Miscelánea Matemática **76** (2023) 9-20 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7602

Cuatro demostraciones de $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$

José Manuel Sánchez Muñoz
Grupo de Innovación Educativa «Pensamiento Matemático»
Universidad Politécnica de Madrid, España
jmanuel.sanchez@educarex.es

1. Introducción

Respecto al número e cabe decir que históricamente es uno de los números con mayor notabilidad de las matemáticas. El primero que adoptó la notación que hoy día es aceptada fue el suizo Leonhard Euler (Basilea, 1707 – San Petersburgo, 1783) en un manuscrito que, aunque estaba fechado al parecer entre 1727 y 1728 según algunas fuentes, se publicó póstumamente en su Opera posthuma (1862), de ahí que consideren que este número que es la base de los logaritmos naturales se le conozca también como *número de Euler* (véase [14, p. 152]). Sin embargo, dicha constante ya era conocida desde tiempos del escocés y descubridor de los logaritmos John Napier (Edimburgo, 1550 – ibid. 1617), por lo que también recibe en ciertos ámbitos el nombre de *constante de Napier*. La constante como tal fue descubierta en 1683 por el suizo Jakob Bernoulli (Basilea, 1655 – ibid. 1705) cuando dedicó sus estudios al interés compuesto (véase [11, p. 166]). La definición clásica de dicho número y que se puede encontrar en multitud de referencias es

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}. \tag{1}$$

Nótese que también se puede definir dicho número a través del siguiente límite

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Pero … ¿cómo podemos hacer dicha afirmación de manera tan ligera? Fijemos por ejemplo $n = 10\,000$ y veamos la diferencia entre dichos

Palabras clave: número de Euler, constante de Napier, desigualdad de Hermite-Schwarz, desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

límites. En el primer caso

$$\left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 2.71814592\cdots$$

y en el segundo

$$\left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000+\frac{1}{2}} = 2.718281831\cdots .$$

Ambos límites se «aproximan» al valor real de e. El primero es exacto hasta el tercer decimal, mientras que el segundo lo es hasta el séptimo. Dicho resultado nos hace apresurarnos a pensar que quizás el segundo límite supusiera una mejor aproximación al valor exacto de dicha constante con respecto al resultado clásico del primero.

Se sabe que para cualquier valor de $n > 1$, entonces

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

En este caso, vamos a presentar una serie de demostraciones que prueban la siguiente desigualdad

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Para demostrarla, plantearemos varios caminos, el primero mediante la utilización de expresiones en series de potencias de Taylor, seguiremos explorando la utilización de dos desigualdades, primero la de Hermite-Hadamard y después la de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz, y finalmente analizaremos una cuarta vía mediante el uso de herramientas del análisis matemático.

2. Demostración por desarrollo en serie de potencias de Taylor

Si se considera el desarrollo en serie de potencias de Taylor de la función $\ln(1+x)$ alrededor del punto $x = 0$ se tiene la siguiente serie alterna

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad -1 < x \leq 1.$$

En la expresión anterior, reemplazamos x por $\frac{1}{n}$, y multiplicamos ambos miembros por n, resultando

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{5n^4} - \cdots .$$

Sustituyendo n por $2n$ y por $-2n$ respectivamente en la expresión anterior se llega a las siguientes dos series:

$$2n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{32n^3} + \frac{1}{80n^4} - \cdots,$$
$$-2n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{32n^3} + \frac{1}{80n^4} - \cdots.$$

Sumando ambas series obtenidas en el último paso resulta

$$2n\left(\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) = 2 + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{40n^4} + \cdots.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos entonces

$$2n \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = 2 + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{40n^4} + \cdots .$$

Dividiendo en la última expresión ambos miembros por dos, y teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, se llega a

$$\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n = 1 + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{80n^4} + \cdots.$$

En este punto, se sustituye n por $n+\frac{1}{2}$, llegándose a la siguiente serie

$$\ln\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{80\left(n+\frac{1}{2}\right)^4} + \cdots.$$

Por lo tanto

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1,$$

luego

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

3. Demostración mediante la desigualdad de Hermite-Hadamard

Los franceses Charles Hermite (Dieuze, 1822 – París, 1901) y su discípulo Jacques Hadamard (Versalles, 1865 – París, 1963) llegaron en 1893 a un resultado fundamental en forma de desigualdad (véase [7]). Entre los resultados más notables obtenidos por ambos autores, el primero demostró la trascendencia del número e en 1882 (véase [12]), y el segundo comparte el privilegio de haber demostrado el teorema de los números primos junto (aunque de manera independiente) al belga Charles-Jean de la Vallée Poussin (Lovaina, 1866 – Bruselas, 1962) en 1896 (véase

[13]). Dicha desigualdad juega un papel fundamental en la *teoría de convexidad (de funciones)*. Veamos el resultado alcanzado por Hermite y Hadamard a continuación (véanse [3] y [4]). Previamente resulta importante conocer formalmente el concepto de *convexidad* en una función.

Figura 1. Charles Hermite (c. 1887) y Jacques Hadamard (c. 1935).

Definición 3.1. Sea $V \subset \mathbb{R}$. Una función $\mathcal{G} : V \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo (o en cualquier subconjunto convexo de algún espacio vectorial), se dice que es convexa si se cumple

$$\mathcal{G}\Big(\zeta m_1 + (1-\zeta) m_2\Big) \leq \zeta\, \mathcal{G}(m_1) + (1-\zeta)\, \mathcal{G}(m_2), \tag{3}$$

para cualesquiera $m_1, m_2 \in V$ y $\zeta \in [0,1]$. En resumen, una función es convexa si y solo si su epigrafo, esto es, el conjunto de puntos situados en o sobre el grafo, es un conjunto convexo.

Teorema 3.2 (Desigualdad de Hermite-Hadamard)**.** *Si una función $\mathcal{G}(x)$ es diferenciable en el intervalo $[a,b]$ y su derivada es una función creciente en (a,b), entonces para cualquier $m_1, m_2 \in [a,b]$ tales que $m_1 \neq m_2$, se cumple la siguiente desigualdad*

$$\mathcal{G}\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right) \leq \frac{1}{m_2 - m_1} \int\limits_{m_1}^{m_2} \mathcal{G}(x)\, dx \leq \frac{\mathcal{G}(m_1) + \mathcal{G}(m_2)}{2}\,. \tag{4}$$

Demostración. Sea $\mathcal{G}(x)$ una función convexa en el intervalo $[m_1, m_2]$. Considerando $\zeta = \frac{1}{2}$ en la expresión (3) para $x, y \in [m_1, m_2]$, se tiene

$$\mathcal{G}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y)}{2}\,. \tag{5}$$

Considerando $x = \zeta\, m_1 + (1-\zeta)m_2$ e $y = (1-\zeta)m_1 + \zeta\, m_2$ en la expresión (5), se obtiene

$$2\mathcal{G}\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right) \leq \mathcal{G}\Big(\zeta\, m_1 + (1-\zeta)m_2\Big) + \mathcal{G}\Big((1-\zeta)m_1 + \zeta\, m_2\Big). \quad (6)$$

Integrando la desigualdad de la expresión (6) con respecto a ζ sobre $[0,1]$, resulta

$$2\mathcal{G}\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right) \leq \int_0^1 \mathcal{G}\Big(\zeta\, m_1 + (1-\zeta)m_2\Big)\, d\zeta \; +$$

$$+ \int_0^1 \mathcal{G}\big((1-\zeta)m_1 + \zeta\, m_2\big)\, d\zeta = \frac{2}{m_2-m_1}\int_{m_1}^{m_2} \mathcal{G}(x)\, dx.$$

Para demostrar la segunda parte de la desigualdad de la expresión (4), se utiliza la definición de convexidad para $\zeta \in [0,1]$, resultando

$$\mathcal{G}\Big(\zeta\, m_1 + (1-\zeta)m_2\Big) \leq \zeta\, \mathcal{G}(m_1) + (1-\zeta)\, \mathcal{G}(m_2),$$

y

$$\mathcal{G}\Big((1-\zeta)m_1 + \zeta\, m_2\Big) \leq (1-\zeta)\, \mathcal{G}(m_1) + \zeta\, \mathcal{G}(m_2),$$

Sumando las dos últimas desigualdades, se obtiene

$$\mathcal{G}\Big(\zeta\, m_1 + (1-\zeta)m_2\Big) + \mathcal{G}\Big((1-\zeta)m_1 + \zeta\, m_2\Big) \leq \mathcal{G}(m_1) + \mathcal{G}(m_2). \quad (7)$$

Integrando la desigualdad de la expresión (7) con respecto a ζ en el intervalo $[0,1]$, se tiene

$$\int_0^1 \mathcal{G}\Big(\zeta\, m_1 + (1-\zeta)m_2\Big)\, d\zeta + \int_0^1 \mathcal{G}\Big((1-\zeta)m_1 + \zeta\, m_2\Big)\, d\zeta \leq$$

$$\leq \Big(\mathcal{G}(m_1) - \mathcal{G}(m_2)\Big) \int_0^1 d\zeta\,.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$\frac{2}{m_2-m_1}\int_{m_1}^{m_2} \mathcal{G}(x)\, dx \leq \mathcal{G}(m_1) + \mathcal{G}(m_2). \qquad \square$$

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[n, n+1]$ (figura 2). Se puede observar que la derivada $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ es una función creciente

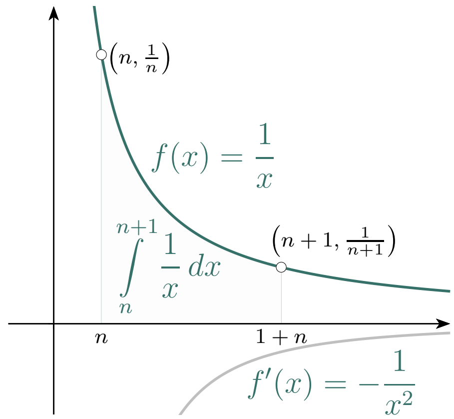

Figura 2.

en el intervalo $(n, n+1)$. Entonces se cumple la desigualdad de Hermite-Hadamard[1]. Aplicando dicha desigualdad a la función cuando $x_1 = n$ y $x_2 = n+1$ resulta

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n+n+1}{2}\right) &< \frac{1}{n+1-n} \int_n^{n+1} f(x)\, dx, \\ \frac{2}{2n+1} &< \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \\ \frac{1}{n+\frac{1}{2}} &< \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \\ 1 &< \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

lo que concluye en

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

4. Demostración mediante la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

En 1821, el francés Augustin Cauchy (París, 1789 – Sceaux, 1857) publicó un trabajo en el que aparecía por primera vez la desigualdad

[1] Si en la demostración de dicha desigualdad se tiene que

$$\mathcal{G}\Big(\zeta m_1 + (1-\zeta)m_2\Big) < \zeta\, \mathcal{G}(m_1) + (1-\zeta)\, \mathcal{G}(m_2),$$

para algún ζ_0 y $\mathcal{G}$ es continua, entonces ocurre en un entorno de ζ_0, por lo que al integrar la desigualdad resulta entonces estricta.

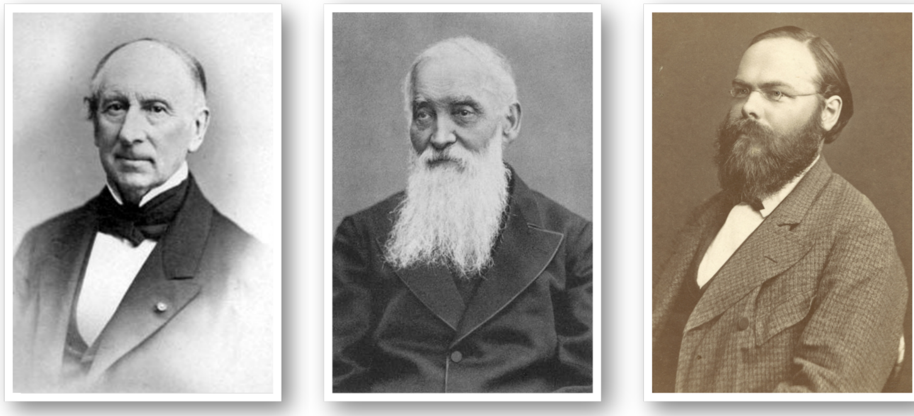

Figura 3. Augustin Louis Cauchy (c. 1857), Viktor Yákovlevich Bunyakovsky (1888) y Hermann Schwarz (c. 1890).

en cuestión en forma de sumas. Cauchy debe ser considerado como el matemático que formalizó el cálculo infinitesimal, ayudándose de los conceptos aritméticos sobre el campo (o cuerpo) de los números reales para otorgar el rigor que necesitaban los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedará en segundo plano con los trabajos del francés. Además posee el privilegio de haber sido uno de los matemáticos más prolíficos, únicamente superado por el suizo Leonhard Euler, el húngaro Paul Erdös (Budapest, 1913 – Varsovia, 1996) y el inglés Arthur Cayley (Richmond, 1821 – Cambridge, 1895).

En 1859, el ruso Viktor Bunyakovsky (Bar, 1804 – San Petersburgo, 1889) cuyo director de tesis había sido el propio Cauchy, redefinió la desigualdad del francés en forma de integrales, demostrándola para el caso de un espacio de dimensión infinita. Aparte de sus responsabilidades como docente de la Academia Naval de San Petersburgo de 1828 a 1860, y de la Universidad de dicha ciudad de 1846 a 1880, Bunyakovsky dedicó sus esfuerzos a investigar en campos donde realizó importantes contribuciones como en teoría de números o teoría de probabilidades.

En 1888, el alemán Herman Schwarz (Hermsdorf, 1843 – Berlín, 1921) publicaba su segundo trabajo. Schwarz que paradójicamente no había estudiado en Berlín matemáticas sino química, se dejó persuadir por Ernst Kummer (Żary, 1810 – Berlín, 1893) y Karl Weierstrass (Ennigerloh, 1815 – Berlín, 1897) para que se centrara en la primera disciplina, ofreciéndose ambos a dirigir su tesis doctoral. Se doctoró poco después en 1864 y comenzó a partir de ese momento una prolífica carrera. Sus trabajos se centraron fundamentalmente en análisis complejo, geometría diferencial y el cálculo de variaciones entre otros. Desarrolló un caso especial de la famosa desigualdad redefinida por el ruso Bunyakovsky que veremos más adelante. Dicha desigualdad es ampliamente utilizada en matemáticas en campos tan diversos como el análisis, la geometría o la teoría de la probabilidad.

Teorema 4.1 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)**.** *Supónganse dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ integrables en un intervalo $[a,b]$. Se cumple*

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b \Big(f(x)\Big)^2 dx \cdot \int_a^b \Big(g(x)\Big)^2 dx.$$

Demostración. Considérese la función $h(\lambda) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la expresión cuadrática $h(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Completando cuadrados, resulta

$$h(\lambda) = a\left(\lambda + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,.$$

Supóngase que $h(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, en particular para $\lambda = -\frac{b}{2a}$, entonces

$$h\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0.$$

Por tanto, si $h(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0,$$

luego

$$b^2 - 4ac \leq 0.$$

Sea la función $h(\lambda) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la expresión

$$h(\lambda) = \int_a^b \Big(\lambda\, f(x) - g(x)\Big)^2 dx,$$

claramente $h(\lambda)$ está bien definida y además $h(\lambda) > 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$\begin{aligned} h(\lambda) = \int_a^b \Big(\lambda\, f(x) - g(x)\Big)^2 dx = \\ = \left(\int_a^b \Big(f(x)\Big)^2 dx\right)\lambda^2 - 2\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)\lambda + \int_a^b \Big(g(x)\Big)^2 dx = \\ = a\lambda^2 - 2b\lambda + c. \end{aligned}$$

Como se debe cumplir (deducido anteriormente) que $b^2 - 4ac \leq 0$, entonces

$$\left(-2\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 - 4\int\limits_a^b \Big(f(x)\Big)^2 dx \cdot \int\limits_a^b \Big(g(x)\Big)^2 dx \leq 0,$$

luego

$$4\left(\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq 4\int\limits_a^b \Big(f(x)\Big)^2 dx \cdot \int\limits_a^b \Big(g(x)\Big)^2 dx,$$

y finalmente

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \int\limits_a^b \Big(f(x)\Big)^2 dx \cdot \int\limits_a^b \Big(g(x)\Big)^2 dx. \qquad \square$$

Consideremos en este caso las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ambas integrables en un intervalo $[a, b]$ (con $a, b > 0$) sobre un espacio vectorial euclidiano (véase [1, p. 166]). En particular, considérense en general que dichos extremos son $a = n$ y $b = n + 1$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario. Dichas funciones son linealmente independientes por lo que su producto escalar resulta

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx > 0.$$

Además se cumple que

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz a las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas, el miembro izquierdo de la desigualdad resulta

$$\left(\int\limits_n^{n+1} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx\right)^2 = \left(x\Big|_n^{n+1}\right)^2 = 1.$$

Veamos ahora el miembro derecho de la desigualdad

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} x\,dx \cdot \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_n^{n+1} \cdot \left.\ln x\right|_n^{n+1}, \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n^2}{2}\right) \cdot \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big), \\ &= \left(\frac{n^2+2n+1}{2} - \frac{n^2}{2}\right) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

5. Demostración mediante herramientas analíticas

Definimos la función $\mathcal{F}(n)$ para $n > 0$ mediante la ecuación

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\mathcal{F}(n)} = e.$$

Resolviendo dicha ecuación para $\mathcal{F}(n)$ resulta que

$$\mathcal{F}(n) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n. \tag{8}$$

Veamos en primer lugar que la función $\mathcal{F}(n)$ es monótonamente creciente. Es decir, para todo $n \geq 1$, $\mathcal{F}'(n) > 0$. La derivada de dicha función resulta

$$\mathcal{F}'(n) = \frac{1}{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1. \tag{9}$$

Para demostrar que $\mathcal{F}'(n) > 0$, consideremos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), \\ g(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

La diferencia de las derivadas primeras de las dos funciones anteriores resulta

$$g'(x) - f'(x) = \frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)^{3/2}}\,.$$

Como $(x+2) > 2\sqrt{1+x}$ para todo $x > 0$, entonces

$$g'(x) - f'(x) > 0,$$

y por lo tanto

$$\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,.$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{n}$ en la desigualdad anterior y elevando al cuadrado ambos miembros se llega a

$$\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2} > 1.$$

De la expresión (9) y la desigualdad anterior, resulta que $\mathcal{F}'(n) > 0$.

Por lo tanto, la función de la expresión (8) resulta estrictamente creciente. Para demostrar que dicha función está acotada superiormente, veamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Sustituyendo la serie de potencias

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}\,,\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}\,,\\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Como la función $\mathcal{F}(n)$ es estrictamente creciente, y $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}(n) = \frac{1}{2}$, entonces se puede concluir que $\mathcal{F}(n) < \frac{1}{2}$, y por lo tanto

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\mathcal{F}(n)} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

Bibliografía

[1] S. Axler, *Linear algebra done right*, 3.ª ed., New York, USA: Springer-Verlag, 2015.
[2] C. W. Barnes, «Euler's constant and e», *American Mathematical Monthly*, vol. 91, núm. 7, 1984, 428–430.
[3] E. F. Beckenbach y R. H. Bing, «On generalized convex functions», *Transactions of The American Mathematical Society*, vol. 58, núm. 2, 1945, 167–183.
[4] M. Bessenyei, «The hermite-hadamard inequality simplices», *American Mathematical Monthly*, vol. 115, núm. 4, 2008, 339–345.
[5] H. J. Brothers y J. A. Knox, «New closed-form approximations to the logarithmic constant e», *The Mathematical Intelligencer*, vol. 20, núm. 4, 1998, 25–29.
[6] T. N. T. Goodman, «Maximum products and $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$», *American Mathematical Monthly*, vol. 93, núm. 8, 1986, 638–640.
[7] J. Hadamard, «étude sur les properiétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par riemann», *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 9, núm. 8, 1893, 171–215.
[8] S. K. Khattri, «Three proofs of the inequality $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+0.5}$», *American Mathematical Monthly*, vol. 117, núm. 3, 2010, 272–277.
[9] J. A. Knox y H. J. Brothers, «Novel series-based approximations to e», *The College Mathematics Journal*, vol. 30, núm. 4, 1999, 269–275.
[10] A. N. Kolmogórov y S. V. Fomin, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, 2.ª ed., MIR, 1975.
[11] C. A. Pickover, *The math book: From pythagoras to the 57th dimension, 250 milestones in the history of mathematics*, Sterling Publishing Company, 2009.
[12] J. M. Sánchez Muñoz, «Hermite y la trascendencia de e», *Pensamiento Matemático*, vol. 1, núm. 1, 2011, 1–14.
[13] ———, «Riemann, más que una hipótesis», G.I.E. «Pensamiento Matemático», 1.ª ed., 2021.
[14] J. Tanton, *Encyclopedia of mathematics*, 2.ª ed., Facts-on-File, 2005.
[15] C. L. Wang, «Simple inequalities and old limits», *American Mathematical Monthly*, vol. 96, núm. 4, 1989, 354–355.
[16] H. Yang y H. Yang, «The arithmetic-geometric mean inequality and the constant e», *Mathematics Magazine*, vol. 74, núm. 4, 2001, 321–323.