_{k'+n} = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \, S_{k'+l}$ $(k' \geqslant 0)$. Por lo tanto, la sucesión $\left\{ S_k \right\}_0^{\infty}$ es de la familia de $\left\{ R_k \right\}_0^{\infty}$ (ver ecuación (1)) y tiene los mismos valores iniciales (inciso (a) de esta demostración), por consiguiente:

$$\left\{ S_k \right\}_0^{\infty} = \left\{ R_k \right\}_0^{\infty}$$

EJEMPLOS: 1) "Sucesión 1".

Se determina $\left\{ b_j \right\}_1^{n}$ (ecuaciones (6)) y se obtiene

$b_1 = -7/6; b_2 = -1/2; b_3 = 2/3$

por consiguiente

$$R_k = -7/6\,(-1)^k - 1/2\,(1)^k + 2/3\,(2)^k$$

2) Sucesión de Fibonacci

$b_1 = -1/\sqrt{5}\,; b_2 = +1/\sqrt{5}$

$$F_k = \frac{-Z_1^k + Z_2^k}{\sqrt{5}}$$

3) La sucesión de Fibonacci se puede generalizar $\left\{ F'_k \right\}$ usando cualquier valor de $\left\{ y \right\} = \left\{ \begin{matrix} y_0 \\ y_1 \end{matrix} \right\}$, en ese caso

$$b_1 = \frac{(\sqrt{5} + 1)y_0 - 2y}{2\sqrt{5}} \qquad b_2 = \frac{(\sqrt{5} - 1)y_0 + 2y_1}{2\sqrt{5}}$$

La ecuación (5) es general para cualquier valor entero de $k$, sea positivo o negativo, entendiéndose por $R_{-1}$ el valor que se obtiene al despejarlo en la ecuación (1) para $k = -1$.

$$R_{-1+n} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j R_{-1+j}$$

$$\therefore R_{-1} = \frac{1}{a_0} [R_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{j-1}]$$

en forma similar se obtiene $R_{-2}, R_{-3}$, etc.

$$R_{-k} = \frac{1}{a_0} [R_{n-k} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j R_{j-k}] \tag{8}$$

Obsérvese que los valores de la sucesión $\left\{ R_k \right\}$ para $k < 0$ la generalizan y se puede hablar de $\left\{ R \right\}_{-\infty}^{+\infty}$

A la relación (8) se le llama la recurrencia inversa de $\left\{ R_k \right\}_0^{\infty}$, porque permite obtener un elemento en función de los $n$ siguientes.

EJEMPLOS: 1) Sucesión 1"

$$R_{-1} = +1$$

$$R_{-2} = -3/2 \text{ etc.}$$

$\left\{ R_k \right\}_{-\infty}^{+\infty} = \ldots, -3/2, 1, -1, 2, 1, 6, 9, 22, \ldots$

$k = -1; k = 0; k=1; \ldots$

2) Sucesión de Fibonacci

$$F_{-1} = 1$$

$$F_{-2} = -1$$

$$F_{-3} = +2 \quad \text{etc.}$$

$\left\{ F_k \right\}_{-\infty}^{+\infty} = \ldots, +5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ $\quad k = -1; k = 0; k = 1 \ldots$

**Corolario 1**

*Si:* $|Z_n| > |Z_{n-1}| \geqslant |Z_{n-2}| \geqslant \ldots \geqslant |Z_1|$
*y además* $b_n \neq 0$ *se tiene que:*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{R_{k+1}}{R_k} = Z_n$$

*Demostración:* Por el teorema 2

$$R_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j Z_j^{k+1}$$

$$R_k = \sum_{j=1}^{n} b_j Z_j^k$$

Diviendo los dos miembros y dividiendo numerador y denominador por $Z_n^k$.

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j \left(\frac{Z_j}{Z_n}\right)^n Z_j}{\sum_{j=1}^{n} b \left(\frac{Z_j}{Z_n}\right)^n}$$

por hipótesis $\lim_{k \to \infty} \left(\frac{Z_j}{Z_n}\right)^k = 0 \qquad (j \neq n)$

por lo tanto:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{R_{k+1}}{R_k} = \frac{b_n Z_n}{b_n} = Z_n$$

EJEMPLOS: 1) "Sucesión 1"

$$\lim_{k \to \infty} \frac{R_{k+1}}{R_k} = 2$$

2) Sucesión de Fibonacci.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = Z_2 = (1 + \sqrt{5})/2$$

3) Sucesión generalizada de Fibonacci

$$\lim_{k \to \infty} \frac{F'_{k+1}}{F'_k} = (1 + \sqrt{5})/2$$

**Corolario 2.**

$$\textit{Si: } \frac{Z_n}{Z_{n-1}} = -1; b_n \neq 0; \; |Z_n| > |Z_{n-2}| \geqslant \ldots \geqslant |Z_1|$$

*Se tiene que:*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{R_{k+2}}{R_k} = Z_n^2$$

La demostración de este corolario es similar a la del anterior. Este corolario es válido aún para raíces complejas.

**Teorema 3.**

*La sucesión* $\left\{ S_k \right\}_{-\infty}^{+\infty}$ *definida como:*

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} b_j Z_j^k \tag{9}$$

*donde:* $Z_j \neq 0$ *para toda* $j$

$$Z_j \neq Z_k, \; si \; j \neq k$$

*es una sucesión linealmente recurrente de orden* $n$ *cuyos coeficientes* $\left\{ -a_j \right\}_0^{n-1}$ son los coeficientes de $Z^j$ *en el desarrollo del polinomio*

$$\Psi(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2) \ldots (Z - Z_n) \tag{10}$$

$$(-a_j = \textit{coeficiente de } Z^j)$$

*Demostración*.. El polinomio característico de la familia de coeficiente, $\left\{ a_j \right\}_0^{n-1}$ es:

$$Z^n - \sum_{a}^{n-1} a_j Z^j = 0$$

De la definición de las $a_j$:

$$Z^n - \sum_{0}^{n-1} a_j Z^j = (Z - Z_1) \ldots (Z - Z_n) = 0$$

donde $a_0 \neq 0$ ya que $Z_j \neq 0, i = 1, \ldots, n$. Además, por hipótesis las raíces

$Z_i$ son distintas, por lo tanto, si tomamos $S_0, \ldots, S_n$, como valores iniciales, por el Teorema 2 sabemos que existen $C_1, \ldots, C_n$, *únicas* tales que la sucesión $\left\{R_k\right\}$ de la familia con coeficiente, $a_j$ puede escribirse

$$R_k = C_1 Z_1^k +, \ldots, + n C_n Z_n^k$$

por lo tanto $b_i = C_i \qquad i = 1, \ldots n$, y

$$R_k = S_k$$

Concluimos que $S_k$ *es una sucesión lineal recurrente de orden n* (esta demostración muestra el teorema 3 como consecuencia material del teorema 2.)

**Corolario 3** *Dada una familia de sucesiones recurrentes de orden n, se puede generar una familia de orden $n + r$ $(r > 0)$ que contenga a la primera familia.*

*Demostración:*

Sea $\varphi(Z) = Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + a_1 Z + a_0$

$$\varphi(Z)(Z - \alpha_1) = (Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} +, \ldots + a_1 Z + a_0)(Z - \alpha_1) =$$

$$= Z^{n+1} + (a_{n-1} - \alpha_1) Z^n + (a_{n-2} - \alpha_1 a_{n-1}) Z^{n-1} + \ldots + (a_0 - \alpha_1 a_1) Z - a_0 \alpha_1$$

Para obtener la fórmula de recurrencia

$$Z^{n+1} = (\alpha_1 - a_{n-1}) Z^n + (\alpha_1 a_{n-1} - a_{n-2}) Z^{n-1} + \ldots + (\alpha_1 a_1 - a_1) Z + a_0 \alpha_1 = \alpha_1 (Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \ldots + a_1 Z + a_0) - (a_{n-1} Z^n + a_{n-2} Z^{n-1} + \ldots + a_0 Z)$$

$$R_{k+1} = \alpha_1 (R_k + \sum_{i=1}^{n} a_{n-1} R_{k-i}) - \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} R_{k+1-i} \qquad (\beta)$$

Si $\left\{S_k\right\}$ pertenece a la familia de coeficientes $\left\{a_i\right\}_0^{n-1}$

$$S_k = -\sum_{1}^{n} a_{n-i} S_{k-i} \quad \text{y}$$

$$S_{k+1} = -\sum_{1}^{n} a_n f \updownarrow_{k+1-i},$$

al substituir en($\beta$,) vemos que $\left\{ S_k \right\}_0^{\infty}$ satisface la relación de recurrencia $\left\{ S_k \right\}_0^{\infty}$ pertenece a la familia así generada. Análogamente podemos demostrar que se puede agregar tantas $\alpha_s$ como se quiera.

*Nótese* que para obtenerlo como corolario del teorema 3, hay que pedir que las raíces del polinomio característico de la familia original sean distintas, y que $\alpha_i \neq \alpha_j$ $i \neq j$

Los coeficientes de la nueva familia de sucesiones recurrentes $\left\{ -A_j \right\}_0^{n+r-1}$ son los coeficientes de $Z^j$ en el desarrollo del polinomio $\theta(Z)$:

$$\theta(Z) = \varphi(Z) \cdot (Z - \alpha_1)(Z - \alpha_2) \dots (Z - \alpha_r) \qquad (n > 0)$$

donde $\alpha_i \neq 0$ (para toda $i$) son parámetros arbitrarios, y $\varphi(Z)$ es el polinomio característico de la primera familia. $\theta(Z)$ será el polinomio característico de la nueva familia.

EJEMPLOS: 1) Con la familia de la "Sucesión 1" se va a generar una familia de orden $3+r$ $(r=2)$

$$\theta(Z) = (Z^3 - 2Z^2 - Z + 2)(Z + \alpha_1)(Z - \alpha_2)$$

$$\theta(Z) = Z^5 - (2 + \alpha_1 + \alpha_2) Z^4 - (1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) Z^3 - (2\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2) Z^2 - (\alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2) Z + 2\alpha_1 \alpha_2$$

por consiguiente

$$A_0 = -2\alpha_1 \alpha_2; A_1 = \alpha_1 \alpha_2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2);$$
$$A_2 = 2\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2$$
$$A_3 = 1 - 2(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 \alpha_2$$
$$A_4 = 2 + \alpha_1 + \alpha_2$$

Si: $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 3$; se obtiene

$$A_0 = -6; A_1 = 11; A_2 = 0; A_3 = -10; A_4 = 6$$

## 3. Sucesiones linealmente recurrentes, cuyo orden ($n$) es posible reducir

Existen sucesiones recurrentes de orden $n$, que al aplicarles el teorema 2, se obtienen algunos valores nulos de los coeficientes $\left\{ b_j \right\}_1^n$ por lo tanto las raíces $Z_j$, cuyas potencias están multiplicadas por esos coeficientes, desaparecen y se tiene una sucesión de orden $n - r$, siendo $r$ el número de coeficientes $b_j$ que son nulos.

En efecto, sean $\left\{ Z_j \right\}_1^{n-r}$ las $(n - r)$ raíces que no desaparecen; por lo tanto, por el teorema 2:

$$R_k = \sum_{j=1}^{n-r} b_j Z_j^k \qquad (b_j \neq 0)$$

pero por el Teorema 3 esta sucesión será linealmente recurrente de orden $(n - r)$:

$$R_k = \sum_{j=0}^{(n-r-1)} a'_j R_{k+j}$$

donde los coeficientes $-a'_j \; {}_0^{n-r-1}$ son los coeficientes de $Z^j$ en el desarrollo del polinomio $\Psi(Z)$

$$\Psi(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2) \ldots (Z - Z_{n-r}) \qquad (12)$$

combinando (12) con (2′)

$$\Psi(Z) = \frac{\varphi(Z)}{(Z - Z_{n-r+1})(Z - Z_{n-r+2}) \ldots (Z - Z_n)}$$

donde $Z_{n-r+k}$ $\quad (r \geqslant k \geqslant 1)$ son las $r$ raíces

por lo tanto:

$$a'_0 = -2; \quad a'_1 = +3$$

o sea que:

$$T_{k\underset{0}{+}2} = -2\,T_k + 3\,T_{k+1}$$

$\left\{T_k\right\}_0^{\infty} = 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$; evidentemente que los elementos de la sucesión $\left\{T_k\right\}$, por pertenecer ésta a la familia de la "Sucesión 1" ($a_0 = -2; a_1 = 1; a_2 = 2$), se pueden calcular así:

$$T_{k+3} = -2\,T_k + T_{k+1} + 2\,T_{k+2}$$

2) Consideremos la sucesión $U_k \,{}_0^{\infty}$ de la familia de Fibonacci con

$$y_0 = \beta; y_1 = \beta Z_1 = \beta(1 - \sqrt{5})/2 \quad (\beta \neq 0) \text{ se obtienen:}$$

$$b_1 = 1; b_2 = 0; \qquad U_k = \beta Z_1{}^k$$

$$\Psi(Z) = \frac{(Z^2 - 1 - Z)}{Z - (1 + \sqrt{5})/2)} = Z - (1 - \sqrt{5})/2$$

por lo tanto:

$$a'_0 = (1 - \sqrt{5})/2 = Z_1$$

o sea que:

$$U_{k+1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\; U_k = Z_1\, U_k$$

$$\left\{U_k\right\}_0^{\infty} = \beta, \beta Z_1, \beta Z_1{}^2, \beta Z_1{}^3, \ldots$$
$$= \beta, \beta\,\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \beta\,\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \beta(2 - \sqrt{5}), \ldots$$

es interesante hacer notar que si los términos de $\left\{U_k\right\}_0^{\infty}$ se calculan con un número finito de decimales (por ejemplo, con una computadora), como si fuera ésta una sucesión de la familia de Fibonacci,

$$U_{k+2} = U_k + U_{k+1}$$

los errores de redondeo para valores grandes de $k$, se acumulan tanto, que se pierde toda precisión en el cálculo.

Es evidente que:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{U_{k+1}}{u_k} = Z_1 = (1 - \sqrt{5})/2$$

Esta sucesión es la única de la familia de Fibonacci, cuyo límite del cociente de dos elementos consecutivos no es igual a $(1 + \sqrt{5})/2$.

*4. Obtención directa de los Coeficientes* $\left\{ b_j \right\}_1^n$

A continuación trataremos un método bastante simple para calcular los valores de $b_j \; {}_1^n$, necesarios para aplicar el teorema 2.

**Teorema 4.**

*Usando un procedimiento similar al de la interpolación de Lagrange, se propone la siguiente expresión para* $\left\{ R_k \right\}_{-\infty}^{+\infty}$ (teorema 2)

$$R_k = \frac{1}{V(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)} \begin{pmatrix} Z_1^k \, Z_1 \ldots Z_1^{n-1} \\ Z_2^k \, Z_2 \ldots Z_2^{n-1} \\ \\ Z_n^k \, Z_n \ldots Z_n^{n-1} \end{pmatrix} y_0 + \begin{pmatrix} 1 \, Z_1^k \, Z_1^2 \ldots Z_1^{n-1} \\ 1 \, Z_2^k \, Z_2^2 \ldots Z_2^{n-1} \\ \\ 1 \, Z_n^k \, Z_n^2 \ldots Z_n^{n-1} \end{pmatrix} y_1$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \, Z_1 \, Z_1^k \, Z_1^2 \ldots Z_1^{n-1} \\ 1 \, Z_2 \, Z_2^k \, Z_2^2 \ldots Z_2^{n-1} \\ \\ 1 \, Z_n \, Z_n^k \, Z_n^2 \ldots Z_n^{n-1} \end{pmatrix} y_2 + \ldots + \begin{pmatrix} 1 \, Z_1 \, Z_1^2 \ldots Z_1^{n-2} \, Z_1^k \\ 1 \, Z_2 \, Z_2^2 \ldots Z_2^{n-2} \, Z_2^k \\ \\ 1 \, Z_n \, Z_n^2 \ldots Z_n^{n-2} \, Z_n^k \end{pmatrix} y_{n-1} \qquad (13)$$

$$\text{donde } V(Z_1, Z_2, \ldots Z_n) = \begin{pmatrix} 1 \, Z_1 \, Z_1^2 \, Z_1^3 \ldots Z_1^{n-1} \\ 1 \, Z_2 \, Z_2^2 \, Z_2^3 \ldots Z_2^{n-1} \\ \\ 1 \, Z_n \, Z_n^2 \, Z_n^3 \ldots Z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

La demostración es evidente, puesto que $R_k$ es una combinación lineal de los potencias $K$ de $\left\{ Z_j \right\}_1^n$, y para $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$, se obtiene: $R_k = y_k$.

La ecuación (13) se puede simplificar, utilizando algunas propiedades de l s determinantes que figuran en ella; a continuación enunciaremos estas propiedades. Usaremos la siguiente notación:

$$Z^k = \begin{bmatrix} Z_1^k \\ Z_2^k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n^k \end{bmatrix}$$

Las propiedades son las siguientes:

$$(Z^1 Z^2 Z^3 \ldots Z^n) = +a_{n-1} V(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)(-1)^n$$
$$(Z^0 Z^2 Z^3 \ldots Z^n) = -a_{n-2} V(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)(-1)^n$$
$$(Z^0 Z^1 Z^3 \ldots Z^n) = +a_{n-3} V(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)(-1)^n$$

y en general

$$(Z^0 Z^1 \ldots Z^{k-1} Z^{k+1} \ldots Z^n) = (-1)^k a_{n-k-1} V(Z_1, Z_2, \ldots Z_n)(-1)^n$$
$$(n-1) \geqslant k \geqslant 1$$

donde $\left\{a_j\right\}_0^{n-1}$ son los coeficientes de $Z^j$ en el desarrollo de: $(Z - Z_1)(Z - Z_2) \ldots (Z - Z_n)$

Estas propiedades se demuestran desarrollando $V(Z_1, Z_2, \ldots Z_n, Z_{n+1})$ ($Z_{n+1}$ arbitrario), por menores de la última columna (potencias $Z_{n+1}$).

Desarollando la ecuación (13) y utlizando las propiedades anteriores se obtiene:

$$\frac{R_k}{(-1)^{n-1}} = \frac{{Z_1}^k}{(Z_n - Z_1)(Z_{n-1} - Z_1) \ldots (Z_2 - Z_1)} [\,{}_1C_{n-2} Y_0 + {}_1C_{n-3} Y_1 + \cdots + {}_1C_0 Y_{n-2} + Y_{n-1}]$$
$$+ \frac{{Z_2}^k}{(Z_n - Z_2)(Z_{n-1} - Z) \ldots (Z_3 - Z_2)(Z_1 - Z_2)} [\,{}_2C_{n-2} Y_0 + {}_2C_{n-3} Y_1 + \ldots + {}_2C_0 Y_{n-2} + Y_{n-1}]$$
$$+ \ldots$$
$$+ \frac{{Z_n}^k}{(Z_{n-1} - Z_n)(Z_{n-2} - Z_n) \ldots (Z_1 - Z_n)} [\,{}_nC_{n-2} Y_0 + {}_nC_{n-3} Y_1 + \ldots + {}_nC_0 Y_{n-2} + Y_{n-1}] \quad (14)$$

donde ${}_1^n\left\{{}_kC_j\right\}_0^{n-2}$ son los coeficientes de $Z^j$ en el desarrollo de: $\dfrac{\varphi(Z)}{(Z - Z_k)}$

obsérvese que ${}_1^n\left\{{}_k C_j\right\}_0^{n-2}$ son los coeficientes de la sucesión reducida, cuando $b_k = 0$, lo cual es evidente ya que en ese caso $Y_{n-1}$ debe ser igual a:

$$Y_{n-1} = -({}_kC_{n-2}\, Y_0 + {}_kC_{n-3}\, Y_1 + \ldots + {}_kC_0\, Y_{n-2})$$

EJEMPLO 1) $(n=3)$

Familia de la "Sucesión 1"

$$Z_1 = -1; Z_2 = 1; Z_3 = 2$$

$$\varphi(Z) = Z^3 - 2Z^2 - Z - 2$$

$${}_1C_1 = 2; \quad {}_1C_0 = -3$$
$${}_2C_1 = -2; {}_2C_0 = -1$$
$${}_3C_1 = -1; {}_3C_0 = 0; \text{ por lo tanto:}$$

$$\frac{R_k}{(-1)^2} = \frac{(-1)^k}{(1+1)(2+1)}[2Y_0 - 3Y_1 + Y_2] +$$
$$+ \frac{(1)^k}{(-1-1)(2-1)}[-2Y_0 - Y_1 + Y_2] +$$
$$+ \frac{(2)^k}{(-1-2)(1-2)}[-Y_0 + Y_2]$$

Si: $Y_0 = 1; Y_1 = 3; Y_2 = 7$ (ejemplo 1 del inciso 3).

$b_1 = 2Y_0 - 3Y_1 + Y_2 = 2 - 9 + 7 = 0$ este resultado es obvio puesto que el orden de la sucesión se puede reducir a $n = 2$ con $a_0' = -2;\ a_1' = +3$

**5. Sucesión básica**

Es evidente [ecuación (14)] que si:

$Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{n-2} = 0; Y_{n-1} = 1$, el orden de la sucesión no se puede reducir, puesto que $b_j \neq 0$ para toda $j$. A esta sucesión le llamaremos la sucesión básica de la familia de sucesiones $\left\{R_k\right\}$. La sucesión de Fibonacci es la sucesión básica de su familia.

Las sucesiones básicas tienen algunas propiedades interesantes, que se pueden aplicar a todas las sucesiones de la familia. Las demostraciones las omitiremos para abreviar la longitud de este trabajo.

A la sucesión básica de una familia le llamaremos $\left\{ B_k \right\}_{-\infty}^{+\infty}$

**Teorema 5**

*Sea* $\left\{ {}_rP_k \right\}$ *una sucesión recurrente de la familia de* $\left\{ B_k \right\}$ *tal que:*

$Y_k = 0; K \neq r \;(0 \leqslant r \leqslant n-1)\;(K = 1, 2, \ldots r-1, r+1, \ldots, n)$

$Y_r = 1$

*El elemento* ${}_rP_k$ *es función de r elementos sucesivos de* $\left\{ B_k \right\}_{-\infty}^{+\infty}$

$${}_rP_k = \sum_{j=0}^{r} a_j\, B_{k-r+j-1}$$

*evidentemente que:* ${}_nP_k \left\{ \right\}_{-\infty}^{+\infty} = \left\{ B_k \right\}_{-\infty}^{+\infty}$

La demostración de este teorema la omitiremos.

**Teorema 6**

*Sea* $\left\{ R_k \right\}_{-\infty}^{+\infty}$ *una sucesión cualquiera de una familia de sucesiones linealmente recurrentes de orden n; el elemento* $R_k$ *satisface la relación siguiente:*

$$R_k = \sum_{l=0}^{n-1} Y_l \quad \left( \sum_{j=1}^{l} a_j\, B_{k-l+j-1} \right) \tag{15}$$

*Demostración.*

Es evidente que una sucesión cualquiera $\left\{ R_k \right\}_{-\infty}^{+\infty}$ de una familia es una combinación lineal de todas las sucesiones

$\left\{ {}_rP_k \right\}_{-\infty}^{+\infty}\Big|_0^{n-1}$, 0 sea que:

$$R_k = \sum_{m=1}^{n} Y_l\; {}_lP_k$$

combinando esta expresión con la del teorema 5, se obtiene (15).

La ecuación (15) se puede transformar a la siguiente expresión:

$$R_k = \sum_{m=1}^{n} B_{k-m} \left( \sum_{j=0}^{n-m} aj\, Y_{m+j-1} \right) \tag{16}$$

No olvidemos que $Y_j = R_j$ ($j = 0, \ 1, \ldots, n-1$)

Ejemplos:

1) La sucesión básica de la familia de la "Sucesión 1" ($n=3$) es la siguiente:

$$\left\{B_k\right\}_{-\infty}^{\infty} = \ldots -\frac{5}{16}, -\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1, 2, 5, 10, 21, 42, \ldots$$

$$k=-1 \quad k=0 \quad k=1$$

Aplicando (16) a la "Sucesión 1"

$$R_k = B_{k-1}\,(a_0\,Y_0 + a_1\,Y_1 + a_2\,Y_2) + B_{k-2}\,(a_0\,Y_1 + a_1\,Y_2) + \\ + B_{k-3}\,(a_0\,Y_2)$$

$$R_k = 6B_{k-1} - 3B_{k-2} - 2B_{k-3}$$

si k$=6$;

$$R_6 = 6\,(10) - 3\,(5) - 2\,(2) = 41$$

si $k = -1$

$$R_{-1} = 6\,(-\tfrac{1}{4}) - 3\,(-\tfrac{5}{8}) - 2\,(-\tfrac{5}{16}) = 1$$

2) La sucesión de Fibonacci es básica, por lo tanto, cualquier sucesión $F'_k\,{}_{-\infty}^{\infty}$ de la familia se puede expresar:

$$F'_k = F_{k-1}\,(Y_0 + Y_1) + F_{k-2}\,(Y_1)$$

o bien:

$$F'_k = Y_0\,F_{k-1} + Y_1\,F_k \tag{17}$$

Es interesante hacer notar que el teorema 6 (ecuación (16), se puede expresar en la forma siguiente:

$$R_{k+l} = \sum_{m=1}^{n} B_{k-m} \sum_{j=0}^{n-m} a_j\,R_{m+j-1+l} \qquad (l = \text{cualquier número entero}) \tag{18}$$

porque simplemente hemos considerado que:

$$Y_j = R_{j+l} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

o sea que comenzamos la serie $l$ lugares a la derecha.

Ejemplos:

1) "Sucesión 1"

Sea: $l = 3$

$$R_{k+3} = B_{k-1}\,(a_0 R_3 + a_1 R_4 + a_2 R_5) +$$
$$+ B_{k-2}\,(a_0 R_4 + a_1 R_5) + B_{k-3}\,(a_0 R_5)$$

o bien:

$$R_{k+3} = 41 B_{k-1} + 4 B_{k-2} - 44 B_{k-3}$$

si: $k = 5$

$$R_8 = 41\,(5) + 4\,(2) - 44\,(1) = 169$$

si: $k = -1$

$$k_2 = 41\,(-\tfrac{1}{4}) + 4\,(-\tfrac{5}{8}) - 44\,(-\tfrac{5}{16}) = 6$$

2) Sucesión de Fibonacci. En la ecuación (17) hacemos:

$$Y_0 = F_l \quad , \qquad Y_1 = 1\,F_{l+1}$$

$$F_{l+k} = F_l F_{k-1} + F_{l+1} F_k = F_k F_{l-1} + F_{k+1} F_l \tag{19}$$

esta propiedad de la sucesión de Fibonacci es interesante y de ella se puede sacar una serie de propiedades de esa sucesión. [3]

3) Sucesión básica de cualquier familia, sea:

$$Y_j = B_{j+l} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

(3) G. Espinosa V. Op. Cit.

$$B_{k+l} = \sum_{m=1}^{n} B_{k-m} \sum_{j=0}^{n-m} a_j B_{m+j-1+l}$$

si los coeficientes $\left\{ a_j \right\}_0^{n-1}$ de la familia son todos iguales a la unidac (por ejemplo: Sucesión de Fibonacci)

$$B_{k+l} = \sum_{m=1}^{n} B_{k-m} \sum_{j=0}^{n-m} B_{m+j-1+l}$$

si $n = 3$

$$B_{k+l} = B_{k-1} (B_l + B_{l+1} + B_{l+2}) +$$

$$+ B_{k-2} (B_{l+1} + B_{l+2}) + B_{k-3} (B_{l+2})$$

o bien:

$$B_{k+l} = B_l B_{k-1} + B_{l+1} (B_{k-1} + B_{k-2}) + B_{l+2} B_k$$
$$= B_k B_{l-1} + B_{k+1} (B_{l-1} + B_{l-2}) + B_{k+2} B_l$$

**6. Concluciones:**

Hemos tratado de presentar algunas de las propiedades de las sucesiones linealmente recurrentes; hemos omitido muchos aspectos de ellas; por ejemplo, si $r$ raíces características son iguales, se demuestra que el teorema 2 se modifica. Cualquier elemento $R_k$ de la sucesión es una combinación lineal de las potencias $k$ de las $(n - r)$ raíces características diferentes, más un polinomio en $k$ de grado $(r - 1)$ multiplicado por la potencia $k$ de la raíz múltiple.

Es muy fácil ver la gran relación que guardan estas sucesiones con las ecuaciones diferenciales lineales; se demuestra que para cualquier solución de estas ecuaciones, los valores de la variable dependiente (y) correspondientes a valores de la variable independiente (t), espaciados uniformemente, cumplen con una recurrencia lineal.

Ejemplo 1) Sea la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 t = 0$$

la solución general es:

$$Y = C_1 e^{+\omega i t} + C_2^{-\omega i t}$$

si: $C_1 = C_2 = A$

$$Y = A\ (e^{\omega it} + e^{-\omega it})$$

o bien:

$$Y = A \cos \omega t$$

si: $t = k\Delta t + t_0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$y = B\ e^{(\omega i\Delta t)k} + C e^{(-\omega i\Delta t)k} \quad (B = A\ e^{i\omega t_o}\ 0\ ; C = A\ e^{-i\omega t_o})$$

la ecuación característica de la recurrencia será:

$$(Z - e^{\omega i\Delta t})\ (Z - e^{-\omega i\Delta t}) = 0$$

$$Z^2 + 1 - (2 \operatorname{Cos} \omega\Delta t)Z = 0$$

por consiguiente: $a_0 = -1; a_1 = 2 \operatorname{Cos} \omega\Delta t$ la recurrencia será:

$$y_k = -y_{k-2} + (2 \operatorname{Cos} \omega\Delta t)\ y_{k-1}$$

siendo:

$$y_k = y_{\ t = k\Delta t + t_o} = A\ Cos\ [\omega(k\Delta t + t_0)]$$

Una propiedad interesante de todas las sucesiones básicas de orden 2 es que $B_{km}$ es multiplo de $B_k$ y de $B_m$, en efecto, utilizando la ecuación (18)

$$B_{k+l} = a_0\ B_l\, B_{k-1} + B_{l+1}\ B_k \tag{18}$$

si $l = k$

$B_{2k} = B_k\ (a_0\ B_{k-1} + B_{k+1})$ múltiplo de $B_k$, por inducción se puede generalizar a $B_{mk}$

Ejemplo: Sea: $a_0 = 1; a_1 = 2; B_0 = 0; B_1 = 1$

$$B_{0}^{+\infty} = 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, \ldots$$

si $k = 3; B_3 = 5$

$\therefore$

$B_{3m} = 5\,N \quad (N = \text{entero})$

si $k = 4; B_4 = 12$

por lo tanto:

$B_{4m} = 12\,M \quad (M = \text{entero})$

Y en general todas las sucesiones básicas de orden 2, se cumplen todos los teoremas de la sucesión de Fibonacci[4], basados en la ecuación (18) (o la 18' con $a_0 = 1$, véase la ecuación 19), por ejemplo:

$\text{m c d}\,(B_k, B_m) = B_{mcd\,(k,\,m)}$

$(\text{m c d}\,(B_8, B_{12}) = B_4)$

(4) G. Espinosa V. Op. Cit.