Miscelánea Matemática **31** (2000) 1–27 SMM

La Teoría de Conjuntos en el Siglo XX

José Alfredo Amor Montaño
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias UNAM
Circuito Exterior, C. U.
04510, México D.F.
MEXICO

jaam@hp.fciencias.unam.mx

1 Introducción.

Para los matemáticos son muy conocidos dos tipos de conjuntos infinitos: el primer tipo es el de los conjuntos que tienen tantos elementos como el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales; es decir, el de los conjuntos numerables y el otro tipo es el de los que tienen tantos elementos como el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales o como puntos hay en la recta real; es decir, los conjuntos que tienen la cardinalidad del continuo, conocida como $\mathfrak{c}$.

Es muy conocido también el hecho de que el conjunto $\mathbb{R}$, tiene un cardinal estrictamente mayor que el de $\mathbb{N}$. Es natural preguntarnos ¿qué tan estrictamente mayor? o bien ¿hay algún conjunto de cardinal "intermedio" que tenga un cardinal mayor que el del conjunto de los números naturales pero menor que el del conjunto de los números reales? ¿Es el cardinal del conjunto de los números reales el siguiente del cardinal del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales o es mayor aún? Esta pregunta se conoce como *el problema del continuo* de Cantor.

Este problema presentado en 1900 por Hilbert, como el número uno de su famosa lista de 23 problemas matemáticos para el siglo XX, permaneció sin solución desde los intentos de Cantor, pasando por los de Luzin, Hilbert y otros, hasta que los resultados de Gödel en 1938 y de Cohen en 1963 dieron una respuesta que analizaremos con detalle más adelante.

Cantor, en 1877, consideraba a los conjuntos como conjuntos de puntos; es decir, sólo como conjuntos de elementos de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}^n$. Por eso, si probó que el cardinal de los irracionales es igual al de $\mathbb{R}$ y el de $\mathbb{R}$ es igual al de $\mathbb{R}^n$ y los irracionales son la completación del conjunto numerable de los racionales $\mathbb{Q}$ para obtener a $\mathbb{R}$, resulta natural pensar que no hubiera otros subconjuntos de $\mathbb{R}$ de cardinal intermedio. Esta afirmación es lo que se conoce como Hipótesis del Continuo (HC). Una situación muy diferente para Cantor es la originada por él mismo en 1890 cuando muestra que para todo conjunto, el conjunto de todos sus subconjuntos o *conjunto potencia* es de cardinal *estrictamente* mayor.

En lo que sigue, daremos un breve panorama del desarrollo de la teoría de conjuntos en el siglo XX. Partiremos de algunos de los resultados más importantes de Georg Cantor[1], el creador de la teoría de conjuntos a fines del siglo XIX, presentaremos un concepto intuitivo de conjunto que surge en los años veinte a partir de la idea de construcción iterada con un inicio de construcción y que es la intuición subyacente a la axiomática dada por Zermelo a principios del siglo XX. Este concepto constructivo intuitivo de conjunto genera lo que llamaremos la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados. Pondremos énfasis en la importancia de la axiomatización y daremos en forma intuitiva la axiomática desarrollada a partir de la axiomática de Zermelo, así como su verdad respecto al concepto intuitivo mencionado antes, pues lo consideramos un logro muy importante ya que ésta es la definición precisa del concepto de conjunto lograda en este siglo. Hablaremos del problema del continuo de Cantor que se refiere al cardinal de $\mathbb{R}$ y de las respuestas que tuvo hacia los años sesenta, asi como de otro problema del continuo que se refiere a la estructura de $\mathbb{R}$ y de otros desarrollos importantes de la última parte del siglo, como la teoría de cardinales grandes y la del axioma de antifundación.

2 Antecedentes: la teoría de conjuntos de Cantor.

Antes de Cantor cualquier colección era o finita o potencialmente infinita y había una sola noción de *tamaño infinito*. No existía la noción de diferentes tamaños de infinitos. Era suficiente el símbolo ∞, de Wallis, para representar la noción de infinito potencial. Fue Cantor

[1]Georg Cantor, "*Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*", Dover, 1965.

quien al investigar sobre los conjuntos de singularidades de series de Fourier, inició el tratamiento del infinito en acto; es decir, concibió el infinito completo y no en potencia, e hizo el descubrimiento de que no todos los conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño. Hay infinitos de diferentes tamaños y más aún, hay una cantidad infinita ilimitada de tamaños infinitos. Cantor mostró que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros y el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales tienen todos el mismo tamaño, construyendo correspondencias biunívocas[2] entre ellos, y llamó a estos conjuntos (y a todos los que fueran biyectables con ellos) *infinitos numerables* o de cardinal $\aleph_0$ (*aleph-cero)*. Cantor mostró también que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no puede ponerse en correspondencia uno a uno con un conjunto infinito numerable y por tanto no es infinito numerable sino de un cardinal infinito distinto, de hecho estrictamente mayor pues en cualquier correspondencia uno a uno con un conjunto numerable siempre hay *más* números reales fuera de la correspondencia. Cantor llamó $\mathfrak{c}$ o *cardinal del continuo* al cardinal de los números reales. Otros resultados importantes de Cantor por mencionar sólo algunos, fueron:

1. El desarrollo de toda una aritmética de números ordinales o de *tipos de orden*, y de toda una aritmética de números cardinales. Estas dos aritméticas coinciden en el caso finito pero son muy distintas en el caso de los números ordinales y cardinales infinitos.

2. Una caracterización de $\mathbb{Q}$ con su orden, como único (salvo isomorfismo) orden lineal, denso, sin extremos y numerable. Y una caracterización de $\mathbb{R}$ con su orden, como único (salvo isomorfismo) orden lineal, denso, sin extremos, completo (que para todo subconjunto no vacío acotado superiormente hay una mínima cota superior) y con un subconjunto numerable denso en él.

3. El famoso teorema de Cantor, de que para todo conjunto A el conjunto *potencia de* A, $P(A)$, es de un cardinal estrictamente mayor que el cardinal de A. Y que en el caso particular de $\mathbb{N}$ y de $\mathbb{R}$, se cumple que

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| < |P(\mathbb{R})|$$

[2]Entendemos *correspondencia biunívoca* entre dos conjuntos como función biyectiva entre ellos.

3 La idea de von Neumann: el concepto iterativo de conjunto.

Generalizando la idea de Cantor, un conjunto es una *colección considerada como un todo*, de objetos bien definidos (cualquier tipo de objetos: objetos físicos, números, expresiones linguísticas, conjuntos mismos, etc.) que son llamados los **elementos de** el conjunto. Escribimos $x \in y$ para decir que el objeto x es un **elemento de** el conjunto y. Escribimos $x \notin y$ para decir lo contrario. Además es aceptado que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos (Axioma de Extensionalidad). Esto significa que *lo único* que interesa de los conjuntos son **sus** elementos.

También sabemos que **no** toda colección de objetos constituye un conjunto; por ejemplo si llamamos *regulares* a los conjuntos x tales que $x \notin x$ y R es la *colección* de todos los conjuntos regulares, es decir:

$$R = \{x \mid x \text{ es conjunto y } x \notin x\}$$

entonces R **no puede ser** un conjunto. De hecho por la definición de R, para todo *conjunto* x se cumple que $x \in R$ si y sólo si $x \notin x$. Por lo tanto, si R fuera un conjunto debería cumplirse que

$$R \in R \text{ si y sólo si } R \notin R$$

lo cual es absurdo. Así pues, R no es un conjunto. Obsérvese que si todos los conjuntos son regulares, entonces R es la *colección universo* V de todos los conjuntos y entonces V **no** es un conjunto. Si no todos los conjuntos son regulares entonces R no es V, pero de todos modos R no es un conjunto por la misma razón y V, la colección universo de todos los conjuntos, tampoco es un conjunto[3].

Ahora bien, si no toda colección de objetos es un conjunto, ¿qué colecciones lo son?, o bien ¿cuáles colecciones son conjuntos y cuáles no?

Se puede encontrar una respuesta parcial pensando en cierto tipo de conjuntos o mejor dicho, acerca de cierto tipo de *concepto de conjunto*, si en vez de preguntarnos ¿qué son los conjuntos? nos preguntamos ¿cómo construimos conjuntos?. Acerca de esto algo importante podemos decir: al construir un conjunto (por primera vez), debemos disponer ya de antemano de todos aquellos objetos que han de ser **sus** elementos o ¿es posible construir algo por vez primera, sin tener los elementos

[3]Para una prueba de esto véase introducción en: Amor J.A. "*Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias*", Servicios Editoriales Facultad de Ciencias, UNAM 1998.

que lo constituyen?. De acuerdo con esta observación ningún conjunto *constructible* puede ser elemento de sí mismo y en caso de haber conjuntos que sean elementos de sí mismos, estos no son constructibles; es decir, no se pueden empezar a construir a partir de objetos previos, no tienen principio de construcción o, si los vemos de afuera para adentro, examinando sus elementos, los elementos de sus elementos, etcétera, este proceso no terminaría, lo cual podemos describir diciendo que dichos conjuntos *no tienen fondo.* Así pues, todos los conjuntos *constructibles* a partir de un principio, son regulares y la colección R que los tiene a todos ellos, no es un conjunto por la razón anterior.

Presentaremos ahora un concepto particular de conjunto que surge a partir de la idea de la construcción en forma iterada, de una jerarquía acumulativa de conjuntos construidos a partir de objetos especiales que no son conjuntos. Los conjuntos así formados resultan ser bien fundados o "con fondo" en el sentido del párrafo anterior de que toda cadena de pertenencias por la izquierda, es finita.

La observación de que si construimos un conjunto disponemos ya de sus elementos nos lleva a considerar lo que se conoce como la Estructura o Jerarquía Acumulativa de los Conjuntos Bien Fundados, que es una idea subyacente a la axiomática de Zermelo de 1908. Hablando en forma precisa, esta idea debida a von Neumann en los años 20, es posterior a la axiomática de Zermelo, sin embargo resulta ser la idea natural a dicha axiomática.

3.1 La jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados.

Partamos de una totalidad X, posiblemente vacía de objetos particulares que **no** sean **ni** conjuntos **ni** colecciones. A estos objetos no-conjuntos, no-colecciones los llamaremos *átomos* o "*urelementos*". El universo $BF(X)$ de los conjuntos *construidos* a partir de X mediante un proceso iterativo, junto con los objetos de X, puede considerarse formado por una serie de estratos o niveles constructivos sucesivos como sigue:

El primer estrato BF_0 tiene a todos los átomos o urelementos, es decir a los objetos de X. Si E es un estrato cualquiera distinto del primero, E tiene exactamente **todas las colecciones posibles de objetos que aparecen en los estratos anteriores**, juntamente con los átomos.

Obsérvese que si un objeto aparece en un estrato E, aparece también en todos los estratos posteriores a E, es decir el proceso iterativo es acumulativo. Nótese también que todo conjunto construido de este modo tiene un inicio constructivo por lo que tendrá necesariamente un fondo respecto a la relación de pertenencia. Estos son los conjuntos bien fundados.

Sea C una coleción de objetos. ¿Es C un conjunto construido a partir de X?. De acuerdo con lo anterior, C será un conjunto construido a partir X si y sólo si hay un estrato en el que C haya sido construido. Para cada y elemento de C, sea E_y el estrato en el que y ha sido construido; entonces C será un conjunto si hay un estrato posterior a todos los E_y, en el cual C está construido. En principio, no podemos decir mucho acerca de la existencia de tal estrato, pero parece razonable que los siguientes tres principios deben satisfacerse si queremos que nuestros conjuntos constructivos sean colecciones lo más arbitrarias posible. Tales principios se basan en la idea de que la sucesión de estratos debe continuarse más allá de cualquier estrato, como un proceso iterativo sin fin. Estos principios son tres:

1^0. No hay un último estrato. Siempre podemos dar un paso más en la construcción de la jerarquía acumulativa de los conjuntos constructivos, formando todas las colecciones posibles de objetos de los estratos anteriores.

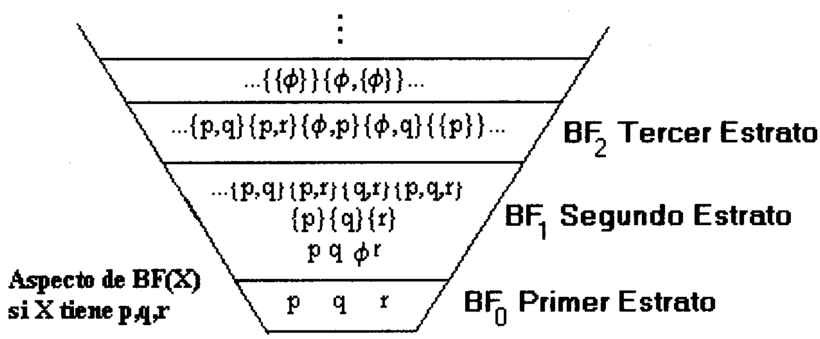
2^0. Si $BF_{\alpha_0}, BF_{\alpha_1}, BF_{\alpha_2}, \ldots\ldots\ldots, BF_{\alpha_n}, BF_{\alpha_{n+1}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ es una sucesión infinita cualquiera de estratos, entonces hay un estrato BF_* posterior a todos los BF_{α_k}. Esto a su vez se puede repetir una infinidad de veces. El estrato BF_* tiene a todos los conjuntos de todos los estratos BF_{α_k} y podemos pensarlo como la unión de todos los estratos BF_{α_k}.

3^0. Sea A un conjunto construido cualquiera, es decir una colección formada en algún estrato. Para cada b, elemento de A, sea BF_b un estrato cualquiera asociado de alguna manera con b. Esto determina alguna función de A en los estratos, tal que a todos y cada uno de los elementos b de A, le asocia un y sólo un estrato BF_b (no importa cual estrato sea). Entonces hay un *estrato* posterior a todos los BF_b. La motivación para este tercer principio puede explicarse así: puesto que el estrato en el que A aparece construido es posterior a todos los estratos en los que los elementos de A han sido construidos, podemos perfectamente imaginar una extensión de cualquier correspondencia que asocie a cada objeto b de A con un estrato BF_b, de modo que en la extensión de la correspondencia, A mismo quede asociado con un estrato BF_A, posterior a todos los BF_b para todo $b \in A$.

Ahora sí podemos precisar que $BF(X)$ será la colección de todos los conjuntos formados en todos los estratos de la jerarquía acumulativa descrita, y le llamaremos la *clase* de todos los conjuntos bien fundados a partir de X. Debe ser claro que esta clase $BF(X)$ no puede ser un conjunto en el sentido definido pues no está construida en ningún estrato. Podemos pensar a dicha clase como la unión de **todos** los estratos de la jerarquía descrita.

3.2 Un ejemplo.

Veamos como ejemplo los tres primeros estratos de $BF(X)$, si los átomos o urelementos de X son, para simplificar, solamente p, q y r :



Las concepciones usuales de la jerarquía acumulativa de los conjuntos iterativamente construidos se presentan comunmente ¡sin átomos! Esto es porque para fines matemáticos teórico-constructivos estos objetos no-conjuntos son *innecesarios*, ya que no nos interesan los conjuntos de vacas o de piedras y por otro lado, los objetos que sí nos interesan, como números, pares ordenados, relaciones, funciones, estructuras matemáticas, etc., pueden ser construidos sin átomos[4]. De aquí que la ausencia de átomos es algo que simplifica la presentación y la hace más elegante. Así pues, tomaremos a la totalidad X de átomos como vacía. En otras palabras, trataremos sólo de los conjuntos constructivos puros y denotaremos a la clase $BF(X) = BF$; es decir, trataremos

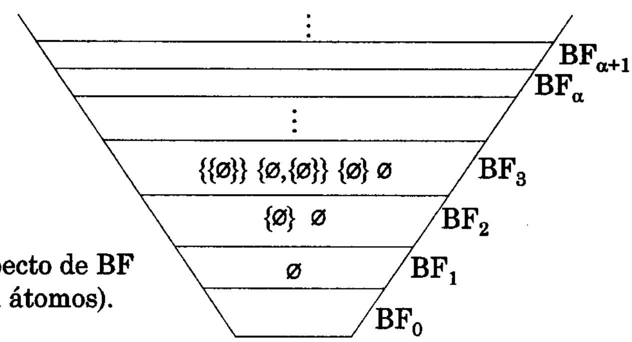
[4]Véase capítulos 3, 5, 6, de: Hrbacek K. & Jech T. "Introduction to Set Theory", Marcel Dekker Ink., 1984. Véase también: "*De la teoría de estratos a las estructuras matemáticas a través de la teoría de conjuntos*". Cesáreo Palomino, tesis UNAM, 1993.

sólo con conjuntos constructivos cuyos elementos son sólo conjuntos constructivos, cuyos elementos son sólo conjuntos constructivos, cuyos elementos son sólo ... A estos conjuntos puros, también los llamaremos conjuntos *hereditariamente* conjuntos.

Obsérvese que respecto a este concepto de conjunto, ya sea con átomos o sin átomos, los conjuntos tienen un principio de construcción o, vistos de afuera para adentro tienen "fondo". Es decir, si A es un conjunto, entonces fue formado en algún estrato y sus elementos fueron formados en estratos anteriores y los elementos de sus elementos fueron a su vez formados en estratos "más" anteriores y así sucesivamente hasta llegar, en un número finito de pasos descendentes, a objetos que ya no tienen elementos, bien porque son el conjunto vacío o bien porque son átomos si es el caso de que haya átomos. Obsérvese que esto se cumple para todos los estratos incluso los descritos con el segundo principio, de la forma BF_* que son posteriores a una infinidad de estratos o a una infinidad de infinidades de estratos, asi como para los descritos con el tercer principio.

Respecto a esta idea intuitiva de conjunto, a la que llamaremos el concepto iterativo de conjunto, se puede mostrar la verdad de los axiomas de la teoría formal $Z.F.E.$ (*Zermelo-Fraenkel* con axioma de *Elección*). La totalidad o colección de todos los conjuntos bien fundados BF será la unión de todos los estratos BF_α de la Jerarquía Acumulativa de los Conjuntos Buen Fundados. Así pues, se puede mostrar que los axiomas de ZFE son verdaderos respecto a la clase BF.

Veamos ahora cual es el aspecto de la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados sin átomos, es decir construidos a partir de nada. Este es el universo de los conjuntos puros o hereditariamente conjuntos y bien fundados, al cual denotaremos con BF:



Aspecto de BF (sin átomos).

3.3 ¿Es V = BF?

Si con V denotamos al *universo de todos los conjuntos*, suponiendo que no consideramos átomos; es decir, si $V = \{x / \ x = x\}$ entonces podemos preguntarnos: ¿$V = BF$?. Esta pregunta es equivalente a la pregunta sobre si todos los conjuntos son bien fundados. No hay una respuesta general definitiva. La única respuesta definitiva es parcial: podemos suponer que $V = BF$ ó bien podemos suponer que $V \neq BF$, y ambas suposiciones son lógicamente posibles, en el sentido de que no nos llevarán a contradicciones. Lo que sí es inmediato es que $BF \subseteq V$.

Intuitivamente, el hecho de suponer $V = BF$ significa que todos los conjuntos están construidos a partir de un principio ó lo que es lo mismo que para todos los conjuntos, al considerar los elementos que les pertenecen y los elementos que pertenecen a sus elementos y los elementos que pertenecen a los elementos que pertenecen a sus elementos, etc., esta sucesión decreciente de pertenencias debe ser finita. El hecho de suponer lo contrario o sea $V \neq BF$, significa que no todos los conjuntos deben ser como se describieron antes, sino que además de los conjuntos bien fundados, habría conjuntos sin principio de construcción o lo que es lo mismo, que no tengan fondo respecto a la relación de pertenencia por lo cual se pueden dar cadenas infinitas descendentes de pertenencias. Más adelante diremos algo más acerca de esta concepción.

4 La axiomatización de la teoría de conjuntos.

Las primeras axiomatizaciones de la Teoría de Conjuntos (Zermelo 1904 y Zermelo 1908) fueron motivadas por la necesidad pragmática de Zermelo de aclarar con precisión qué es lo que estaba suponiendo en su muy discutida prueba del *Teorema del Buen Orden* (para todo conjunto hay un buen orden)[5]; ciertamente, no fue por un deseo fundacionista para evitar paradojas, las que realmente no preocuparon ni a Cantor ni a Zermelo y de las que posteriormente Gödel aclara: *las paradojas de la teoría de conjuntos, no producen ninguna dificultad; son un problema lógico y epistemológico, pero no matemático*[6].

[5] Un *buen orden* es un orden lineal o total que además cumple que todo subconjunto no vacío tiene un primer elemento. El orden natural de $\mathbb{N}$ es un buen orden, el orden natural de $\mathbb{Q}$ y el de $\mathbb{R}$ no son buenos órdenes.

[6] Gödel: ¿Qué es el problema del continuo de Cantor?, Obras Completas, Alianza Editorial 1981, (pp337-362).

En 1904 Zermelo demostró el Teorema del Buen Orden, el cual asegura la existencia de un buen orden para *cualquier* conjunto. Zermelo habla ahí de la existencia de un conjunto de elección pero no lo describe. Es entonces que queda claro que matemáticos como Baire, Lebesgue y Borel, habían usado lo que se conoce como el axioma de Elección en varios resultados, inadvertidamente, es decir, suponer la existencia de de un conjunto de elección no definido o de una función de elección no definida[7]. La corriente fundacionista preponderante hasta entonces había sido el *definibilismo* y sus defensores no podían aceptar fácilmente este axioma, pues argumentaban que no se podía aceptar la existencia de un objeto matemático sin definirlo. Sin embargo, el axioma de Elección resulto ser indispensable para desarrollar la mayoría de las ramas de la matemática y el progreso de las matemáticas determinó dudar del definibilismo como máxima metodológica y empezar a aceptar el *combinatorialismo* como nueva máxima. El axioma de elección se puede justificar pues, con una posición *combinatorialista,* acerca de una función que asocia, a cada conjunto de un conjunto de conjuntos no vacíos, un elemento suyo sin decir cual, ya que la posibilidad combinatoria de tal asociación *existe* independientemente de que no se defina cómo se da esa asociación.

Desde el punto de vista moderno la axiomatización de una teoría constituye *la definición misma de los objetos de la teoría*, y en el caso de la teoría de conjuntos esto es muy relevante, pues sus conceptos indefinidos, como son el concepto de *conjunto* y la *relación de pertenencia*, son tan básicos que aunque hay intuiciones acerca de ellos, los límites y certeza de esas intuiciones no son muy claros por su carácter tan general en contextos infinitos. Así pues, todo lo que podemos saber con rigor hasta ahora, acerca del concepto de conjunto, está plasmado en los axiomas aceptados. Es decir, los axiomas son la definición implícita del concepto de conjunto: los conjuntos son aquellos *objetos* que junto con una relación entre ellos llamada *pertenencia*, hacen verdad a los axiomas de la teoría de conjuntos. Esta es la razón por la cual dedico especial interés a la axiomática de la teoría de conjuntos.

En lo que sigue especificaremos con cierto detalle intuitivo la axiomática más trabajada, la históricamente más aceptada y considerada como la más natural; la de $Zermelo - Fraenkel$ con el axioma de

[7]Un *conjunto de elección* para conjuntos ajenos no vacíos es un conjunto donde hay exactamante un objeto de cada uno de los conjuntos. Una *función de elección* para conjuntos no vacíos es una función que elige un objeto de cada uno de los conjuntos.

Elección, abreviada ZFE[8]. También daremos la justificación de la verdad de algunos de sus axiomas respecto al concepto iterativo de conjunto; es decir, su verdad en la clase de los conjuntos bien fundados BF. Dedicaré especial atención al axioma de elección ya que ha tenido un papel muy importante en la teoría de conjuntos y en la matemática de este siglo XX.

4.1 Comentario histórico previo.

La axiomatización conocida como Z está constituida por los axiomas $A1 - A7$ que presentamos en seguida y se debe a *Ernst Zermelo* en 1908. Es importante precisar que *Zermelo* incluyó al axioma de Elección ($A10$) en su formulación original (en la versión de un conjunto de elección), ya que su objetivo era aclarar los supuestos de su demostración del *Teorema del Buen Orden*: "Para todo conjunto existe un buen orden", que es uno de los muchos equivalentes del Axioma de Elección. Sin embargo, actualmente es algo aceptado que ese axioma se considera *aparte* de Z y de ZF.

Abraham Fraenkel propuso en 1922 el esquema de Reemplazo ($A8$) y *Dimitry Mirimanoff* propuso en 1917 el axioma de Buena Fundación ($A9$).

La axiomatización conocida actualmente como ZF (Zermelo-Fraenkel) está constituida por los axiomas $A1 - A9$ y fue presentada en su formulación actual por *Von Neuman.* A la axiomática ZF junto con el axioma de Elección ($A10$), se le conoce como ZFC (por *Choice*) en inglés o como ZFE (por *Elección*) en español.

A1. Axioma de extensionalidad.

"Si dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos entonces son iguales"

Todo conjunto está determinado por sus elementos; es decir, lo único que nos interesa de los conjuntos son *sus* elementos. Cuando decimos que x y y son iguales entenderemos que son idénticos, es decir, que son el mismo conjunto.

[8]Entre otras axiomáticas conocidas está la de Quine, y las axiomáticas de clases NBG (von Neumann-Bernays-Gödel), y MKT (Morse-Kelly-Tarski). En esas axiomáticas los objetos definidos por los axiomas son las clases y los conjuntos son ciertas clases, se definen como *clases que pertenecen a otra clase.*

La justificación de este axioma es previa e independiente de la estructura acumulativa, pues independientemente de cómo esté formado un conjunto, sus elementos lo determinan unívocamente. Este axioma es de tipo especificativo.

A2. Axioma del conjunto vacío.

"Hay un conjunto, al que llamaremos vacío, que no tiene elementos".

Tal conjunto cuya existencia se postula, se denota por $\phi = \{y \ / \ y \neq y\}$ y debe ser claro que no tiene elementos pues ningún objeto y cumple $y \neq y$.

Esta afirmación está justificada porque ϕ está construido en el segundo estrato de la jerarquía sin urelementos: es la única colección posible pues no hay urelementos. Este axioma es constructivo en el sentido de que afirma la existencia de un conjunto definiéndolo.

A3. Axioma del par.

"Para cualesquiera conjuntos a y b hay un conjunto cuyos elementos son exactamente a y b".

Tal conjunto se representa por $\{a, b\} = \{z \ / \ z = a \ \vee \ z = b\}$.

Este axioma es constructivo y se justifica así: sean BF_a, BF_b, los estratos en los que a, b, han sido construidos respectivamente. Entonces $\{a, b\}$ puede construirse en cualquier estrato posterior a BF_a y a BF_b.

A4. Esquema de comprehensión o de separación.

"Si x es un conjunto cualquiera y $\mathbb{P}$ es una propiedad cualquiera acerca de conjuntos, expresable en el lenguaje, entonces la colección de los objetos de x que tienen la propiedad $\mathbb{P}$, es un conjunto".

Este esquema de axiomas es constructivo y postula un axioma para cada propiedad expresable en el lenguaje; es decir, postula un número infinito numerable de axiomas. El conjunto cuya existencia se postula dados el conjunto x y la propiedad $\mathbb{P}$, se representa por: $\{z \ / \ z \in x \wedge \mathbb{P}(z)\}$.

Para justificar la verdad de este axioma, nótese que todos los elementos de la colección propuesta han sido construidos en estratos anteriores al estrato en el que x fue construido (simplemente porque todos ellos son elementos de x), por tanto la colección propuesta puede construirse en el mismo estrato en el que x fue construido.

Si x, y son conjuntos entonces se define "*x es un subconjunto de y*" denotado $x \subseteq y$, así:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$$

Obsérvese que el conjunto determinado por comprehensión a partir de x y de $\mathbb{P}(z)$, es un subconjunto de x, es decir, $\{z \;/\; z \in x \wedge \mathbb{P}(z)\} \subseteq x$.

A5. Axioma de la Unión.

"Para cualquier conjunto x, la colección de todos los elementos de todos los elementos de x es un conjunto".

Tal conjunto conocido como *la unión de x*, o la unión de todos los conjuntos que pertenecen a x, se representa por:

$$\cup x = \{z \;/\; \exists\, w(w \in x \wedge z \in w)\}$$

Otra manera de representarlo, si los elementos de x están indexados digamos con $x = \{a_i\}_{i \in I}$ es así: $\cup x = \cup_{i \in I} a_i$.

Obsérvese que si a, b son conjuntos, entonces $a \cup b = \cup\{a, b\}$, lo que está justificado por los axiomas de Par y de Unión.

A6. Axioma de las partes o del conjunto potencia.

"Para cualquier conjunto x, la colección de todos los subconjuntos de x, denotado $P(x)$, es un conjunto". Es decir, para cualquier conjunto x, existe un conjunto cuyos elementos son exactamente todos los subconjuntos de x.

El conjunto $P(x)$ cuya existencia se postula se llama el conjunto *de las partes de x* o *de los subconjuntos de x* o el *conjunto potencia de x* y se le denota como $P(x) = \{z \;/\; z \subseteq x\}$. Dado x, el conjunto $P(x)$ siempre cumple que $x \in P(x)$ pues $x \subseteq x$, y que $\phi \in P(x)$ pues $\phi \subseteq x$. Este axioma es constructivo y el conjunto cuya existencia postula tiene *muchos más* elementos que el conjunto al cual se aplica, pues si el conjunto x tiene k elementos, entonces el conjunto $P(x)$ tiene 2^k elementos[9].

[9] Aquí k denota un cardinal cualquiera, finito o infinito. El hecho de que cualquier conjunto tenga un cardinal, es un teorema de ZFE.

Justificación: todos los subconjuntos de x aparecen construidos en el mismo estrato que x, así que $P(x)$ puede construirse en el estrato siguiente al estrato en el que x ha sido construido de tal modo que tenga como elementos suyos a todos los subconjuntos de x. Aunque la verdad de este axioma es clara, en los casos infinitos no tenemos una idea precisa de lo que significa "*todos*" en el sentido de cuántos son todos, en la expresión "*todos los subconjuntos de un conjunto*".

Un conjunto x se llama *inductivo* si y sólo si el vacío le pertenece y para cualquier conjunto que le pertenece también le pertenece el conjunto formado por la unión de él con su unitario[10]; es decir, x es inductivo si y sólo si

1. $\phi \in x$
2. $\forall y[y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x]$.

A7. Axioma de infinito o existencia de un conjunto inductivo.

"Existe un conjunto inductivo".

Así pues, ϕ, $\{\phi\}$, $\{\phi,\{\phi\}\}$, $\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$, ... pertenecen todos a cualquier conjunto inductivo. Este axioma es constructivo y nos permite tener un conjuntò infinito. Para justificar este axioma, nos basamos en la segunda observación acerca del número de estratos, de la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados:

Sea BF_1 el estrato en el que ϕ ha sido construido, BF_2 el estrato en el que $\{\phi\}$ ha sido construido, BF_3 el estrato en el que $\{\phi,\{\phi\}\}$ ha sido construido, etc. Sea R un estrato posterior a todos los BF_n. Entonces en R puede construirse un conjunto inductivo satisfaciendo el axioma de Infinito o sea, la existencia de un conjunto inductivo.

A8. Esquema de reemplazo o de sustitución.

"La colección imagen de un conjunto bajo una relación funcional, es un conjunto".

Más precisamente, "si φ es una fórmula que define una relación funcional en el universo de los conjuntos, y si **a** es un conjunto cualquiera, entonces la *colección imagen* de todos los elementos de **a** bajo la relación

[10]Un conjunto *unitario* es un conjunto con un solo elemento.

funcional φ, es un conjunto". Dado φ y **a**, el conjunto cuya existencia se postula se representa por $\mathbf{b} = \{z \,/\, \exists x[x \in \mathbf{a} \wedge \varphi(x) = z]\}$.

Obsérvese que este es un *esquema* de axiomas, pues para cada funcional φ se tiene un axioma particular.

La justificación de este esquema axiomático, que también es constructivo, se apoya en el tercer principio acerca de la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados: dada φ y dado un conjunto **a**, asóciese a cada x en **a** tal que x está asociado por φ con un z, el estrato BF_x en el cual el único z satisfaciendo $\varphi(x) = z$ ha sido construido. Entonces **b** puede ser construido en cualquier estrato posterior a todos los BF_x, de tal modo que los elementos de **b** sean exactamente todos los z que satisficieron $\varphi(x) = z$ para algún x en **a**.

A9. Axioma de buena fundación o de regularidad.

"Todo conjunto no vacío tiene un elemento cuyos elementos no están en el conjunto". O bien, "todo conjunto no vacío A tiene un elemento m tal que $m \cap A = \phi$". Es decir, todo conjunto no vacío tiene un elemento al que no le pertenecen elementos del conjunto. Obsérvese que otro modo de decirlo es que todo conjunto no vacío tiene un elemento *minimal* respecto a la relación $\in$ de pertenencia restringida al mismo conjunto.

Este axioma es claramente especificativo, pues no nos proporciona nuevos conjuntos sino sólo especifica que todos cumplen ser bien fundados. En realidad es un axioma restrictivo pues aceptarlo es equivalente a aceptar que la Jerarquía de los Conjuntos Bien Fundados es **todo** el universo de los conjuntos; es decir, es aceptar que $V = BF$.

La verdad de este axioma respecto a la jerarquía de los conjuntos bien fundados BF, puede argumentarse así: sea A un conjunto no vacío, sea m un elemento de A construido en un estrato lo más abajo posible. Entonces m es un testigo de la verdad del axioma de Buena Fundación ya que si y es algún elemento de m entonces y ha sido construido en un estrato anterior al estrato en el que m ha sido construido, por consiguiente y no puede ser un elemento de A pues por la elección de m, todo elemento de A ha sido construido en un estrato igual o posterior al estrato en el que m ha sido construido.

A10. Axioma de elección.

"Para todo conjunto A de conjuntos no vacíos ajenos dos a dos, existe un conjunto C que tiene exactamente un elemento de cada uno de los

conjuntos no vacíos de A". A tal conjunto C le llamamos *un conjunto de elección* para A.

El axioma de Elección es una afirmación muy especial del lenguaje de la teoría de conjuntos, pues afirma la existencia de un conjunto para el cual **no se da una definición**, por esa razón la descripción de ese conjunto es mas complicada y es sólo una descripción, pues no es único el conjunto cuya existencia se postula. Es importante comentar que hay muchos enunciados equivalentes en la teoría, al enunciado dado. Entre los más famosos podemos mencionar al llamado *Teorema del Buen Orden* que afirma que *para todo conjunto existe un buen orden* y el llamado *Lema de Zorn* muy usado en muchas demostraciones matemáticas.

La verdad de este axioma en la jerarquía de los conjuntos bien fundados queda justificada así: sea A un conjunto de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos. Entonces los elementos de los elementos de A están construidos a lo más en el estrato que está dos niveles antes del estrato donde está construido A. Entonces en el estrato inmediato anterior al de A, donde se construyeron todos sus elementos, se puede construir cualquier colección formada por elementos de elementos de A, en particular se puede construir **una** colección C que tenga *exactamente un* elemento *de cada uno* de los elementos de A. Esto es posible por las siguientes razones: porque cada elemento de A tiene al menos un elemento ya que $\phi \notin A$, esos elementos son distintos para elementos distintos de A pues elementos distintos de A son ajenos, y finalmente porque se pueden formar **todas** las colecciones posibles de elementos de elementos de A.

Otra versión equivalente al axioma de Elección es: "para todo conjunto de conjuntos no vacíos, existe una función de elección que elige un elemento de cada uno de los conjuntos no vacíos". Podemos pensar que a cada conjunto le asocia el elemento suyo elegido. Dicho con más precisión: "para todo conjunto B de conjuntos no vacíos existe una función f, tal que $f : B \longrightarrow \cup B$ y tal que *para todo* $x \in B$, $f(x) \in x$". Esta versión es equivalente a las versiones dadas antes y por tanto verdadera respecto a la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados.

La axiomatización completa de ZFE está constituida por los axiomas $A1 - A10$, sin embargo los axiomas $A2$ (Vacío), $A3$ (Par), y el esquema $A4$ (Comprehensión), realmente se pueden probar como teoremas (son dependientes) del resto de los axiomas. Así pues, los axiomas *independientes* de ZFE son sólo seis axiomas y un esquema axiomático:

$A1$. *Extensionalidad* (especificativo).

$A5$. *Unión* (constructivo).

$A6$. *Potencia* (constructivo).

$A7$. *Infinito* (constructivo).

$A8$. *Reemplazo* (constructivo), esquema de axiomas.

$A9$. *Buena Fundación* (especificativo-restrictivo).

$A10$.*Elección* (existencial).

4.2 Un examen sobre el axioma de Elección.

Mencionamos que el axioma de elección es una afirmación muy especial porque asegura la existencia de algo (un conjunto de elección o una función de elección o un buen orden) para lo cual **no** se da una definición. La disyuntiva sobre si se necesita o no el axioma de elección debe ser clara: si se puede definir de algún modo la elección, ésta existe y el axioma no es necesario. Si no se puede definir de ningún modo la elección, el axioma es necesario para justificar que la elección existe.

Por considerarlo de interés matemático terminaremos esta sección con un ejercicio sobre la necesidad del axioma de elección.

Pruébese el lector a sí mismo: ¿cuándo el axioma de Elección es realmente necesario? Si usted está trabajando en la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel **sin** el axioma de Elección, **¿puede usted elegir un elemento de . . .**

1. un conjunto finito?

2. un conjunto infinito?

3. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos unitarios?[11]

4. cada miembro de un conjunto infinito de pares de zapatos?

5. cada miembro de un conjunto infinito de pares de calcetines?

6. cada miembro de un conjunto finito de conjuntos si cada uno de los miembros es infinito?

7. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos si cada uno de los miembros es finito?

8. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos de racionales?

9. cada miembro de un conjunto numerable de conjuntos si cada uno de los miembros es numerable?

[11]Recordar que los conjuntos *unitarios* son conjuntos con un solo elemento.

10. cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos finitos de reales?

Las respuestas serán "si" o "no" en cada caso. Si el lector ya lo resolvió, a continuación damos las respuestas.

En los primeras cuatro y el 6 la respuesta es "si", pues o bien el número de elecciones es finito o bien es clara una regla precisa para definir la elección. En el 5 y del 7 al 9 la respuesta es "no" pues el número de elecciones es infinita y no hay una regla para definir la elección. En el 10 la respuesta es "si".

5 Los resultados de independencia: Gödel y Cohen.

El *problema del continuo de Cantor* consiste en no saber cuantos números reales hay; es decir, no saber la respuesta a la pregunta ¿Cuál es el cardinal del continuo? Respecto a este problema se prueba en la teoría de conjuntos que el cardinal del continuo es estrictamente más grande que el cardinal del conjunto de los números naturales. La pregunta entonces es ¿qué tanto mas grande? Se probó que **no** puede ser ninguno de ciertos cardinales de una serie bien determinada[12], pero que si puede ser cualquier otro y hay infinidad de posibilidades. Incluso no se ha probado que haya una cota para el cardinal del continuo.

El hecho de que fracasaran todos los intentos por resolver el mencionado problema del continuo, no fue accidental. Los trabajos al respecto, de Kurt Gödel (1938) con el método de modelos internos y de Paul Cohen (1963) con el método de *forcing*, mostraron que si la teoría de conjuntos es consistente, el enunciado que afirma que no hay un conjunto de cardinal intermedio entre $\aleph_0$ y el cardinal del continuo, no contradice a la teoría de conjuntos; es decir, es compatible con ella. Pero la negación de dicho enunciado también es compatible con ella. De aqui que por razones puramente lógicas,[13] si dicho enunciado no contradice a la teoría de conjuntos entonces su negación no se deduce de la teoría y si la negación de dicho enunciado tampoco contradice a la teoría de conjuntos entonces el enunciado tampoco se deduce de la

[12]Nos referimos a los cardinales llamados *de cofinalidad numerable*. Es decir, se prueba que el cardinal del continuo **no** tiene cofinalidad numerable. La *cofinalidad* es una propiedad técnica definida para todos los cardinales.

[13]Si T es una teoría y A es un enunciado entonces: $T \cup \{A\}$ es consistente si y sólo si a partir de T **no** se deduce *no* A. O bien, $T \cup \{no\ A\}$ es consistente si y sólo si a partir de T **no** se deduce A.

teoría, por lo que *ninguna de las dos afirmaciones* de que sí haya o de que no haya un conjunto de cardinal intermedio, se deduce de la Teoría de Conjuntos; es decir, son *indecidibles* para dicha teoría. En síntesis, la pregunta ¿cuántos números reales hay? equivalente al problema del continuo de Cantor, que consiste en preguntar ¿hay tantos números reales como el cardinal siguiente al de los naturales o más aún? es *indecidible* a partir de la teoría de conjuntos aceptada más comunmente, que es la teoría de Zermelo-Fraenkel con axioma de Elección (ZFE).

La *Hipótesis del Continuo* (HC) es la respuesta: hay tantos números reales como el cardinal siguiente al cardinal de los números naturales; es decir, HC afirma:

$$| \mathbb{R} | = | \mathbb{N} |^{+} = (\aleph_0)^{+} = \aleph_1$$

o bien[14] $| P(\mathbb{N}) | = | \mathbb{N} |^{+} = (\aleph_0)^{+} = \aleph_1$

Gödel 1938: Hasta donde sabemos, nada impide que la HC sea verdadera, (eso no quiere decir que lo sea).

Cohen 1963: Hasta donde sabemos, nada impide que la HC sea falsa, (eso no quiere decir que lo sea).

Gödel-Cohen: Tanto la verdad como la falsedad de la HC de Cantor son compatibles con nuestro conocimiento matemático.

No sabemos y más aún, *no podemos saber* si la HC es verdadera o falsa, con el aparato matemático aceptado hasta ahora que está por terminar el siglo XX. Si pensamos que los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos no describen ninguna realidad bien determinada respecto a la cual la HC debería ser cierta o falsa, entonces la respuesta de indecidibilidad de la HC es suficiente. Se tienen dos teorías lógicamente posibles[15] y el problema se disuelve[16].

Por otro lado, si pensamos que el problema del continuo aún sigue siendo un problema real y la teoría de conjuntos describe alguna realidad bien determinada respecto a la cual la HC deberá ser cierta o falsa, entonces el problema no está disuelto y no queda más que reforzar ese aparato matemático aceptado, con nuevos axiomas, con el objetivo de

[14] Recordar que $| \mathbb{R} | = | P(\mathbb{N}) |$.

[15] En el sentido de que ambas teorías (cada una por separado), son consistentes.

[16] Decimos *disuelto* en vez de *resuelto*, porque es un hecho demostrado que el problema **no** tiene una respuesta en la teoría. Y considerar que con eso el problema ya no existe, es disolverlo.

decidir el problema del continuo.[17] En este sentido, el axioma más obvio para agregar es uno que explícitamente afirme HC o su negación $noHC$, pero esto no se ha hecho porque ninguna de las dos, ni HC ni su negación, es intuitivamente obvia. Siempre que alguien prueba un resultado usando alguna de las dos hipótesis, debe establecerlo explícitamente como hipótesis. Esto contrasta con el axioma de Elección, el cual es usado libremente en matemáticas y es frecuente que ya no se mencione su uso, porque ya es libremente aceptado como obvio o como cierto, por casi todos los matemáticos. Así, a diferencia del axioma de Elección, la HC o su generalización la *H*ipótesis *G*eneralizada del *C*ontinuo (HGC)[18], no ha sido adoptada como un axioma de la teoría de conjuntos. En vez de eso, los matemáticos viven con esa incompletud en la teoría de conjuntos o bien tratan de encontrar nuevos axiomas intuitivamente verdaderos que ayuden a decidir el problema del continuo. En 1993 Haim Judah dijo: *nosotros todavía pensamos que el estudio del tamaño del continuo debería ser nuestra luz guía para la futura investigación en teoría de conjuntos.*

6 Otro problema del continuo.

Como mencionamos en la sección de antecedentes, sabemos que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con su orden, está caracterizado de modo único salvo isomorfismo como:

1) Conjunto linealmente ordenado, denso, sin extremos.
2) Completo.
3) Con un subconjunto numerable, denso en él.[19].

Un resultado muy fácil de verificar es que $\mathbb{R}$ con su orden cumple que *cualquier colección de intervalos abiertos no vacíos ajenos dos a dos, es una colección contable*; es decir, a lo más numerable. Esta propiedad es conocida como *condición de anticadena contable* o CCC. En efecto, obsérvese que si se considera una colección cualquiera de intervalos abiertos no vacíos ajenos dos a dos, por la propiedad de $\mathbb{R}$ de

[17]Véase: ¿Qué es el problema del continuo de Cantor?, Kurt Gödel 1947. En Obras Completas, Alianza Editorial.

[18]HGC es la afirmación: para todo conjunto *infinito* A, $\mid P(A) \mid = \mid A \mid^+$ (el cardinal sucesor de $\mid A \mid$). O bien: para todo cardinal infinito k, $2^k = k^+$ (el cardinal sucesor de k). Es obvio que HGC implica HC.

[19]Un conjunto linealmente ordenado que tiene un subconjunto numerable que es denso en él se llama *separable*. Subconjunto denso en él significa que entre cualesquiera dos elementos de él, hay un elemento del subconjunto.

ser separable ($\mathbb{Q}$ es numerable y denso en él), en cada intervalo existe un racional de donde la colección tiene que ser a lo más numerable.

En 1920 el matemático Michel Souslin planteó el problema siguiente: ¿Si un conjunto es linealmente ordenado, sin saltos (denso), sin huecos (completo), sin extremos y tal que cualquier colección de intervalos abiertos no vacíos ajenos dos a dos es una colección a lo más numerable, entonces es necesariamente isomorfo al continuo lineal ($\mathbb{R}$)?[20].

La respuesta positiva a este problema es conocida como *Hipótesis de Souslin* (HS) y es equivalente a asegurar que no hay un conjunto linealmente ordenado, sin extremos, denso y completo, que satisfaga la condición CCC, pero que no sea separable. Un continuo así se llama una *línea de Souslin.* La negación de la Hipótesis de Souslin sería pues: hay una línea de Souslin.

Esta pregunta permaneció sin respuesta después de muchos intentos de solución hasta fines de la década de los sesenta, en que Jech y Tennenbaum probaron que HS es indemostrable en ZFE (1967) y Solovay, Martin y Tennenbaum probaron que $noHS$ es también indemostrable en ZFE (1969). Estas pruebas utilizan la técnica de *forcing.* Con esto quedó establecido que es *imposible* responder el problema de Souslin dentro del marco de la teoría de conjuntos aceptada.[21]

Han sido propuestos y estudiados muchos enunciados como posibles axiomas adicionales aunque ninguno de ellos ha adquirido la calidad de *axioma aceptado* pues ha resultado que su verdad o sus consecuencias, si bien interesantes, no son claras o intuitivamente aceptables. Entre estos, mencionaremos solamente el llamado *Axioma de Martin*[22], el principio *Diamante* y otros más, que son interesantes afirmaciones de tipo combinatorio infinito cuya complejidad técnica impide describirlos más ampliamente en este trabajo. Sólo mencionaremos que el *Axioma de Martin* junto con $noHC$ implican HS.

Un comentario importante respecto a todos los indecidibles mencionados es que todos se deciden suponiendo el enunciado $V = L$ conocido como *Axioma de Constructibilidad*, donde L denota la clase de todos los conjuntos *constructibles* mediante definiciones del lenguaje de la teoría de conjuntos. La teoría $ZF + (V = L)$ se conoce como teoría *constructible* de conjuntos, donde se prueba el axioma de *Elección.*

[20]En *Fundamenta Matematicae* No.1, 1920.

[21]Para una presentación detallada de la historia de éste problema véase: Carlos Alvarez, *On the History of Souslin's Problem.* Arch. Hist. Exact. Sci. 54 (1999) 181-242.

[22]Este principio sólo tiene interés si se supone *junto* con $noHC$, pues HC lo implica trivialmente.

Además, en dicha teoría se prueban por ejemplo HGC, $noHS$ y el principio *Diamante*.

Hay muchos otros aspectos de la teoría de conjuntos que sería imposible presentar en esta trabajo. Sólo mencionaré la llamada *Teoría Descriptiva de Conjuntos* desarrollada por la escuela polaca, que estudia los conjuntos con características topológicas semejantes a los conjuntos de reales y que es una de las áreas que muestra la gran interrelación e influencia que ha habido entre la topología de conjuntos y la teoría de conjuntos.

7 Axiomas fuertes de infinito y cardinales grandes.

Un cardinal se considera como *cardinal grande* si es infinito mayor que $\aleph_0$ y es además tan grande que es tan inaccesible con *operaciones conjuntistas* (como sucesor, uniones y potencias) a partir de los cardinales infinitos anteriores a él, como lo es $\aleph_0$ a partir de los cardinales finitos. En la teoría ZFE el axioma de infinito o de *existencia de conjuntos inductivos* garantiza la existencia del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y del primer cardinal infinito, el de los conjuntos numerables, conocido como $\aleph_0$ y además, si no se postula tal axioma, éste no se puede probar a partir de los demás. Generalizando ciertas propiedades de $\aleph_0$ podemos definir diferentes tipos de los llamados cardinales grandes. Mientras más fuertes sean esas propiedades, más grandes serán los cardinales. Como ejemplo de dichas propiedades que determinan a los "menos grandes" de los cardinales grandes, digamos k, están las siguientes:

1) Si λ es cardinal menor que k, entonces el cardinal sucesor de λ es menor que k. Obsérvese que para $\aleph_0$ se cumple, pues el sucesor de un finito es finito.

2) Para todo conjunto S de conjuntos de cardinal menor que k, tal que S mismo es también de cardinal menor que k, la unión de S es *de cardinal menor que k*. Obsérvese que para $\aleph_0$ se cumple, pues la unión finita de conjuntos finitos es finita. También para $\aleph_1$ cardinal sucesor de $\aleph_0$ se cumple, pues la unión numerable de conjuntos numerable es numerable (esto sólamente se prueba usando el axioma de Elección).

3) Para todo conjunto A de cardinal menor que k, el conjunto potencia de A, de cardinal $2^{|A|}$, tiene cardinal menor que k. Obsérvese que para $\aleph_0$ se cumple, pues la potencia de conjuntos finitos es finita.

Se pueden dar infinidad de ejemplos de cardinales mayores que $\aleph_0$ que cumplen la propiedad 1, son los llamados cardinales *límite*. También hay infinidad de ejemplos de cardinales mayores que $\aleph_0$ que cumplen la propiedad 2, son los llamados cardinales *regulares*. También hay infinidad de ejemplos de cardinales mayores que $\aleph_0$ que cumplen la propiedad 3, son los llamados cardinales *fuertes*. Pero las propiedades 1 y 2 juntas o bien las propiedades 2 y 3 juntas, no las cumple ningún cardinal conocido mayor que $\aleph_0$. De hecho no sabemos si hay cardinales mayores que $\aleph_0$ que las cumplen. Dichos cardinales, si los hay, se llaman cardinales *inaccesibles* y son los menos grandes de los cardinales grandes.[23]

Un *axioma fuerte de infinito* es la suposición de que existe un tipo particular de cardinal grande k. Si no se postula tal axioma como nuevo axioma de ZFE, éste no se puede probar (y se prueba que no se puede probar), a partir de los demás. Es notable en el caso de todos los axiomas de infinito que su verdad implica su independencia del resto de los axiomas, pues si existe el cardinal k correspondiente, entonces existe BF_k, el conjunto de los conjuntos bien fundados hasta el nivel k sin incluirlo, el cual es un *modelo-conjunto* de la teoría de conjuntos,[24] donde son verdad los otros axiomas y en el cual no existe el cardinal k, lo cual prueba la independencia de dicho axioma. Uno de los axiomas fuertes de infinito es el que afirma la existencia de *cardinales medibles*. Dichos cardinales, que son un tipo particular de cardinales grandes y cuya existencia como ya se dijo es indemostrable en ZFE, son cardinales inaccesibles fuertes mucho muy grandes.[25] Más adelante nos referiremos a la existencia de tales cardinales grandes. Consideramos muy importante hacer hincapié en que no se ha demostrado que no haya cardinales inaccesibles (de hecho creemos que los hay). Lo que se ha demostrado es que no se puede demostrar que los haya.

El universo de la teoría de conjuntos es conocido como V. Hemos visto que una subclase de ese universo es BF. Ambas son colecciones *tan grandes* que no son conjuntos. Una subclase de BF es la colección L de todos los conjuntos que son *definibles por medio del lenguaje* de la teoría de conjuntos, esta clase tampoco es conjunto. Se prueba que

[23]Un cardinal es *inaccesible débil* si es mayor que $\aleph_0$ y cumple 1 y 2. Un cardinal es *inaccesible fuerte* si es mayor que $\aleph_0$ y cumple 2 y 3.

[24]Un *modelo-conjunto* de la teoría de conjuntos es una estructura que es un conjunto y respecto a la cual son verdad todos los axiomas de la teoría de conjuntos.

[25]Un cardinal k es *medible* si y sólo si $k > \aleph_0$ y existe una medida bivaluada sobre k. O bien, si y sólo si $k > \aleph_0$ y existe un ultrafiltro no principal k-completo sobre k.

$L \subseteq BF \subseteq V$ y ya vimos que el enunciado "$V = BF$" es equivalente al axioma de Buena Fundación. ¿Qué podríamos decir de la posibilidad $BF = L$?

Esta clase L fue definida por Gödel con el objeto de probar que es un modelo-clase[26] de la teoría de ZFE y también de la *Hipótesis del Continuo* (HC), con lo cual probó que la negación de HC no se puede probar a partir de ZFE, como ya hemos mencionado antes (véase nota 13). En forma totalmente análoga a los resultados de Gödel y de Cohen sobre la independencia de la *Hipótesis del Continuo*, también con sus respectivas técnicas se probó la independencia del enunciado $BF = L$. Es decir $BF = L$ y $V = L$ son también enunciados indecidibles a partir de ZFE.

En 1961 Dana Scott demostró que *si existen cardinales medibles entonces $V \neq L$.* Este resultado significa que no se puede *definir* una medida sobre un cardinal medible y refleja la idea intuitiva de que hay mucho más conjuntos que conjuntos definibles. Esto sugiere que los axiomas fuertes de infinito pueden darnos una visión más completa del universo de los conjuntos.[27] Es importante mencionar que el axioma de *Existencia de Cardinales Medibles* es bastante aceptado y que muchos investigadores consideran que las pruebas que suponen este axioma, son pruebas para la teoría de conjuntos. Por lo tanto, si aceptamos el axioma de Existencia de Cardinales Medibles como correcto, es decir, si creemos que describe de manera adecuada la realidad conjuntista, entonces tenemos que aceptar que V es distinto de L (no todos los conjuntos son definibles). Sin embargo es también importante decir que la suposición de existencia de cardinales medibles ni implica ni refuta la HC.

8 El Axioma de Anti-Fundación y los conjuntos no bien fundados

El axioma de Buena Fundación, que afirma que *todo conjunto es bien fundado*, implica que ningún conjunto se pertenece a sí mismo. Contrariamente a la creencia (equivocada) de algunos autores de mediados

[26]Un *modelo-clase* **no** es un conjunto por lo que no existe en la teoría de conjuntos. Es una colección o clase que no es conjunto y que sin embargo se comporta como un *modelo-conjunto.*

[27]Véase: *¿Es V distinto de L? Independencia del axioma de constructibilidad y algunas reflexiones sobre la No-constructibilidad del universo conjuntista.* Gabriela Campero, Tesis UNAM, 1998.

de siglo, de que si ningún conjunto se pertenece a sí mismo se evitan paradojas como la de Russell, eso **no** es una explicación a la paradoja de Russell, pues independientemente de que haya o no haya, o de que se postulen o no se postulen conjuntos x tales que $x \in x$, la colección de *todos los conjuntos que no se pertenecen a si mismos* **no** es un conjunto por razones puramente lógicas.[28] Además ya desde 1954 Paul Bernays probó que suponer la negación del axioma de Buena Fundación ($noBF$) es tan consistente con los demás axiomas de ZF como suponer el axioma de Buena Fundación (BF). Por otro lado, este axioma es innecesario para la reconstrucción conjuntista de las estructuras matemáticas, y su uso obedece más a razones de comodidad o de conveniencia ad hoc, que a la creencia de que ciertamente todos los conjuntos sean bien fundados, lo cual se puede ver realmente como una *restricción* a la generalidad y "libertad" del concepto intuitivo de conjunto. Desde años atrás existía la idea de reemplazar BF por otro axioma más general y no restrictivo, que no fuera simplemente *la negación de* BF.

En 1988 Peter Aczel publicó un libro titulado "*Conjuntos no bien fundados*",[29] donde presentó su teoría de dichos conjuntos y su fundamentación como una *extensión propia* de la teoría (ZFE **menos** BF) con su axioma de *Anti-Fundación*, (en inglés *Anti-Foundation Axiom*, AFA). Este axioma que implica *la negación de* BF, pero no es equivalente a dicha negación, asegura la existencia de conjuntos "extraños" del estilo de A tal que $A = \{A\}$, de donde $A \in A$, o bien del estilo de A, B, C, tales que $A \in B$, $B \in C$ y $C \in A$. La presentación de la teoría se hace por medio de *gráficas dirigidas* con propiedades especiales, y se definen otros conceptos relativos a esas gráficas por medio de los cuales se caracteriza la existencia de los conjuntos no bien fundados, además de los bien fundados. Es importante precisar que con esta nueva caracterización del universo conjuntista V, se sigue manteniendo la misma clase BF de todos los conjuntos bien fundados, sólo que $BF \subset V$ y $BF \neq V$, pues hay más conjuntos; a saber, los no bien fundados. Los resultados de consistencia relativa probados por Aczel son:

1. Si ZFE-BF *es consistente* entonces ZFE-BF+AFA *es consistente.*

2. Si ZFE-BF *es consistente* entonces ZFE-BF+*no*AFA *es consistente.*

---

[28]Para una explicación detallada de esto, véase la introducción de: Amor J.A. "*Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias*", Servicios Editoriales Facultad de Ciencias, UNAM 1998.

[29]Peter Aczel, "*Non-Well-Founded Sets*", CSLI Lecture Notes No.14, CSLI Publications, 1988.

De aquí se sigue que AFA no es ni demostrable ni refutable a partir de $ZFE\text{-}BF$, suponiendo su consistencia. Así pues la teoría de conjuntos más rica y general es $ZFE\text{-}BF+AFA$. Estos resultados pudieran no ser de interés directo, por ahora, para la reconstrucción de la matemática clásica, pues toda ella se puede realizar en la clase de los conjuntos bien fundados.

9 Conclusiones.

La teoría de conjuntos en este siglo obtuvo a nuestro parecer una consolidación enorme a partir de los trabajos extraordinarios de Cantor cuyos resultados siempre fueron ampliados, mejorados y aclarados, pero nunca refutados. El problema de Cantor sobre la cardinalidad del continuo presentado en 1900 por Hilbert y el otro problema del continuo de Souslin que presentamos, sobre su caracterización estructural, fueron dos de los motores que motivaron el desarrollo de la teoría de conjuntos de este siglo XX, pero desde luego no fueron los únicos. Podríamos considerar también problemas de la topología general, de la combinatoria infinita y del analisis real que también lo motivaron. Entre los grandes logros están, si no la solución esperada de decidibilidad, si las respuestas de independencia que revolucionaron el punto de vista acerca de la matemática como una ciencia donde no todo problema claramente planteado es resoluble, como soñara Hilbert. Otro gran logro fue el uso libre del axioma de Elección como un enunciado aceptable y aceptado para la teoría de conjuntos.

El gran logro conceptual fue conocer con rigor el concepto de conjunto, que está plasmado en los axiomas aceptados que son la definición implícita del concepto de conjunto: los conjuntos son aquellos *objetos* que junto con una relación entre ellos llamada *pertenencia*, hacen verdad a los axiomas de la teoría de conjuntos. Esta es la razón por la cual dediqué especial interés a la axiomática de la teoría de conjuntos. Otro de los grandes logros del siglo ha sido poder considerar a la teoría de conjuntos como el fundamento de toda o casi toda la matemática, ya que la mayoría de las estructuras y teorías matemáticas se pueden reconstruir a partir de la teoría de conjuntos.[30] Otro logro más, fue ampliar la aritmética cardinal y la ordinal a partir de los resultados de Cantor.

El desafío para el futuro es formidable y del mismo tipo que el de este siglo; a saber, que las intuiciones no pueden ir adelante del desarrollo

[30]Excepto por ejemplo la teoría de las categorías.

de la teoría de conjuntos como en algunas otras teorías matemáticas, sino a la par que los resultados nuevos demostrados y sus consecuencias, pues los límites y la certeza de esas intuiciones no son muy claros por su carácter tan general en contextos infinitos y necesitan ser apoyados por las intuiciones acerca de las consecuencias teóricas de las hipótesis propuestas.

Los últimos resultados de los conjuntos no bien fundados, aunados a todo lo expuesto en este trabajo, representan que se pueden tener aún más conjuntos y mantener e incluso incrementar la generalidad, el conocimiento y la elegancia del concepto intuitivo cantoriano de conjunto, así como la libertad, en donde Cantor decía que radica la esencia de la matemática. Y ahora, cien años después, al final del siglo XX sabemos que Hilbert tenía razón, pues nadie nos ha expulsado de este paraíso que Cantor creó para nosotros.

Agradecimientos.

Agradezco al Comité Editorial de Miscelánea Matemática por la invitación a escribir este artículo, y a dos revisores de la versión previa por sus valiosos comentarios y sugerencias que me ayudaron a mejorar la presentación del mismo. Agradezco también a Maruxa Armijo y a Rafael Rojas sus comentarios.