MISCELÁNEA MATEMÁTICA **26** (1997) 29–31 SMM

¿Existe una sigma-álgebra infinita numerable?

J. Cruz Sampedro
Departamento de Matemáticas
Universidad de las Américas de Puebla

M. Tetlalmatzi Montiel
Departamento de Ingeniería y Tecnología
Universidad Autónoma de Tlaxcala

Una pregunta natural en probabilidad elemental es la siguiente. ¿Qué significa tomar un elemento al azar en un conjunto X? Para responder esta pregunta de manera rigurosa es necesario elegir una colección de subconjuntos de X, denominados *eventos*, a los cuales se asignan probabilidades. Una colección no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es admisible como colección de eventos si es una *σ-álgebra*; es decir, si posee las propiedades siguientes:

i) Si A está en $\mathcal{A}$, entonces $A^c \equiv X \setminus A$ también está en $\mathcal{A}$.

ii) Si $\{A_n\}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ está en $\mathcal{A}$.

Si X tiene solamente un número finito n de elementos, se acostumbra elegir a $\mathcal{A}$ como la colección de todos los subconjuntos de X y definir $P(A) = j/n$, si A tiene exactamente j elementos. El resultado que enseguida presentamos muestra que la elección de $\mathcal{A}$ es un problema muy delicado si X tiene una infinidad de elementos, aún en el caso de ser $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de los números naturales [2].

¿Existe una σ-álgebra infinita numerable? Esta es una pregunta clásica en teoría de la medida elemental [1, 3] y aunque es bien sabido que la respuesta es negativa, no sabemos que exista en la literatura una prueba sencilla de este hecho. A continuación damos una demostración muy corta de un teorema que demuestra el hecho anterior, y un poco más. El lector encontrará divertido completar los sencillos detalles de nuestro argumento.

Teorema 1 *Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra a lo sumo numerable de subconjuntos de un conjunto X, entonces $\mathcal{A}$ es finita y* $\operatorname{Card}(\mathcal{A}) = 2^n$ *para algún número natural n.*

Demostración: Definamos en X una relación $\sim$ de manera que para $x, y \in X$ se tiene: $x \sim y$ si y sólo si todo miembro de $\mathcal{A}$ que contiene a y también contiene a x. Se verifica fácilmente que $\sim$ tiene las propiedades siguientes:

(a) $\sim$ es una relación de equivalencia en X.

(b) Las clases de equivalencia $C(x)$ son de la forma

$$C(x) = \cap\{A : x \in A, A \in \mathcal{A}\}.$$

(c) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A = \cup\{C(x) : x \in A\}$.

De (b) y del hecho de que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra numerable se deduce que las clases de equivalencia de $\sim$ pertenecen a $\mathcal{A}$. Si hubiese una infinidad de clases de equivalencia entonces, en virtud de (a) y (c), $\mathcal{A}$ sería no-numerable. Por lo tanto el número de clases de equivalencia tiene que ser finito y, una vez más por (a) y (c), $\operatorname{Card}(\mathcal{A}) = 2^n$ para algún número natural n. ∎

Este teorema está en concordancia con el resultado bien conocido [1] (pero mucho más difícil) que afirma que si $\mathcal{E}$ es una familia de subconjuntos de X con $\operatorname{Card}\mathcal{E} \geq 2$ y $\mathcal{A}$ es la mínima σ-álgebra de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{E}$, entonces $\operatorname{Card}\mathcal{A} \leq (\operatorname{Card}\mathcal{E})^{\aleph_0}$. En particular, si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces $\operatorname{Card}\mathcal{A} = 2^n$ para algún $n = 1, 2, \ldots, \aleph_0, c$. Nótese que esto último requiere de la hipótesis del continuo.

Agradecimientos. Agradecemos a uno de los editores de *Miscelánea Matemática* sus valiosos comentarios así como la sugerencia de [2].

Referencias

[1] E. Hewitt and K. Stromberg. *Real and abstract analysis*, Springer Verlag, New York, 1965.

[2] M. Kac. *Statistical independence in probablity, analysis and number theory.* The Carus Mathematical Monographs. Number 12. The Mathematical Association of America. John Wiley and Sons, Inc. 1972.

[3] W. Rudin. *Real and complex analysis.* Second Edition, McGraw Hill Series in Higher Mathematics, 1974.