MISCELÁNEA MATEMÁTICA 26 (1997) 49–57 SMM

Soluciones geométricas a problemas de Máximos y Mínimos

Alfinio Flores Peñafiel
Curriculum & Instruction
Arizona State University
Tempe, AZ 85287-0911

Un problema importante y común que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas es que los alumnos mecanizan o automatizan un algoritmo o proceso sin tener una comprensión cabal de las ideas y conceptos que están detrás. En cálculo es común que los alumnos resuelvan problemas de máximos y mínimos casi mecánicamente: derivando la función de la cantidad que se quiere optimizar, igualando a cero y resolviendo la ecuación resultante. Una vez resuelto el problema, los alumnos ignoran la fase de visión retrospectiva para resolver problemas (Pólya, 1985), no intentan resolver el problema por otros medios o no tratan de ver la solución más claramente. Muchas veces los problemas de máximos y mínimos se pueden resolver sin usar el cálculo diferencial (Niven, 1981). Para ayudar a los alumnos a ver los problemas de otro modo, se presentan en este artículo soluciones geométricas a algunos problemas de optimización, que permitan a los alumnos entender mejor, o a simple vista por qué la solución funciona. Varios de los problemas se pueden resolver también usando métodos algebraicos (Niven, 1981). Un punto importante es que para resolver un problema, no hay que estar *casados* con una técnica de resolución, sino que hay que ser flexibles y estar abiertos a otros métodos de solución. Combinando la utilización de varios métodos, evitaremos la utilización *ciega* de un método. Por otro lado, los problemas presentados ilustran el uso de la estrategia heurística general que es la *particularización*, (Pólya, 1985), a través de una subestrategia, el caso especial de la figura de *mayor simetría* (Schoenfeld, 1985).

El caso especial de *mayor simetría.*

La particularización, que es considerar un caso particular o especial de un tipo de problema, es una estrategia heurística poderosa para resolver problemas. Sin embargo, es necesario no sólo enunciar y describir una estrategia heurística de modo que los alumnos puedan reconocer y apreciar el uso de la estrategia, sino también proporcionar instrucciones que sean suficientemente detalladas para que los estudiantes puedan usar esa estrategia cuando encuentren problemas para los cuales sea apropiada (Schoenfeld, 1985). Dentro de la estrategia heurística que consiste en considerar un caso particular, se pueden distinguir varias subestrategias. Una de ellas es la de considerar casos especiales de objetos simétricos. Muchas veces, en problemas de optimización (máximos y mínimos), utilizar el caso especial de *mayor simetría* puede ayudar a adivinar cuál es la solución. Una vez encontrado el candidato a solución por este medio heurístico (o por otros), se puede demostrar que en efecto es la solución óptima. Los ejemplos y ejercicios que se presentan pueden proporcionar a los alumnos comprensión y práctica en esta estrategia de considerar un caso particular.

Seis problemas de optimización.

Considera los siguientes problemas:

1) De todos los rectángulos de perímetro constante, encontrar el de área máxima.

2) Se levantan dos perpendiculares al diámetro de una semicircunferencia dada. Trazar una tangente de modo que el trapecio rectángulo formado tenga área mínima.

3) Encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en un cuadrado dado (los vértices del rectángulo deben estar sobre los lados del cuadrado y los lados a 45°).

4) De todos los rectángulos inscritos en un círculo dado, encuentra el de área máxima.

5) De todos los triángulos inscritos en un círculo dado, encuentra el de área máxima.

6) De todos los triángulos de perímetro constante y con la misma base, encontrar el de área máxima.

Para cada problema, los alumnos pueden calcular o aproximar valores apoyándose en diferentes tipos de figuras dentro de un cierto rango y sugerir la forma de la figura óptima. A partir de esta exploración con ejemplos concretos, los alumnos pueden ver que las figuras que optimizan tienen en común que son las de *mayor simetría.* El cuadrado es el *más simétrico* de los rectángulos (ejemplos 1, 3, 4), el rectángulo es el más simétrico de los trapecios tangentes al semicírculo, el triángulo isósceles el más simétrico de los triángulos de base fija (ejemplos 5b y 6). Estos son buenos candidatos para optimizar los problemas. Una vez propuesta una solución, una consideración geométrica sencilla en cada caso hace ver por qué es la solución óptima.

Ejemplo 1a) De todos los rectángulos de perímetro constante $2a+2b$, encontrar el de área máxima.

La figura 1 muestra un rectángulo de lados a, b, traslapado parcialmente con un cuadrado de lados $(a+b)/2$ que tienen por tanto el mismo perímetro. Se puede ver que el cuadrado de lado $(a+b)/2$ tiene mayor área que el rectángulo de lados a y b, ya que los rectángulos que sobresalen al traslape tienen la misma altura, pero es mayor la base del rectángulo que es parte del cuadrado, por tanto tiene área mayor.

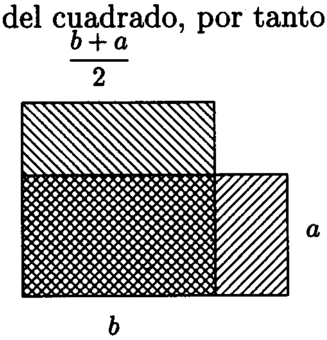

Figura 1:

Ejemplo 1b) Otra forma de enunciar el problema anterior es la siguiente: Si la suma de dos cantidades $a+b$ es constante, el producto ab será máximo cuando a y b sean iguales.

En la siguiente figura, el diámetro del semicírculo es igual a la suma constante $a+b$. La altura h divide al triángulo rectángulo en dos triángulos semejantes, por lo que $b : h = h : a$, por lo tanto la altura del triángulo es $\sqrt{ab}$. Es fácil ver que el máximo de la altura es cuando $a = b$. Y el producto ab será máximo cuando $\sqrt{ab}$ sea máximo.

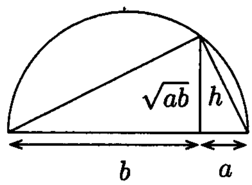

Figura 2:

Esta figura demuestra de paso que la media aritmética $(a+b)/2$ (el radio del círculo) es mayor o igual que la media geométrica $\sqrt{ab}$.

Ejemplo 1c) Otra forma de obtener el resultado anterior. Sea $y = (c-x)x$ el producto de dos números cuya suma es constante c. La gráfica de esta función es una parábola abierta hacia abajo cuyas intersecciones con el eje horizontal son $x = 0$, y $x = c$. Usando la simetría de la parábola, el máximo se obtendrá para $x = c/2$.

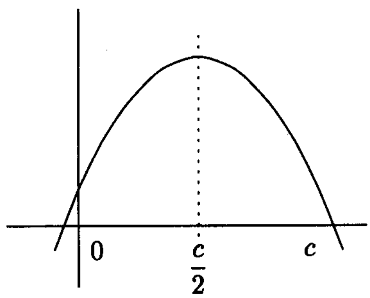

Figura 3:

Ejemplo 2 Se levantan dos perpendiculares al diámetro de una semicircunferencia. Trazar una tangente de modo que el trapecio rectángulo formado tenga área mínima.

El trapecio y el rectángulo se traslapan y difieren en dos triángulos semejantes, uno mayor que el otro ($b > a$), por lo que el área del

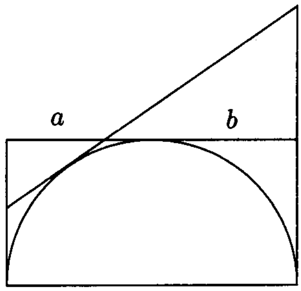

Figura 4:

trapecio es mayor que la del rectángulo. De paso observamos también que el rectángulo tiene perímetro mínimo.

Ejemplo 3 Encontrar el rectángulo de área máxima inscrito en un cuadrado dado (los vértices del rectángulo deben estar sobre los lados del cuadrado y los lados a 45°).

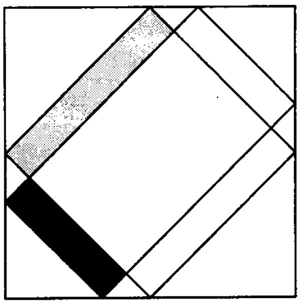

Figura 5:

El área del cuadrado inscrito es mayor que la de cualquier otro rectángulo inscrito, pues el área sombreada del cuadrado (claro) es mayor que el área sombreada (oscuro) del rectángulo, ya que tiene la misma altura, pero la base es mayor en el caso del cuadrado.

Ejemplo 4 De todos los rectángulos inscritos en un círculo dado, encuentra el de área máxima.

El cuadrado tiene área mayor que la de cualquier otro rectángulo. Los triángulos que forman la mitad del cuadrado y del rectángulo tienen

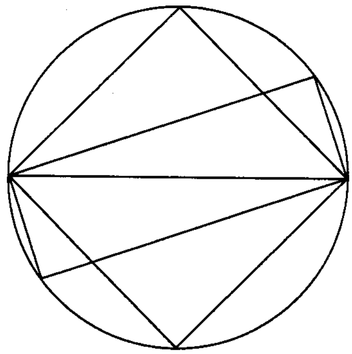

Figura 6:

la misma base, pero la altura del triángulo del cuadrado es mayor.

5a) De todos los triángulos inscritos en un círculo dado, encuentra el de área máxima.

Antes de resolver este problema, resolvamos uno relacionado, más sencillo:

5b) De todos los triángulos inscritos en un arco de círculo (con base en una cuerda fija), encontrar el de área máxima.

Si se fija la base, se puede ver que de todos los posibles triángulos inscritos el isósceles es el que tiene mayor altura, por lo tanto es el de área máxima.

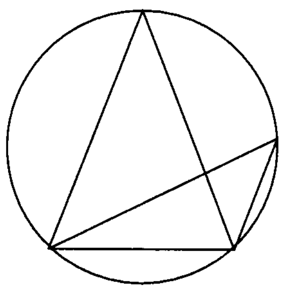

Figura 7:

Ejemplo 6 De todos los triángulos de perímetro constante y con la misma base, encontrar el de área máxima.

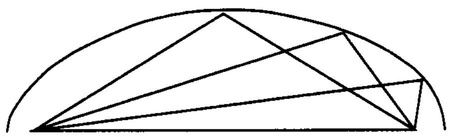

Figura 8:

Si la base es fija y el perímetro también, entoces la suma de los dos lados variables es constante. El lugar geométrico del tercer vértice del triángulo es por tanto una elipse, cuyos focos son los otros dos vértices. El área máxima corresponde a la altura máxima, es decir al punto medio del arco, por lo que el triángulo es isósceles.

Ejercicios

1) De todos los rectángulos de área fija, encontrar el de perímetro menor. (Nota que este problema es *dual* al ejemplo 1. Los dos problemas son de hecho equivalentes.)

2) Termina de resolver el problema 5a). ¿Cuál es el más simétrico de los triángulos? Utiliza el resultado del problema 5b, supón que el triángulo de área máxima tiene lados a, b, c. Fija c, ¿cómo tienen que ser a y b?

3) De todos los triángulos de perímetro fijo, encuentra el de área mayor. ¿Cuál es el más simétrico de los triángulos? Utiliza el resultado del ejemplo 6, supón que el triángulo de área máxima tiene lados a, b, c. Fija c, ¿cómo tienen que ser a y b?

4) *Conjetura.* De todos los hexágonos con el mismo perímetro, ¿cuál es el de mayor área? (¿Cuál es el *más simétrico* de los hexágonos?).

5) *Conjetura.* De todas las figuras planas con el mismo perímetro, ¿cuál es la de mayor área? (¿Cuál es la figura plana más simétrica?).

6) *Conjetura.* De todos los paralelepípedos con la misma superficie lateral, ¿cuál es el de mayor volumen? (¿Cuál es el paralelepípedo más simétrico?)

7) *Conjetura.* De todas las figuras tridimensionales con la misma superficie externa, ¿cuál tiene el máximo volumen? (¿Cuál es la figura de tres dimensiones más simétrica?)

8) Relaciona tu respuesta al ejercicio anterior con la forma de las pompas de jabón o las gotas de agua.

Conclusión.

Los alumnos pueden obtener una mejor comprensión de la naturaleza de las soluciones en problemas de máximos y mínimos utilizando además de la técnica estándar, enfoques alternativos tales como el enfoque geométrico y el uso de la heurística del caso especial de *mayor simetría.* Incluso es posible que el alumno conjeture la solución al problema isoperimétrico y el resultado le parezca plausible. Y aunque hay un largo trecho y una larga historia entre ser plausible y estar demostrado (Pólya, 1984) el alumno puede tener un primer contacto con uno de los grandes problemas en la historia de las matemáticas. En ese artículo Pólya bosqueja algunas fases de la historia del problema isoperimétrico y da ideas de cómo aproximarse a la solución. Otra discusión interesante sobre el problema isoperimétrico se puede encontrar en el capítulo 10 de Pólya (1990).

Referencias

[1] Niven, Ivan. (1981). *Maxima and minima without calculus.* Mathematical Association of America.

[2] Pólya, George. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas.

[3] Pólya, George. (1984). On the isoperimetric theorem: History and strategy. En *George Pólya: Collected papers*, **vol 4**. (p. 579-581). MIT Press.

[4] Pólya, George. (1990). *Mathematics and plausible reasoning, vol. 1: Induction and analogy in mathematics.* Princeton University Press.

[5] Schoenfeld, Alan. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.