INDICE

NOTAS DE CALCULO

Por: Dr. Santiago López de Medrano*

I. INTRODUCCION

1. Organización del curso.

Un curso de Cálculo Diferencial e Integral se puede organizar de dos formas distintas. Una, la formal, parte de los conceptos más simples desde el punto de vista lógico y va desarrollando paso a paso los demás, hasta llegar a los conceptos fundamentales de derivada e integral, para finalizar con las aplicaciones de éstos. Este es el desarrollo lógico, coherente y ordenado del cálculo, donde cada nuevo concepto se define o construye con precisión en base a los anteriores (a excepción de los conceptos más elementales, como el de conjunto) y todas las proposiciones se demuestran en forma rigurosa. Dentro de esta presentación el orden de los temas es el siguiente: Conjuntos, Funciones, Números reales, Límites, continuidad, Derivación y sus aplicaciones (problemas geométricos y físicos, máximos y mínimos) e Integración y sus aplicaciones (área

* Investigador de Tiempo completo del Instituto de Matemáticas y profesor de Asignatura de la Facultad de Ciencias.

y volúmenes, momentos, trabajos, etc.).

La segunda forma, la histórica, presenta los conceptos en la forma y medio que fueron apareciendo. Los conceptos del cálculo no aparecieron repentinamente en la cabeza de los que lo inventaron, en forma clara y definida, sino que se fueron gestando poco a poco y sufriendo considerables modificaciones en su desarrollo, partiendo de ideas vagas e intuitivas hasta llegar a la forma rigurosa y precisa que hoy conocemos. El origen de estos conceptos y sus sucesivas transformaciones se basa tanto en las necesidades surgidas de la actividad práctica y científica de los hombres, como de las de precisión y generalización que surgen del desarrollo propio de la teoría. La aparición de los temas en el orden histírico es, en forma esquemática, el siguiente: Problemas geométricos y físicos (áreas y volúmenes, tangentes, velocidad, máxima y mínima, etc.). Funciones, Derivación e Integración, Límites y Continuidad, Números Reales y Conjuntos, y cada uno de los temas va ligado con sus aplicaciones y con el desarrollo de todos los anteriores, así como de algunos nuevos y más avanzados. En términos generales el orden es el opuesto del de la presentación formal.

El aspecto lógico-formal debe ser parte de la formación de todo científico, para desarrollar su capacidad de análisis riguroso y de deducción lógica, así como para que conozca los métodos más importantes de las matemáticas de este siglo. Pero el aspecto histórico-intuitivo es también sumamente importante en su formación. Por una parte significa una presentación más viva de las matemáticas, vinculándola con los personajes y épocas históricas que dieron lugar a ellas, así como con los problemas prácticos, científicos y filosóficos que las motivaron. Por otra parte, significa la presentación de la génesis de los conceptos, de todo un proceso que, a partir de ideas vagas e intuitivas y a través de tentativas fructuosas o fallidas, de avances geniales y de desviaciones y exageraciones, culmina con la formulación lógica y rigurosa de los conceptos (la cual representa una base para un nuevo salto hacia lo desconocido y, por otra parte, no puede considerarse nunca como definitiva). Todo investigador científico (ya sea "puro" o "aplicado") debe conocer este proceso, pues los problemas que deberá enfrentar por lo general no están dados en forma de definiciones y axiomas, sobre los cuales aplicar sus capacidades deductivas; por el contrario deberá saber manejar intuiciones, analogías y conceptos más o menos vagos e imprecisos y llegar a través de ellos a resultados prácticos e hipótesis de trabajo, o a la formulación rigurosa de dichos conceptos. Una definición, por ejemplo, es no sólo un punto de partida para un desarrollo lógico, sino también el resultado de un proceso, del proceso de definir. Parte de la tarea de un científico consiste en transformar lo confuso e impreciso del mundo exterior o de su pensamiento en algo claro y preciso. Esto se aplica igualmente al descubrimiento personal, como a la asimilación de lo ya conocido. Desde el punto de vista pedagógico este desarrollo es el más natural, pues parte de lo conocido e intuitivo a lo desconocido y riguroso en forma gradual, creando un puente sobre ese abismo entre lo concreto y lo abstracto, que muchos alumnos encuentran tan tan difícil de saltar. De todo lo anterior se desprende, en forma redundante, que este aspecto es también fundamental en la formación de aquellos estudiantes de las ciencias que se dediquen a la docencia, a cualquier nivel.

En consecuencia, estos dos aspectos deben combinarse en un curso de cálculo, pero, debido a la premura del tiempo (porque un concurso histórico, que incluyere en forma natural al aspecto formal, sería demasiado largo) y a la disparidad en el orden de presentación, se hace necesaria la presentación del cálculo a través de dos cursos simultáneos: uno, lógico-formal, y otro, histórico-intuitivo (que incluirá las motivaciones y aplicaciones teóricas y prácticas). Esto no significa caer, por un lado, en el formalismo extremo, y, por el otro, en un historicismo enciclopédico y cronológico. La división no puede ser tan tajante y se aprovecharán las oportunidades de vincular uno con otro. En ambos casos la motivación del alumno se basará en sus intuiciones y conocimientos previos (que no son de ninguna manera iguales a los del matemático formado ni a los de los creadores del cálculo) y en las posibles aplicaciones, teóricas y prácticas, a las diversas ramas del conocimiento.

Este es el proyecto del curso, proyecto que no está aún definido en detalle. Su realización dependerá de la participación activa de alumnos, ayudantes y maestros, y de la claridad que tengan todos ellos de los objetivos buscados.

R E F E R E N C I A S

M. Frechet, Las Matemáticas y lo Concreto. Colección Problemas Científicos y Filosóficos, vol. 10. UNAM, 1958. (Ver, en especial, los dos primeros capítulos)

M. Lara, Editor, Antología de Matemáticas (2 volúmenes) Lecturas Universitarias, UNAM, 1971.

S. López de Medrano, Principios y Métodos de la enseñanza de las matemáticas en el CCH. Revista Matemática, Vol. 8. (donde se presenta un enfoque similar sobre la enseñanza de las matemáticas, especialmente a nivel medio).

2. El Cálculo como estudio del movimiento.

El cambio y el movimiento son los signos más característicos del mundo que nos rodea, y esto es más patente en nuestra época que en todas las anteriores. Por todas partes vemos cosas que nacen, se transforman y mueren y objetos que se desplazan vertiginosamente: los seres vivos, las poblaciones, las ciudades, los sistemas, económicos y políticos, las costumbres y las ideas; los vehículos y los proyectiles, las partículas subatómicas y las estrellas. Todo está en permanente cambio y en constante movimiento. Si para los antiguos griegos la flecha en movimiento, que no podían seguir con la vista, era el símbolo de la velocidad, hoy podemos transportarnos a velocidades mucho mayores. Si para ellos los ríos y las mareas eran el símbolo del flujo y el movimiento, hoy sabemos que el lago más apacible está formado por moléculas que se mueven y chocan entre sí en forma caótica y vertiginosa. Si para ellos la tierra y los cuerpos celestes representaban los estático y lo inmutable, hoy sabemos que incluso las gigantescas nebulosas tienen un ciclo de vida y se alejan unas de las otras a velocidades cercanas a la de la luz. Pocas son las cosas que podemos considerar fijas e inmutables por el transcurso de nuestra vida. Sabemos que ninguna es eterna.

Y sin embargo todas las matemáticas anteriores al cálculo (la aritmética y el álgebra, la geometría euclideana y la analítica) siendo un reflejo de la realidad circundante al hombre, eran matemáticas de lo estático y no reflejaban este carácter cambiante de la realidad, mas que en forma secundaria y superficial.

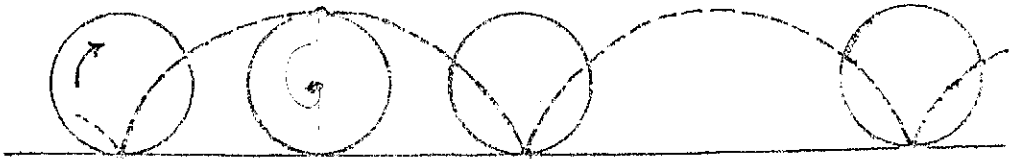
El cálculo incorpora a las matemáticas las ideas de cambio y movimiento y nos permite estudiar y comprender algunos de sus aspectos. Para ilustrar esto vamos a considerar varias situaciones de objetos en movimiento y ver en que forma interviene el cálculo para resolver alguno de los problemas que plantean.

A). Un tren se desplaza de la ciudad A a la Ciudad B a una velocidad constante de 100 km., por hora. La distancia entre las ciudades es de 300 Km., y el tren parte de A a las 12 del día.

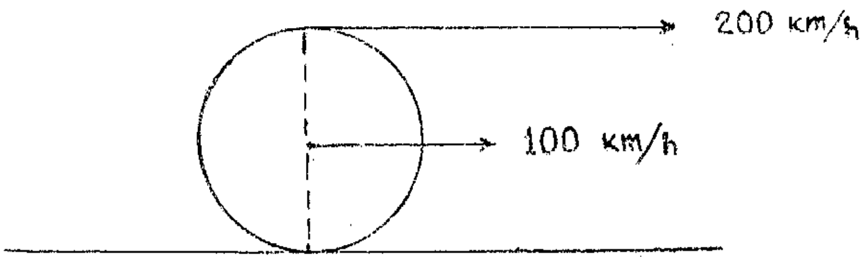
¿Qué podemos decir acerca de este tren en movimiento? En primer lugar podemos decir a qué hora va a llegar a la ciudad B: a las 3 de la tarde, también podemos decir donde se encuentra el tren en un momento dado (a la 1 de la tarde se encuentra a 100 Km. de la ciudad A, etc.) y, recíprocamente, dado un punto intermedio del trayecto podemos decir en que momento pasará el tren por ahí (por ejemplo, por el punto medio pasará a la 1:30). Para esto no hace falta saber cálculo, lo único que se necesita es saber multiplicar y dividir.

Esto es todo lo que necesitamos saber si consideramos al tren en su conjunto. Pero también puede interesarnos saber como se mueven las distintas partes del tren (si nos preocupa la posibilidad de que alguna de ellas se pueda romper). Por ejemplo, podemos considerar las distintas partes de una rueda. El centro de la rueda se desplaza igual que el tren en su conjunto, pero los demás puntos de la rueda no sólo se desplazan sino que suben y bajan al ir girando ésta. Veamos que pasa, por ejemplo, con un punto que está sobre el borde exterior de la rueda. Este punto en un cierto momento está sobre el riel, para alzarse inmediatamente después hasta llegar a estar encima del -

eje y descender nuevamente hasta volver a estar en contacto con el - riel, iniciando un nuevo ciclo.



La trayectoria que describe este punto recibe el nombre de <u>ci-cloide.</u> Algunas cosas podemos decir sobre el movimiento de este punto. Por ejemplo, sabiendo el diámetro de la rueda y haciendo un pequeño cálculo (que haremos en un capítulo posterior) podemos decir a qué altura se encuentra el punto en un momento dado, etc. También - podemos decir que en el instante en que el punto está sobre el riel su velocidad es nula (suponemos en todo esto que el riel está quieto y que la rueda gira, pero no resbala) y que en los instantes en que alcanza su altura máxima (como en el punto B de la figura) su velocidad es de 200 Km., por hora. Esto se puede ver si pensamos que la línea vertical que une el punto con el riel es una palanca rígida cuya base está fija sobre el riel y cuyo punto medio está sobre el eje de la rueda:

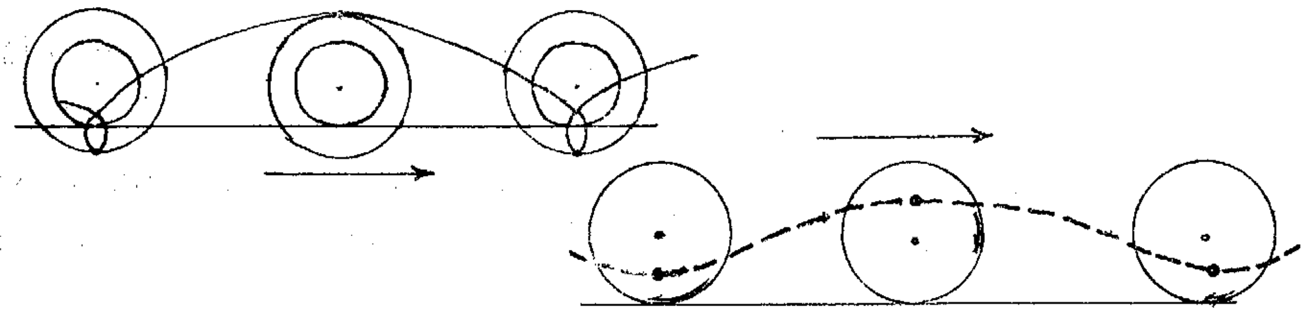


Esto lo podemos hacer sin necesidad de saber cálculo, pués sólo estamos manejando algunas ideas intuitivas sobre el movimiento. -

El lector que no tenga costumbre de manejar estas intuiciones tendrá razón en protestar. Para convencerlo plenamente, y para poder definirle con precisión lo que es esta velocidad "instantánea", -- tendremos que utilizar el cálculo que iremos desarrollando.

Otra pregunta que podemos hacernos es la de calcular la distancia total recorrida por el punto, para lo cual debemos encontrar la longitud de cada arco de cicloide. Para esto sí nos es imprescindible el cálculo diferencial e integral.

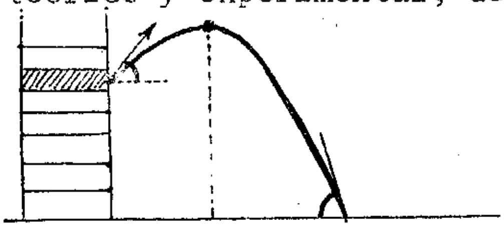
Consideraciones similares podemos hacer sobre un punto que se encuentre entre el borde y el eje de la rueda, o sobre un punto que se encuentre sobre la ceja que sobresale al borde de la rueda y que en ocasiones se encuentra por debajo del punto de contacto sobre el riel. Estos puntos describen curvas conocidas como cicloide corta y cicloide larga, respectivamente.



Solo haremos notar que los puntos de la ceja que se encuentran bajo el nivel del riel se mueven en dirección contraria a la del - tren. ¡Por más aprisa que corra un tren en todo momento hay partes de él que se mueven en dirección contraria!

B) Un objeto es lanzado desde el sexto piso de la torre de -- Ciencias.

¿Qué podemos decir en este caso? Hay muchas preguntas que nos podemos hacer. Sabiendo la velocidad con que es lanzado el objeto y el ángulo con que sale podemos calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo, la máxima altura que alcanza, la velocidad y el ángulo con que choca con el suelo, la distancia entre el punto al que cae de la base de la torre, etc. De hecho podemos describir la -- trayectoria completa del objeto (que es una parábola) y decir en todo momento cual es su posición. Otro tipo de preguntas que nos podemos hacer es, sabiendo la velocidad que le podemos imprimir, ¿Con qué ángulo lo debemos lanzar para que alcance una distancia máxima de la base de la torre? ¿Cuál es ésta distancia máxima? (o, en otra forma, ¿Se puede uno tirar un clavado de la Torre de Ciencias a la fuente de Prometeo?). Todas estas preguntas se pueden contestar - utilizando el cálculo, y aunque muchas de ellas no requieren más - que las fórmulas de Galileo, estas fórmulas se pueden deducir de - las leyes generales de la mecánica utilizando el cálculo. Galileo las obtuvo, antes de que se inventara el cálculo, gracias a su profundo conocimiento teórico y experimental, del movimiento.

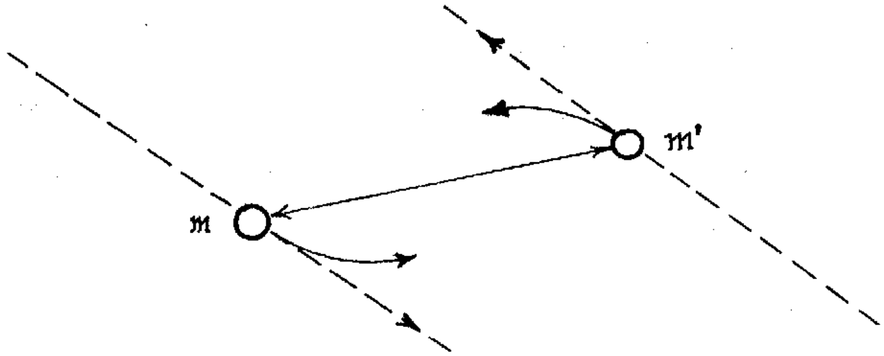


C) Movimiento planetario. En este caso tenemos dos cuerpos - moviéndose en el espacio. Cada uno de ellos atrae al otro según la ley de la gravitación universal.

Son muchas las preguntas que nos podemos hacer aquí, pero contentémosnos con el problema de describir aunque sea a grandes rasgos (es decir, cualitativamente) este movimiento. ¿Chocan los cuerpos? ¿Se alejan uno del otro indefinidamente? Supongamos que conocemos - la posición y las velocidades de los dos cuerpos en un momento dado así como sus masas. La ley de la gravitación universal nos dice - que exite una fuerza entre ellos dada por la siguiente fórmula

$$F = G \frac{m \quad m'}{r^2}$$

donde G es un número fijo que es igual (hasta donde sabemos) para todos los cuerpos; m,m' son las masas de los dos cuerpos y r es la distancia que los separa. Suponiendo que las masas no varían, lo único que puede cambiar durante el movimiento es r.



Analicemos este problema. En primer lugar cada cuerpo se está moviendo, es decir, está cambiando de posición. Si no fuera por la presencia del otro, cada cuerpo cambiaría de posición de manera uniforme en línea recta (según la línea punteada). Pero debido a dicha presencia cada cuerpo es atraído hacia el otro por la fuerza de la gravedad, lo cual hace que cambie la manera en que cambia de posición, pero como resultado de esto cambia la distancia entre ellos y por lo tanto la fuerza con que se atraen y en consecuencia la manera en que cambia de posición. Es decir, el cambio del cambio de posición depende de la posición y por lo tanto el cambio del cambio - del cambio de posición está producido precisamente por el cambio de posición. Esto produce a su vez....

Está claro que por ese camino sólo logramos hacernos cada vez más bolas. La situación es en verdad compleja.

Isaac Newton (1642-1727) inventó el cálculo para resolver este problema. Gracias a él pudo definir lo que significa el cambio del cambio, etc., y establecer la relación que existe entre la fuerza de atracción y estos cambios, finalmente utilizó todo esto para describir y calcular efectivamente el movimiento planetario y deducir las leyes de Kepler. En particular dedujo la primera de éstas: los planetas giran en orbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el sol. Además descubrió la posibilidad de órbitas parabólicas e hiperbólicas, como las de algunos cometas que pasan una vez junto al sol para no regresar jamás.

(El cálculo diferencial e integral también fué inventado por Gottfied Wilhelm von Leibniz (1646-1716) motivado por otros problemas, y a el se debe el nombre con que hoy lo conocemos. Newton lo llamó el "método de las fluxiones").

En este problema es esencial el cálculo. Ninguna de nuestras intuiciones sobre el movimiento nos permiten suplir esta importante herramienta. Mediante él podemos expresar con precisión la relación entre los distintos cambios y cambios de cambios a través de una ecuación (las ecuaciones de este tipo se llaman ecuaciones diferenciales) a partir de la cual podemos deducir mediante operaciones simbólicas las relaciones que buscamos.

El impacto de esto fue enorme. Se pudieron calcular con precisión las posiciones de la luna y los planetas y el propio movimiento de la tierra. El cálculo transformó y por completo el panorama científico de la época y la mayor parte de los matemáticos del siglo -

XVIII dedicaron sus mejores esfuerzos a desarrollarlo y a aplicarlo, obteniendo impresionantes resultados. Los hemanos Jakob y Johann Bernoulli resolvieron importantes problemas geométricos y de movimientos y Euler, Lagrange y Laplace desarrollaron la Mecánica Analítica en forma espectacular, y lograron nuevas formulaciones de las leyes fundamentales e importantes resultados sobre el movimiento de los cuerpos rígidos, de los planetas y también de los fluidos. Baste dar como ejemplo el complicado movimiento de un trompo, el cual gira alrededor de un eje que a su vez va girando. Toda la Física a partir de Newton y hasta nuestra época utiliza los conceptos y las herramientas del cálculo y de sus desarrollos posteriores de manera fundamental. Posteriormente veremos aplicaciones del cálculo a las más diversas ramas de la actividad humana.

Pero los enormes éxitos logrados por el cálculo llevaron a los hombres de ciencia a exagerar su importancia (Veremos como las exageraciones aparecen vez tras vez acompañándo a los grandes descubrimientos científicos). El cálculo y la mecánica se tomaron como la panacea universal que permitía resolver cualquier problema (e incluso se llegó a pensar que el campo de las matemáticas y la ciencia se hallaba prácticamente agotado, lo cual se ha dicho en varias ocasiones, incluso en esta década). Laplace formuló esta posición con gran claridad:

"Una inteligencia que, en un instante dado, conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la posición respectiva de los seres que la componen, y que además fuera tan vasta que pudiera someter estos datos al análisis, abarcaría en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo así como los del más pequeño de los átomos: nada sería dudoso para ella y tanto el futuro como el pasado estaría presente ante -- sus ojos. La mente humana ofrece un débil bosquejo de esta inteligencia en la perfección que ha logrado dar a la Astronomía " (Essai philosophique sur les probabilités, 1814).

El propio desarrollo de las matemáticas y la física, para no mencionar los fracasos a que ha conducido en las ciencias del hombre y la sociedad, ha demostrado que tanto el mecanismo (la suposición de que el universo es una inmensa maquinaria sujeta a leyes rígidas como las de la mecánica) como el determinismo (la suposición de que el estado actual del universo determina todo su pasado y futuro) son posiciones insostenibles La inmensa complejidad del universo es algo que vamos comprendiendo gradualmente y cada vez que creemos haberla abarcado en una sola teoría (¡para no hablar de una fórmula!) nos sorprende con un fenómeno desconocido que da lugar a un nuevo e intenso desarrollo científico.

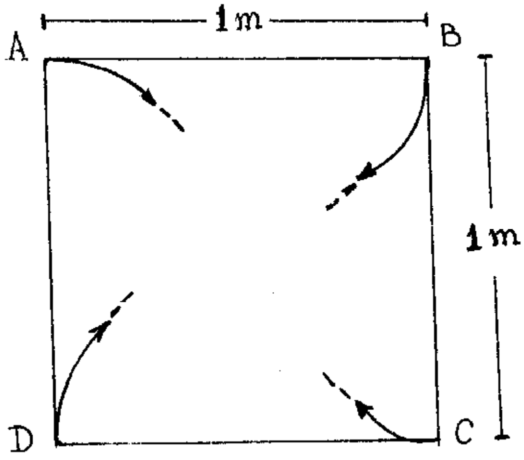
D) El problema de los tres cuerpos. La situación es similar a la del caso anterior, sólo que tenemos tres cuerpos en lugar de dos.

Habiendo resuelto el problema de los dos cuerpos lo natural es, que el siguiente paso sea el de resolverlo para -- tres. Utilizando el cálculo y la ley de gravitación universal planteamos las ecuaciones diferenciales, etc. Pero el etc. nos presenta un serio problema: hasta ahora nadie ha podido resolver dichas ecuaciones. Ni el poderosísimo cálculo, ni ninguna de las ramas más modernas de las matemáticas, nos han permitido predecir, si un sistema de tres cuerpos permanecerá girando eternamente en un movimiento periódico y regular (como en el caso del apacible movimiento kepleriano) o si se producirá un choque, o si algún cuerpo se escapará del sistema para no volver, excepto en algunos casos muy especiales. En la mayor parte de los casos sólo se pueden obtener resultados aproximados que no permiten decidir el comportamiento del sistema en períodos largos de tiempo. Hoy en día destacados matemáticos investigan este problema, utilizando los métodos más modernos de las matemáticas (y quizá alguno de nuestros lectores haga en lo futuro una contribución importante).

El proyecto de Laplace fracasa: no hablemos ya de todos los seres del universo, con soló considerar tres de ellos completamente simples, ya nos enfrentamos a problemas muy serios. Quizá se llegue a desarrollar una herramienta matemática que nos permita resolverlos, pero 3 siglos de intentos infructuosos, así como algunos resultados sobre problemas del mismo tipo, nos indican que las dificultades son muy profundas, y que quizá el problema real (y con él algunos de nuestros conceptos mas arraigados sobre el movimiento) carezca, de hecho, de sentido.

E) El problema de las cuatro moscas.

En cada una de las esquinas de una mesa cuadrada de 1 m. de lado está parada una mosca. En un momento dado cada mosca comienza a caminar en dirección de la mosca que le sigue sobre el borde de la mesa (en el sentido de las manecillas del reloj) a razón de 1 m/mim.



Este problema es en apariencia bastante complicado: el movimiento de la mosca A depende del de la mosca B, el cual depende del de la C, el cual depende del de la D, el cual, cerrando el ciclo, depende del de la mosca A. Esta situación da lugar, utilizando los conceptos del cálculo, a un sistema de ecuaciones diferenciales, las cuales, al ser resueltas, nos dan una descripción completa del movimiento de las moscas. Esto lo haremos también al finalizar el curso.

Pero hay algunas cosas que podemos decir sin saber cálculo, utilizando sólo algunas ideas intuitivas sobre el movimiento. Dejamos al lector responder las siguientes:

¿Qué configuración forman las moscas en cualquier momento?

¿Llegan las moscas a juntarse en el centro de la mesa?

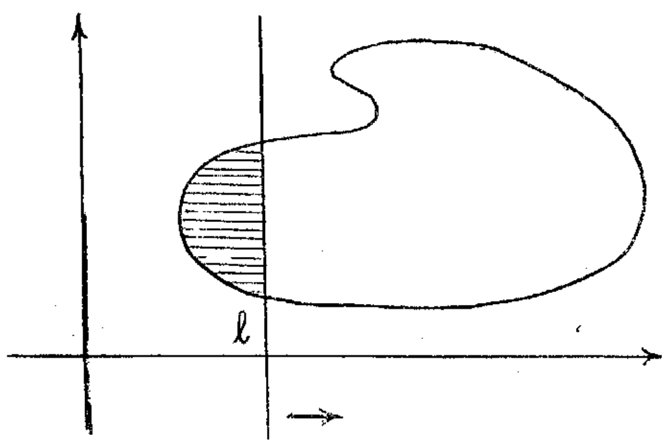
¿Si es así, cuanto tardan en hacerlo?

Vale la pena mencionar que consideramos a las moscas como puntos.

Hemos visto aquí, a través de algunas cuestiones sobre el movimiento, como el cálculo es un arma poderosísima que nos permite analizar problemas que de otra forma sería inabordables. Pero también hemos visto como ante otros problemas el cálculo resulta impotente. Con esto hemos querido ubicarlo a grandes rasgos, sin subestimarlo, pero también sin exagerar su importancia.

Pero el cálculo no se limita a estudiar el movimiento. No sólo el cambio de posición de un objeto, sino también el cambio de ciertas magnitudes asociadas al objeto (temperatura, volumen, presión, carga eléctrica, radioactividad, etc., etc.) y en general la variación de cualquier magnitud con respecto al tiempo, se pueden estudiar utilizando el cálculo.

Es más, el cálculo nos permite analizar situaciones estáticas, introduciendo artificialmente el movimiento en ellas. El ejemplo clásico es el cálculo de áreas: para calcular el área encerrada por una curva, se puede considerar una recta vertical el que se desplaza de izquierda a derecha. Estudiando como varía la parte de la superficie en cuestión situada a la izquierda de la recta al desplazarse ésta, se llega a calcular el área total.



Otro ejemplo: para estudiar la variación de temperaturas sobre la superficie de la tierra, en un momento dado, se suele suponer un punto móvil que se desplaza sobre ella siguiendo diversas trayectorias y estudiar como cambia la temperatura de dicho punto.

Finalmente, una de las grandes fuentes de aplicación del cálculo consiste en estudiar el equilibrio. Por ejemplo, para estudiar en que posición quedará una cadena flexible que cuelga de sus extremos, uno de los métodos consiste en estudiar que es lo que sucede cuando se altera en una forma u otra, sacándola de su posición de equilibrio.

En la formulación moderna del cálculo, éste ha perdido su carácter dinámico. Se estudia la relación entre diversas magnitudes (una de las cuales puede ser el propio tiempo) en forma atemporal. Cualquier proceso de cambio o movimiento de los que estudia el cálculo se puede reinterpretar como una sola unidad estática, en forma semejante a cuando se substituye el movimiento. Esto nos permite liberarnos de nuestros prejuicios con respecto al tiempo.

Pero si podemos dar un curso completo de cálculo sin mencionar la palabra "tiempo", Los orígenes del cálculo como estudio del movimiento son muy importantes para su comprensión cabal, y han quedado plasmados en muchos de sus conceptos, términos, notaciones e intuiciones subyacentes.

3. Desarrollo histórico de las ideas sobre el movimiento

Fueron los griegos los primeros en preocuparse seriamente por el movimiento. Es bien sabido que los griegos fueron muy inteligentes; de hecho fueron los que inventaron eso de "ser inteligentes", es decir, crearon el método racional.

Se atribuye a Tales de Mileto, comerciante del siglo VI a.c., esta invención. Tales viajó mucho por Asia y Egipto llevando sus mercancias y aprovechó sus viajes para estudiar la astronomía y las matemáticas de los pueblos que visitaba. Tales también se dió cuenta de que podía obtener un mayor provecho en sus distintas actividades, si, en lugar de lanzarse a actuar apresuradamente, se sentaba a pensar un rato antes de hacerlo. Son varias las leyendas que refieren sus hazañas como comerciante, y (aún dentro de la leyenda, pues no se conserva ninguno de sus escritos) en su edad madura, tras haber viajado mucho y siendo ya rico, se dedicó a aplicar su pensamiento a muchos otros problemas, habiendo desarrollado la filosofía ("el agua es el principio de los seres"), la astronomía (se dice que predijo un eclipse) y la geometría que tomó de Asia y Egipto. A ésta le dió por vez primera un carácter deductivo, inaugurando así la época de los grandes geómetras griegos que culmina con Euclides, Arquímedes y Apolonio.

Este gran éxito del pensamiento racional llevó a los griegos a exagerar sus posibilidades. En la geometría de Tales aún se combinaban la experiencia y la razón, pero el desarrollo posterior de la geometría la fue alejando de toda referencia al mundo real, culminando con los Elementos de Euclides, que son un monumento a la razón pura. Con la geometría como modelo, los filósofos griegos se dedicaron a pensar sobre todo lo existente, creyendo que con sólo sentarse a meditar podrían resolver todos los problemas: ¿Qué es la belleza?, ¿Qué es la virtud?, ¿Qué es el movimiento?. Esta posición culminó con el idealismo de Platón, para quién las ideas era lo que realmente existía, lo único verdadero. El mundo de la experiencia, de las sensaciones, de las cosas, es sólo un reflejo mutable e imperfecto, según Platón, del mundo eterno de las ideas, donde se encuentran los números, las figuras geométricas ideales, lo bello en sí mismo, etc.

Centrándonos en el problema del movimeinto, fué Heráclito de Efeso (el obscuro), quien vivió a fines del siglo VI A.C., el filósofo griego que destacó el carácter cambiante de las cosas como la característica fundamental del mundo, siendo para él el fuego el símbolo de todas las cosas: "Este mundo, el mismo para todos los seres, no lo ha creado ninguno de los dioses o los hombres, sino que siempre fué, es y será fuego eternamente vivo, que se enciende con medida y se apaga con medida".

El principio del flujo universal de los seres, lo expresa

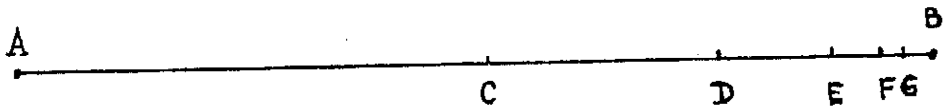
Heráclito en los conocidos fragmentos sobre el río: "no es posible descender dos veces al mismo río, tocar dos veces una sustancia mortal en el mismo estado, si no que por el ímpetu y la velocidad de los cambios se dispersa y nuevamente se une, y viene y desaparece". "A quién desciende a los mismos ríos, le alcanzan continuamente nuevas y nuevas aguas". "Descendemos y no descendemos a un mismo río; nosotros mismos somos y no somos".

Heráclito no sólo consignó este carácter eternamente cambiante del universo, sino que intuyó su carácter unitario y la relación entre la razón y la experiencia. Pero sus geniales intuiciones, plasmadas en fragmentos metafóricos, no se adaptaban al pensamiento ni a la ciencia de los griegos (recuérdese que era llamado "el obscuro"). Heráclito no dejó escuela y la ciencia tomó otro camino: analizar los hechos, aislados de los demás y de su devenir. No es sino hasta el siglo XVII que la ciencia se encuentra lo suficientemente desarrollada como para abordar los problemas del movimiento y en nuestro tiempo renace nuevamente el punto de vista heracliteano en las matemáticas y las ciencias naturales.

En oposición a Heráclito surge la escuela de Elea. Su principal exponente, Parménides (siglo VI a.c.), sostiene que el ser es único, eterno e inmutable. Para él, el movimiento no existe el fluir de las cosas es una mera apariencia. Su discípulo Zenón (siglo V a.c.) inventó las famosas paradojas o aporías para defenderlo de los que pretendían invalidar sus argumentos sobre la inmutabilidad del ser deduciendo de ellos conclusiones absurdas. Para Zenón. Las tres principales paradojas son:

a) <u>La dicotomía</u>.

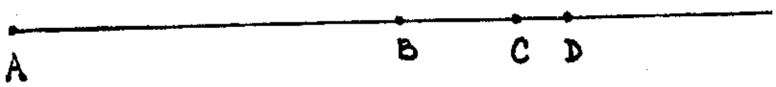
No nos podemos mover de un punto **A** a un punto **B**, porque antes de llegar a **B** tenemos que pasar por el punto medio entre **A** y **B**, después por el punto medio entre éste y **B** y así sucesivamente. Por lo tanto para ir de **A** a **B** tendríamos que pasar por una infinidad de puntos, lo cual nos llevaría un tiempo infinito.



Invirtiendo el órden, resulta que nunca podremos siguiera salir de **A**.

b) <u>Aquiles y la tortuga</u>.

Aquiles el veloz, nunca podrá alcanzar a la lenta tortuga. Porque cuando Aquiles llega al punto **B**, de donde partió la tortuga, ésta ya ha avanzado algo y se halla en el punto **C**; cuando Aquiles llegue a **C**, la tortuga ya se encuentra en un punto **D**, etc.



c) <u>La flecha</u>.

Una flecha en movimiento está en cada instante en un - punto. Pero si <u>está</u> en un punto no puede estar al mismo tiempo <u>moviéndose</u>.

Las interpretaciones de estas paradojas y de su intención - son muy variadas. Según algunos eran sólo un ataque a las concepciones de los Pitagóricos. Según otros, los ciudadanos de - Elea, en la cúspide del desarrollo de esta ciudad estaban temerosos de llegar a su decadencia. Por eso sus filósofos quisieron demostrar la inmutabilidad de las cosas (y quizá que alguna ciudad rival, que progresaba rápidamente, nunca la podría alcanzar...). Finalmente, otros suponen que Zenón era un bromista.

Sobre las dos primeras paradojas hablaremos posteriormente. Por ahora diremos que el orígen de la dificultad consiste en suponer, por una parte, que el espacio es infinitamente divisible, y, por la otra, no atribuir esta cualidad al tiempo. Si el tiempo - también lo podemos dividir en partes cada vez menores, disponemos de un número infinito de instantes en cualquier intervalo de tiempo para recorrer una infinidad de puntos, y la dificultad desaparece. Ya Arquímedes apuntó que el origen de estas paradojas era el suponer propiedades diferentes para el tiempo y el espacio. El orígen de esta supuesta diferencia es muy claro: dado un segmento de espacio, no nos es difícil pensar que, con tiempo, paciencia, y un instrumento adecuado, podemos partirlo en dos mitades. Con el tiempo la situación es diferente: se nos da tiempo para subdividirlo.

La tercera paradoja, la más obscura, se puede interpretar de la siguiente manera: para los griegos estar en reposo y estar en movimiento eran dos estados totalmente distintos.

El orígen de ésto es también claro: las sensaciones corporales. Cuando estamos quietos y cuando estamos en movimiento nos sentimos muy diferentes. En consecuencia la flecha no puede al mismo tiempo estar en un punto y estarse moviendo. (Aún hoy consideramos que no es lo mismo estar en una ciudad, que pasar por ella en un viaje).

Las paradójas de Zenón causaron un gran impacto en su época y han inquietado a los hombres desde entonces, pues indican dificultades muy serias sobre nuestras ideas sobre el tiempo, el espacio y el movimiento.

De los griegos queremos ya sólo mencionar a los Cínicos. - Uno de ellos, Antístenes de Atenas (436-366 ?) refutaba la existencia de las ideas platónicas: "Oh, Platón!, el caballo, sí lo veo; pero la equinidad no la veo". Se dice que su discípulo, el famoso Diógenes de Sínope (413-323 ?), que vivía en un barril, al oir los argumentos de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento, sin decir una palabra se echó a andar: el movimiento se demuestra andando.

El movimiento se demuestra andando, los pasos de Diógenes invalidan todos los sofisticados argumentos de Zenón. Pero también nos demuestran otra cosa: la existencia del movimiento nos hace ver que el espacio y el tiempo deben de tener propiedades -

muy similares.

La concepción antigua sobre el movimiento fue rota por Nicolás Copérnico (1473-1543) cuando anunció que la tierra se movía alrededor del sol a una velocidad enorme. Para sus contemporáneos esto era incomprensible: "¡Pero si no sentimos que nos movemos!" Hoy esto es ya algo comunmente aceptado. No hay una diferencia esencial entre estar en reposo y estar en movimiento. El movimiento es siempre relativo.

El golpe de gracia a la concepción antigua lo dió Galileo Galilei (1563-1642). Galileo no se sentó a meditar sobre el movimiento, sino que se puso a observar y experimentar, y a meditar sobre sus observaciones y experimentos. Al soltar dos balas de distinto peso desde la torre de Pisa, comprobó sus deducciones teóricas de que debían caer al mismo tiempo, con lo cual refutó la teoría de Aristóteles (discípulo de Platón) que sostenía que el más pesado debería caer más rápidamente. Galileo dedujo algunas de las leyes del movimiento y las expresó mediante fórmulas que le permitían calcular algunas cosas. Galileo inauguró así la ciencia moderna.

Finalmente, la Teoría de la Relatividad de Einstein nos hace ver el movimiento bajo una nueva luz. Si ya sabíamos, con Arquímedes (y gracias a Diógenes) que el espacio y el tiempo deben ser similares, ahora sabemos que se llegan incluso a confundir. Si ya sabíamos con Galileo (y gracias a Copérnico) que el movimiento es relativo, ahora sabemos que incluso el espacio y el -

tiempo son relativos: Si se tienen dos observadores, uno de los cuales se mueve con respecto al otro (o viceversa), lo que para uno de ellos es tiempo, para el otro puede ser espacio (y viceversa, nuevamente).

Entonces, ¿Qué es el movimiento? ¿Qué es el tiempo? ¿Qué es el espacio? Si se lo hubieran preguntado a Galileo, no hubiera podido dar una respuesta definitiva. Pero él nos demostró que la forma de acercarnos a una respuesta no consiste en quedarnos pensando en estas preguntas y no movernos hasta que por un chispazo genial averiguemos lo que es el movimiento en forma total y definitiva, penetrando hasta su esencia última. Podemos decir algo acerca del movimiento, (cuánto tarda en caer una piedra, qué velocidad alcanzan las partes de la rueda de un tren, etc., ver la sección anterior), y para llegar a decirlo hace falta no sólo pensar, meditar y estructurar nuestras ideas, sino también observar, experimentar, actuar. La experiencia de los griegos sobre el movimiento era muy limitada. El mismo enunciado de las paradojas nos lo sugiere: para demostrar que el movimiento no existe, Zenón argumenta que ni la flecha ni Aquiles (es decir, ni el objeto ni el hombre más veloces que los griegos se podían imaginar) podían moverse. Toda la ciencia moderna, a partir de Galileo, nos ha hecho comprender cada vez mejor, más y más cosas acerca del movimiento, lo cual ha sido de gran importancia para todos los aspectos de la vida del hombre. Pero no parece que algún día lleguemos a saber todo acerca del movimiento, que es lo que los griegos esperaban.

R E F E R E N C I A S

Kasner y Newman, Matemáticas e Imaginación.

Rodolfo Mondolfo, El pensamiento antiguo (2 vols.) Editorial Losada, S. A. Buenos Aires, 1969.

D. J. Struik, A concise history of mathematics. Dover.

Carl B. Boyer, The history of the calculus and its conceptual development. Dover 1959.

S. Bochner, The role of mathematics in the rise of science. Princeton University Press, 1966.

Temas de investigación

1. Tales de Mileto y los orígenes del pensamiento racional.

2. Galileo y los orígenes de la ciencia moderna.

3. La historia del problema de los tres cuerpos (preguntar a los astrónomos).

II. LOS ANTECEDENTES: NUMEROS Y FUNCIONES

1. Los Números.

Si las intuiciones que utilizamos en los problemas sobre el movimiento no convencieron a todos, y como de hecho estas intuiciones nos pueden llevar a equivocaciones, necesitamos una base firme para llevar a analizar con mayor precisión los problemas del movimiento. Esta base la proveen los números naturales: 0,1,2,3,... Sin entrar en detalles sobre las propiedades de la serie de los números naturales, utilizaremos el conocimiento que tenemos de ellos y sobre las operaciones entre ellos. Recordemos, en particular, el procedimiento para sumar dos números, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 438 \\ +\ 197 \\ \hline 635 \end{array}$$

Esta receta de "ocho y siete, quince; cinco y llevamos uno" es algo que todos conocemos y aceptamos, así como los símbolos que utilizamos para representar los números.

Pero esto no es algo que se haya conocido siempre. Los grandes matemáticos griegos (Pitágoras, Euclides, Arquímedes, Diofanto, etc.), que utilizaron y estudiaron los números en forma admirable, no conocieron estas formas de representar los números y operar con ellos. La notación numérica de los griegos era bastante torpe, lo cual les acarreó considerables dificultades al desarrollar sus matemáticas. El lector se puede dar cuenta de estas dificultades si intenta realizar unas cuantas operaciones con números romanos. De hecho se necesito del genio de Arquímedes para proponer un sistema de numeración mediante el cual se pudiera representar cualquier número, en las postrimerías de la época griega.

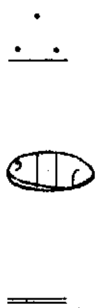
El sistema de numeracíon que hoy utilizamos se debe a los hindúes, y sus principales características son la notación posicional en base 10, y la utilización del 0. Su primera aparición conocida es en una placa del año 595 de nuestra era. Sus principales ventajas son que utilizando sólo 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; los símbolos hindúes eran diferentes) se puede representar cualquier número, y que se puede operar con estos símbolos escritos sobre un papel, sin necesidad de interpretar lo que los símbolos significan durante el proceso de la operación. Para entender esto es conveniente compararlo con el sistema de los Mayas.

Recordemos lo que significa un sistema posicional: lo que cada cifra representa depende de su posición. Así 434 significa "4 cienes más 3 diéces más 4 unidades", o sea

$$434 = 4 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$$

y en nuestro caso la unidad de cada orden es diez veces mayor que la anterior.

En el sistema maya se utilizan puntos y barras (con valor de uno y cinco, respectivamente) para representar los números menores que 20 y un símbolo especial para el cero, con el cual se escribían los demás números en forma vertical. Pero las unidades no iban creciendo siempre por un factor de 20 sino que había una pequeña excepción: una unidad en el tercer lugar de abajo a arriba era sólo 18 veces la unidad en segundo lugar, la - cual valía 20 unidades. Las unidades superiores si iban aumentando por un factor de 20. Así el número



representa $1 \times 20 \times 18 \times 20 + 7 \times 18 \times 20 +$

$+ 0 \times 20 + 10.$

$1 \times 7200 + 7 \times 360 + 0 \times 20 + 10$

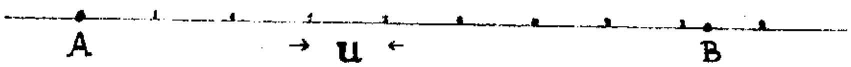
$= 9730.$

Este sistema, posicional y con cero, representa un gran logro de la aritmética Maya, pues ninguna de las civilizaciones - de Europa y el cercano Oriente llegaron a desarrollar algo parecido y cuando apareció el sistema hindú, los mayas llevaban ya 1000 años utilizándolo. Pero esa pequeña irregularidad (que introdujeron para representar el año de 360 días en forma sencilla; recordemos que para las civilizaciones prehispánicas el año consistía de 360 días "hábiles" y 5 de festividades) les impidió poder operar con estos símbolos. Los utilizaban para escribir fechas y otras cantidades, pero para realizar las operaciones tenían que recurrir a cuentas y tablillas.

Vemos así que el "cinco y llevamos uno" fué un descubrimiento fundamental de los hindúes. Al adoptarlo los árabes lo desarrollaron y aprovechando la idea de operar con símbolos escritos, inventaron el álgebra. Cuando estos inventos llegaron a la Europa medieval, transformaron por completo el panorama matemático y científico. La nueva aritmética desplazó en forma lenta pero segura a los ábacos en todas las operaciones comerciales y el álgebra fué desarrollada enormemente, la geometría se redujo al álgebra con Descartes y como consecuencia de todo esto apareció un nuevo lenguaje simbólico operativo: el cálculo "infinitesimal", con las consecuencias que ya hemos apuntado. Hoy en día son numerosos los lenguajes simbólicos que se utilizan: en lógica, en computación, en el estudio de los lenguajes naturales, etc., para no mencionar los utilizados en matemáticas. El "cinco y llevamos uno", tan conocido y menospreciado, es la fuente de uno de los aspectos más importantes de la matemática de nuestra época. (No faltaron, claro está, las exageraciones en este desarrollo; baste mencionar la esperanza de Descartes de crear una "mathesis universalis", ciencia única en la cual se redujeran en lenguaje simbólico todos nuestros conocimientos sobre las cosas).

Pero dejemos a un lado los símbolos de los números para volver a los números mismos.

Los números fueron inventados para contar, pero pronto se vió que también servían para medir. Por ejemplo, para medir la distancia del punto **A** al punto **B**, tomamos una unidad **u** de distancia y la colocamos varias veces a continuación de si misma a partir de **A** hasta sobrepasar **B**.



Así decimos que la distancia de **A** a **B** es (aproximadamente) 8 **u**. Es decir, 8u más un pedacito. Si queremos conocer esta distancia con mayor aproximación deberemos usar una unidad más pequeña. Si dividimos a **u** en 7 partes iguales, y a cada una la llamamos **u'**, obtendremos que la distancia de **A** a **B** es 57 **u'**. Y este proceso lo podemos continuar, obteniendo cada vez mejores aproximaciones. Pero surge naturalmente la pregunta: ¿Podremos medir la distancia de **A** a **B** exactamente? Es decir, ¿Podremos dividir **u** en cierto número de partes iguales **u"** tales que con **u"** podamos llegar exactamente a **B** al aplicarla varias veces? Si esto fuera así, y fuera **k** el número de partes en que dividimos a **u** para obtener **u"** y **h** el número de veces que cabe **u"** en **AB**, tendríamos

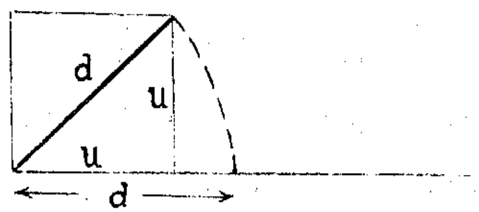
$$u = k\,u'', \qquad \overline{AB} = h\,u''$$

es decir, que mediante dos números, **k** y **h**, habríamos expresado exactamente la distancia **AB** en términos de la unidad **u**. En nuestra notación de quebrados tendríamos

$$\overline{AB} = \frac{h}{k}\,u$$

Esto sería muy bonito si fuera cierto, pero desgraciadamente no lo és. El primer ejemplo se obtiene considerando la longitud de la diagonal del cuadrado de lado **u**. Si llamamos **d** a esa longitud, tenemos, por el Teorema de Pitágoras

$$d^2 = u^2 + u^2 = 2u^2$$



Ahora bién si **d** se pudiera expresar en términos de **u** en la forma que queremos tendríamos

$$d = \frac{k}{h}\,u$$

donde **k** y **h** son dos números (naturales). De donde

$$\frac{k^2}{h^2}\,u^2 = d^2 = 2u^2$$

y

$$2 = \frac{k^2}{h^2} \quad \text{ó} \quad k^2 = 2h^2$$

Pero es fácil ver que esto es imposible. Por ejemplo recordando que todo número se puede expresar en forma única como pro ducto de primos, k sería el producto de n primos (no necesariamente distintos) y h sería el producto de m primos. Pero entonces k^2 sería el producto de $2n$ primos y $2h^2$, de $2m + 1$ primos. Pero como $2n$ es par y $2m + 1$ es nón, el número de primos en la descomposición de k^2 y $2h^2$ es diferente y estos números no pueden ser iguales. Luego, para ningún par de números k, h se tiene que $k^2 = 2h^2$ y por lo tanto no podemos expresar con exactitud la distancia d en términos de la unidad u. Esto se expresa diciendo que d y u son inconmesurables.

Rota esta esperanza, lo único que nos queda es volver a nuestro planteamiento original. Si no podemos expresar exactamente distancias como d, conformémonos con ir aproximándolas cada vez mejor, a sabiendas de que nunca acabaremos. Se nos presenta, pues, un proceso infinito.

Nuestra notación decimal nos permite hacer esto de una manera sistemática, dividiendo nuestra unidad en 10 partes cada vez. Así, para d obtendríamos la sucesión infinita de medidas:

$$
\begin{array}{lll}
1\ u & & \\
14\ u' & \text{donde} & 10\ u' = u \\
141\ u'' & \text{donde} & 10\ u'' - u' \\
1412\ u''' & \text{donde} & 10\ u''' = u'' \\
\text{etc.} & &
\end{array}
$$

Con otro gran invento, el punto decimal, podemos expresar estas medidas en términos de u:

1 u

1.4 u

1.41 u

1.414 u

1.4142 u etc.

donde $1.41 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} = 1 \times 10^{0} + 4 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2}$

por ejemplo.

Para expresar la distancia d necesitamos, por lo tanto, una sucesión infinita de números.

(Aún quedaría la posibilidad de que pudiéramos expresar cualquier distancia, mediante algún otro procedimiento, utilizando sólo 3, 4, 5, ó algún número finito cualquiera de números. A partir de los resultados de Cantor sobre los números transfinitos, se deduce que esto es imposible, si queremos conservar nuestras ideas actuales sobre la distribución de puntos en una recta).

Utilizaremos la siguiente notación

$$d = (1.4142.....) u$$

para denotar este proceso. Los puntos suspensivos los ponemos en lugar de la sucesión infinita de dígitos que siguen al 2 y que, si no podemos escribirlos todos, si podemos calcular tantos como querramos. El signo de igualdad lo ponemos con la idea de que si teóricamente conociéramos todas las cifras, conoceríamos la distancia **d** exactamente. Aclararemos esto después.

Tenemos así un nuevo tipo de "números", como el **1.4142...**, que nos sirven para expresar distancias. Los números de este tipo representan, pues, un proceso infinito de medición.

Estos números nos aparecen también al efectuar operaciones con los números naturales con nuestra notación decimal. Sabemos por ejemplo que al dividir **1** entre **3** obtenemos la sucesión infinita **0.33333...**, con la ventaja de que en este caso sabemos cuales son todas las cifras: todas son **3**. También sabemos como sacar raíz cuadrada. Al sacar raiz cuadrada de **2** obtenemos el número que considerábamos antes: **1.4142...**.

¿Cuál es la relación entre estos números y los que teníamos antes, como **5, 7, 3/4, 7/9, etc.?**

Vamos a ver que la expresión infinita que obtenemos al dividir dos números naturales se puede considerar como otra forma de escribir el cociente de ellos. Así, escribiremos

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

Para justificar la igualdad pondremos

$$x = 0.333... \qquad (1)$$

multiplicando por 10: $$10x = 3.333... \qquad (2)$$

restando (1) de (2) $\qquad 9x = 3$

ó sea $\qquad x = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

Esto puede parecer trampa, y de hecho lo es, pero lo que nos está indicando es que si nos dan el número 0.333... con todas sus cifras, podemos saber, mediante una serie de operaciones, que se obtuvo al dividir 1 entre 3 (ó cualquier otra división equivalente, como 2 entre 6). Es decir que podemos escribir 1/3 en la forma 0.333..., por que no perdemos ninguna información al hacerlo.

Vemos así que cualquier quebrado k/h lo podemos escribir en esa forma. Por ejemplo, para escribir 1/7 efectuamos la división

```
          0.142857142857....
     7 ⟌ 1.000.....
           30
            20
             60
              40
               50
                10
                 3.......
```

Vemos que en general a todo quebrado k/h le corresponde una expresión decimal que, a partir de cierto momento, se vuelve periódica. En el último ejemplo la sucesión 142857 se repite indefinidamente. Esto se puede demostrar fácilmente: al efectuar la división nos van apareciendo resíduos, que en el ejemplo hemos señalado con círculos, todos los cuales son meno res que el divisor. Como sólo hay un número finito de números menores que el divisor, en algún momento se tiene que repetir uno de ellos, y a partir de ese momento todo el proceso se repite integramente.

Recíprocamente, toda expresión decimal periódica corresponde a un quebrado. La demostración general es similar a la que se hizo en el caso de 0.333.... Podemos ilustrarla con otro - ejemplo

$$x = .00123232323....$$

$$100\ x = .12323232323....$$

restando: $$99\ x = .122 = \frac{122}{1000} = \frac{61}{500}$$

y $$x = \frac{61}{99 \times 500} = \frac{61}{49500}$$

La comprobación final se obtiene efectuando la división de 61 entre 49500.

A estos números, que podemos expresar como cocientes de dos naturales, ó como expresiones decimales periódicas, los llamamos números <u>racionales</u>. A los demás los llamamos <u>irracionales</u>. Ya sabíamos que $\sqrt{2}$ es irracional (el lector que recuerde la regla para "sacar raíz cuadrada" verá que ésta no conduce necesariamente, como lo hace la regla para dividir, a periodicidad alguna; de hecho si la raíz no sale "exacta", no puede haber periodicidad). Ahora podemos construir muchos números irracionales, por ejemplo

.10100100010000100000l....

para el cual nunca hay periodicidad.

¿Qué podemos hacer con estos números? lo de siempre: sumarlos, restarlos, etc. y compararlos. Para sumar dos de ellos, tenemos que hacerlo poco a poco, ya que no podemos sumar la infinidad de cifras de un golpe. Para encontrar las **n** primeras cifras de la suma lo que podemos hacer en tomar las **n + 1** primeras cifras de cada sumando y sumarlas con la regla usual: para encontar las tres primeras cifras de la suma

2.124258...

4.924694...

sumamos los números que se obtienen considerando sólo las 4 primeras cifras después del punto y obtenemos **7.0488**. Con esto ya sabemos que la suma tiene por primeras cifras **7.048**. De la cuarta ya no podemos estar seguros porque quizá al sumar las quintas cifras "llevemos uno" y el 8 se nos convierte en 9, como es el caso en el ejemplo. Pero hay un caso en el cual tampoco podríamos estar seguros de la tercera: si la cuarta es 9, porque entonces podría pasar lo siguiente: al sumar **2.124258....** con **4,924781...** obtenemos, considerando las 4 primeras cifras de los sumandos, **7,0489**, y considerando las 5 primeras, **7.04903**. Lo que podemos asegurar es que cuando nos aparece una cifra distinta de 9 ya estamos seguros de que las cifras anteriores de la suma parcial son las definitivas. Si esto sucede repetidas veces iremos obteniendo cada vez más cifras de la suma, es decir, tantas como querramos. La única posibilidad latosa es que a partir de cierto momento nos salgan puros nueves. Veamos un caso así: sumemos

$$1/3 = 0.3333.... \quad y \quad 2/3 = 0.6666.....$$

y obtenemos $\quad 1 = 0.9999.....$

¿Cómo debemos entender esta última igualdad? Aparentemente la hemos demostrado. Otra demostración sería como sigue: dado que 0.9999.... es un decimal periódico, le podemos aplicar la regla para obtener un quebrado:

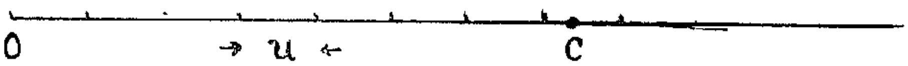
$$\begin{aligned} x &= 0.999.... \\ 10\,x &= 9.999.... \\ 9\,x &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Evidentemente, los números que a partir de cierto momento constan sólo de nueves nos causan problemas, como se ha visto en este caso particular. Geométricamente, ¿Qué significaría esta igualdad? Para construir el punto correspondiente a 0.9999... tendríamos que tomar el punto 9/10, a ése agregarle 9/100, al total sumarle 9/1000, etc., y una vez "sumadas" todas estas magnitudes obtenemos un punto.

¿Coincide este punto con el punto 1? Evidentemente no podemos hacer un experimento para decidirlo. Pero vamos a ver a que nos conduce la hipótesis de que son distintos. Para eso vamos a hacer explícitas dos <u>hipótesis</u> que hemos estado utilizando en el proceso de medición:

A) **<u>Divisibilidad infinita del segmento:</u>** Dado un segmento cualquiera lo podemos dividir en cualquier número de partes iguales.

B) **<u>Principio de Arquímedes:</u>** Dado un segmento **u** y un punto **c** podemos colocar el segmento **u** un número finito de veces a continuación de si mismo, de manera que rebasemos el punto **c.**



Note el lector como hemos efectivamente utilizado estas 2 hipótesis anteriormente.

Veamos ahora que sucede si suponemos que $Q = 0.9999....$ es distinto de $P = 1$

Por la infinita divisibilidad, existe un punto **R** entre **P** y **Q** (el punto medio, por ejemplo). ¿Qué número le correspondería al punto R? Sabemos lo que tenemos que hacer, o sea subdividir el segmento OP = u en 10, en 100 partes, etc., para ir obteniendo las distintas cifras de ese número. Pero toman do el segmento QR 10 veces, 100 veces, etc., llegará un momento en que obtengamos un segmento mayor que **u**. Supongamos que 10^n veces el segmento QR es mayor que **u**. Esto quiere decir que la unidad $u^{(n)}$ que se obtiene dividiendo **u** **n** veces entre **10** es menor que QR, por lo cual cabría dentro de QR. Esto querría decir que al medir OR con la unidad $u^{(n)}$ obtenemos un número mayor que cuando medimos OQ con la misma unidad. Pero este último número es 99...9 (n nueves)$=10^n-1$, lo cual quiere decir que el otro es por lo menos 10^n, o sea que en OR cabe $10^n u^{(n)}=u$, ó sea que el punto R estaría a la derecha de **P** ó coincidiría con él, lo cual contradice el hecho de que **R** es el punto medio de QP.

Vemos que la hipótesis $1 \neq 0.9999...$ nos mete en dificultades. Por una parte, en dificultades aritméticas, porque tendríamos que invalidar las operaciones aritméticas que nos condujeron a la igualdad. Por otra parte, en dificultades geométricas porque tendríamos que eliminar una de las hipótesis **A)** ó **B)**. Eliminar A) sería caer en la hipótesis atomística:

A') Existe un segmento indivisible.

Es decir, que no podemos seguir dividiendo (en 2, por ejemplo) indefinidamente un segmento dado. No hay nada en nuestra experiencia práctica que nos haga creerlo, pero tampoco podemos negar esta posibilidad. Hasta la fecha el desrrollo de la ciencia ha llevado a dividir todo lo que se considera previamente como indivisible y se han encontrado métodos para medir distancias cada vez más pequeñas. Aceptando esta hipótesis la pregunta sobre 0.9999.... no tendría siquiera sentido, pero tendríamos que modificar toda el álgebra y la geometría que conocemos y que han funcionado muy bien hasta ahora. Y aunque se llegara a demostrar que la hipótesis A') se ajusta más a la realidad toda la matemática actual se seguiría utilizando con gran provecho.

Eliminar B) significaría renunciar a la posibilidad de medir. En particular habría muchos segmentos a los que no se les podría asignar un número, como el segmento QR. Una salida de esta dificultad consistiría en inventar nuevos "números" con los que designaríamos a estos segmentos.

Nótese que los argumentos que se pueden esgrimir para demostar que 0.999.... es menor que 1 se parecen a los de Zenón en la dicotomía: en un caso vamos tomando la mitad del segmento que nos resta en cada paso, en el otro vamos tomando las 9/10 partes

En este curso adoptaremos las hipótesis A) y B), y en consecuencia sostendremos que 0.9999... = 1. De hecho podemos eliminar los números que acaban con una sucesión de nueves. Resulta claro que estos números no nos aparecen nunca al dividir dos números naturales y de nuestras hipótesis se desprende que tampoco aparecen en el proceso de medición. El único lugar donde nos aparecen es el operar con los números, pero cuando obtengamos uno de ellos como el resultado de una operación lo transformamos rápidamente agregando una unidad a la última cifra que no sea 9 y sustituyendo todos los nueves por ceros.

Para poner en claro todo lo anterior daremos una serie de definiciones y resultados, aunque sea aún en una forma vaga. (Incluiremos de una vez a los números negativos).

El sistema de los números reales

A) **Un número real consta de tres elementos:**

a) Uno de los signos + ó -

b) Un número natural **N**

c) Una sucesión infinita de dígitos $a_1, a_2, \ldots$

tal que no sean todos nueves a partir de uno.

Los números reales se escriben

$$+ N.a_1 \, a_2 \, a_3 \, a_4 \ldots\ldots$$

$$\text{ó} \quad - N.a_1 \, a_2 \, a_3 \, a_4 \ldots\ldots$$

Ejemplos:

+ 48.121212....

- 58947.12345.....

Los números +0.000... y -0.000... se consideran iguales y se escriben sin signo. Los números con signo + se llaman positivos. Los que tienen signos -, negativos. Los no negativos son, en consecuencia los positivos y el 0.000.... El conjunto de todos los números reales se denota por $\mathbb{R}$.

B) Las operaciones con números reales

La suma, producto, diferencia y cociente de dos números reales no negativos se definen por aproximaciones sucesivas. Es decir, se toman las primeras **n** cifras de cada número y se opera con ellas como con los números enteros. Al tomar **n** cada vez -

más grande se van obteniendo las cifras del resultado. Si el resultado de una operación tuviera una cola de puros nueves se agrega una unidad a la última cifra distinta de nueve y se substituyen todos los nueves por ceros.

Para definir las operaciones cuando alguno de los números es negativo se utilizan las conocidas reglas del álgebra para reducirlo a una operación con números positivos.

(Ejemplos $(+a) + (-b) = a-b$, $(-a)\ (-b) = ab$, si a y b son positivos).

C) <u>El órden de los números reales.</u>

Para comparar dos números no negativos distintos se considera la primera cifra en que difieren. El que tenga esta cifra mayor será por definición el mayor de los dos.

Para números negativos se invierte la regla.

Todo número no negativo es mayor que cualquier negativo.

Ejemplos: $+\ 4.72312195\ldots > +\ 4.72312185\ldots$

$-\ 7.2312\ldots < -\ 6.5899\ldots$

D) <u>Propiedades de los números reales</u>.

I. De la suma: $a + b = b + a \quad \forall\ a, b \in \mathcal{R}$

$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall\ a, b, c \in \mathcal{R}$

$a + 0 = a \quad \forall\ a \in \mathcal{R}$ dado $0 = 0.000\ldots$

$\forall\ a \in \mathcal{R}$ existe $-a \in \mathcal{R}$ tal que $a + (-a) = 0$

II. Del producto: $ab = ba \quad \forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$

$a(bc) = (ab)c \quad \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$

$a \cdot 1 = a \ \forall \ a \in \mathbb{R}$ donde $1 = 1.000....$

III. Del producto y la suma: $(a + b)c = ac + bc$

IV. Del orden: $a>b \Rightarrow a + c > b + c \ \forall \ c \in \mathbb{R}$

$a>b$ y $c>0 \Rightarrow a c > b c$

(tricotomía) Dado $a \in \mathbb{R}$ una y sólo una de las siguientes relaciones es válida: $a < 0$, $a = 0$, $a>0$

V. Divisibilidad infinita: $\forall \ a \in \mathbb{R}$ y un número natural n, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a = n b$

VI. Principio de Arquímedes: $\forall \ a, b \in \mathbb{R}$ $a>0$, $b>0$, existe un natural n tal que $na > b$

VII. Completez. (Esta se definirá más tarde)

Las definiciones anteriores se podrían haber dado con mayor precisión, y todas las propiedades se pueden deducir rigurosamente de ellas. Pero no vale la pena hacerlo porque es muy latoso y posteriormente (y también en el curso formal), se verán formas más sencillas de construir el sistema de los números reales.

De las propiedades mencionadas se pueden deducir todas las reglas conocidas del algebra usual, las cuales supondremos.

Ejemplo:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ etc., etc., etc.}$$

Hasta ahora sólo hemos definido lo que son los números reales. Esta es una construcción hecha por nosotros y que no depende de ninguna consideración sobre el mundo real.

Pero ahora viene lo bueno: supondremos el siguiente Axioma (llamado de Cantor-Dedekind). Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales. Es decir, que a cada punto de la recta se le puede asociar un único número real y a cada número real le corresponde por esa asociación un único punto de la recta. ¿Que significa esto? Significa que hemos dado un modelo de la recta. Nadie sabe cómo es el espacio en sus partes más pequeñísimas,y lo más probable es que nunca se sepa. Y de hecho nadie ha visto una recta. Pues bién nosotros hemos construido, utilizando sólo números, un sistema que tiene buenas propiedades algebraicas (I al IV), ciertas propiedades que podríamos llamas "geométricas" (V al VII) muy interesantes, y lo hemos construido al márgen de cualquier hipótesis geométrica (aunque sabiendo a qué le tiramos). Una vez que lo hemos construido lo mostramos y decimos: "¡Para nosotros (y para Cantor, Dedekind, y muchos más) las rectas son así!" (Como nadie ha visto una recta, no nos pueden desmentir, pero cualquiera puede construir otro modelo y decir que, para él, la recta es así y así. Nuestro modelo tiene las siguientes ventajas:

a) Desde el punto de vista práctico, nos sirve para medir cosas, compararlas, etc. Naturalmente que al medir algo no podemos (y en general no tiene sentido) dar un número con todas - sus cifras, pero este sistema nos da márgen a considerar tantas cifras como querramos, independientemente del avance en el grado de precisión de nuestros aparatos de medición.

b) Desde el punto de vista teórico, se puede desarrollar - una teoría muy rica y bién estructurada que llega a resultados sutiles y profundos, y que es la base de numerosísimas ramas teó ricas de las Matemáticas.

c) Desde el punto de vista teórico-práctico, los resultados de esta teoría tienen en general una interpretación real muy natural y las predicciones que a partir de ellos se hacen concuerdan con los de la práctica. Estos resultados son numerosísimos e incluyen no sólo los del cálculo diferencial e integral, sino también los del análisis vectorial y tensorial, los de las teorías de las ecuaciones diferenciales (totales y parciales) y de la estabilidad y control, los del análisis funcional, cálculo de variaciones, análisis armónico, teorías de la medida y la probabilidad, etc., etc., así como muchas otras ramas de las matemáti cas de reciente creación y cuya amplia gama de aplicaciones apenas empezamos a vislumbrar. Nada de esto invalida, sin embargo, la posibilidad de crear otros modelos. De hecho varios modelos han sido ya creados y estudiados: modelos no-arquimedianos (que niegan la hipótesis B), modelos como el propuesto, pero en los -

cuales se altera el concepto de sucesión infinita de dígitos (por ejemplo, pidiendo que exista una regla efectiva para determinar la n-ésima cifra decimal en términos de las anteriores) y modelos en los cuales la noción de "conjunto", que se suele utilizar como base para contruir los números reales, es modificada.

La garantía que tiene el modelo propuesto es que ha funcionado muy bién durante 4 siglos (aunque sólo hace un siglo que se definió con precisión). Pero bién cabe la posibilidad de que deba ser suplantado por otro si en un momento dado se nota que falla, Esta posibilidad es semejante a la que se da en la Física, donde por ejemplo, varios modelos del átomo han funcionado bién durante un cierto tiempo (corto, en general) y han sido suplantados por otros modelos cuando han mostrado discrepancias entre sus predicciones y los resultados experimentales.

Las dos dificultades principales que presenta este modelo son:

a) (dificultad interna): el uso de sucesiones infinitas, las cuales no se pueden manejar con la seguridad con la cual se manejan los números naturales, por ejemplo, y que da lugar a problemas.

b) (dificultad externa): la disparidad que existe entre los números reales y los resultados de las mediciones en el mundo físico, que sólo son aproximados. Es posible que éste sea el origen de muchas de las dificultades, teóricas y prácticas, que se han presentado últimamente.

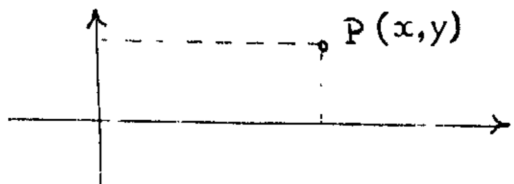
Nota: a estos números se les llama "reales", para distinguir los de los "imaginarios", como

$$i = \sqrt{-1}$$

Finalmente, tomaremos a los números reales como un modelo también para el tiempo. Es decir, supondremos que a cada instante de tiempo le corresponde un número real y viceversa.

En base a estos modelos para el tiempo y el espacio, podemos manejar el movimiento sin caer en las dificultades de Zenón. Las dudas sobre la flecha ya ni se nos presentan, el movimiento lo podemos representar como una relación entre números. A cada instante (dado por un número real) le corresponde una posición de la flecha (dada por otro número real). Compárese con el problema del tren en el capítulo anterior. Ya no nos preocupa si el tren "está" o se "está moviendo", pero podemos decir en cada instante (dado por un número, de segundos, por ejemplo) que punto ocupa (dado por un número, de kilómetros). Ya habíamos visto la importancia de que utilizáramos modelos similares para el tiempo y el espacio.

Una vez establecido el modelo para la recta, tenemos un modelo para el plano dado por el conjunto de parejas ordenadas de números reales. que denotamos por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^2$. A cada punto del plano le corresponde una pareja de números reales, y viceversa, según la regla usual.



Este, como sabemos, es el principio básico de la Geometría Analítica de René Descartes (1596-1650). Análogamente, tenemos un modelo para el espacio, dado por el conjunto de ternas ordenadas de números reales, ó $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$,..., como modelos de el "espacio" de 4, 5,... dimensiones, los cuales no corresponden a ninguna intuición real, pero tienen interpretaciones geométricas y físicas muy concretas.

Ejercicio.

Construir el sistema de los números "redondos". Estos son como los reales, pero sólo tienen un cierto número fijo (2 por ejemplo) de cifras decimales. Se opera con ellos como los enteros, pero cuando el resultado de una operación contiene más de 2 cifras decimales se omiten las demás y se "redondea" la segunda cifra, agregándole una unidad si la tercera es 5 ó mayor.

Ejemplo:

$$5.17 \times 2.28 \; (= 11.7876) = 11.79$$

¿Cuáles de las propiedades de los números reales se cumplen para este sistema?

En particular este es un modelo atomístico: no existen números entre 0 y 0.01. Este modelo se usa de hecho, con no malos resultados, en las operaciones comerciales. Es claro que un modelo tal con un millón de cifras decimales serviría para cualquier propósito práctico (aunque un millón de cifras decimales es tan impráctico como una infinidad).

¿Qué dificultades ofrecerían estos modelos desde el punto de vista teórico? ¿Tendría esto repercusiones prácticas?.

Otro ejercicio.

El sistema de los números con 5 cifras significativas. En este caso se supone que todas las cifras de los números son cero, excepto a lo más 5 de ellas sucesivas, incluyendo las de la parte entera.

Ejemplos.

128740000, 2.3490. .000012289

Cuando al efectuar una operación se obtienen más de 5 cifras significativas, se redondea en la forma anterior.

Ejemplo.

85432 + 72210 (=157643) = 157640

Mismas preguntas que en el caso anterior.

Este es también un modelo atomístico, donde hay "átomos" de tamaño arbitrariamente pequeño y arbitrariamente grande.

La regla práctica que se utiliza al manejar estos modelos es de no redondear las cifras hasta llegar al final del proceso. con esto se evita que los pequeños errores que se introducen en cada operación no influyan tanto en las cifras significativas del resultado final. Pero incluso en la práctica, las computadoras no pueden manejar números con demasiadas cifras en los pasos intermedios. Para poder resolver estos problemas existen una serie de métodos prácticos que forman parte de lo que se conoce como Cálculo Numérico. Pero incluso estos métodos utilizan resultados de Cálculo Diferencial e Integral, el cual está basado, como ya sabemos, en los números reales.

En el sistema de números reales nos olvidamos de los problemas que acarrea la medición y el cálculo práctico, suponiendo que nuestros números están dados con todas sus cifras. En este sentido el sistema de los números reales representa una abstracción.

Problemas:

1. Los decimales finitos, como 3.28 ¿Representan números racionales?

2. Hemos visto como a cada quebrado se le asocia una expresión decimal periódica (que no tenga una cola de nueves) y viceversa. Verificar con ejemplos lo siguiente:

i) Que dos quebrados iguales (como 2/7 y 4/14) dan expresiones decimales iguales.

ii) Que dicha asociación establece una correspondencia biunívoca. Es decir, verificar que el quebrado asociado a la expresión decimal de un quebrado, es igual a este quebrado, y viceversa.

3. Demostrar la ley conmutativa para la suma de números reales (sugerencia: verificarla para los dígitos (0,...,9), después demostrarla para los naturales y finalmente para los reales, por aproximaciones.

4. Demostrar que entre dos racionales existe (por lo menos) un racional y un irracional. id. id., entre dos irracio-

nales.

5. Exhibir tres irracionales entre 1/3 y 3/7.

2. Desarrollo histórico de los números

Pitágoras de Samos (c.580-497), el segundo matemático griego de que se tiene noticia, llegó a Crotona (hoy en Italia) donde fundó la escuela que lleva su nombre y el de ésta ciudad. Los pitagóricos se dedicaron a estudiar las leyes inmutables del universo, dedicándose al estudio de la Aritmética, la Geometría, la Astronomía y la Música. Sus estudios los llevaron a descubrir relaciones numéricas en estas disciplinas, habiéndoles llamado especialmente la atención el descubrimiento de que las leyes de la armonía se podían reducir a números (así, al dividir una cuerda a la mitad se obtiene una nota una octava arriba de la producida por la cuerda completa; al tomar 2/3 de la cuerda se obtiene la quinta: do-sol, etc.) A partir de esto desarrollaron una filosofía que sustentaba que los números eran la esencia de todas las cosas: toda la naturaleza está hecha a semejanza de los números, los números son elementos de todos los seres, el universo entero es armonía y número. Llevados por esta filosofía buscaron determinaciones numéricas que representaron la justicia, el alma, la razón... ("Todas las cosas conocidas tienen su número, porque sin él no sería posible que nada fuera conocido ni comprendido"). La condición del conocimiento humano ya no está, para los Pitagóricos, en la experiencia sino en la intuición del número como esencia de las cosas. En particular concibieron el punto - como "unidad en posición". Esta concepción de la recta como conjunto de puntos fué la que atacó Zenón, según algunos autores, - en sus paradojas. Pero también Heráclito tuvo duras palabras para los pitagóricos, pues su concepción numérica del universo era esencialmente estática. Heráclito dice: "El hecho de conocer - muchas cosas no instruye la inteligencia, pues de otra manera hubiera instruido a Hesíodo y Pitágoras, como a Jenófanes y Hecateo".

Pero esta gran exageración de los pitagóricos, producto de - sus notables éxitos, condujo a que estudiaran junto con los atributos místicos de los números, sus propiedades matemáticas, habiendo estudiado los números pares e impares, primos y compuestos triangulares, cuadrados, perfectos, amigables, etc. ("Parece que Pitágoras ha apreciado por sobre todas las cosas, las investigaciones en torno a los números, haciéndolas avanzar mucho con respecto al estado antecedentes, conduciéndolas mucho más allá de - las necesidades del comercio". Aristóxeno, sobre la Matemática). Así vemos que esta exageración condujo a un desarrollo matemático muy importante.

El sueño pitagórico se derrumbó pronto debido a sus propios descubrimientos. Tanto el teorema, llamado de Pitágoras, que era una determinación numérica de una situación geométrica, como la - búsqueda de la media armónica entre 1 y 2 (es decir, el número x tal que $1:x::x:2$, o sea $1/x = x/2$) les llevó a buscar $\sqrt{2}$. El descubrimiento de que no podían expresar esta magnitud en términos de los números que ellos conocían, fué uno de los descubri mientos mas importantes de los pitagóricos y su impacto fué enorme. A partir de ese momento los griegos se olvidaron de los números en sus estudios geométricos y aunque desarrollaron una teoría equivalente casi a la actual sobre las magnitudes y las proporciones, ésta era tal que no les permitía hacer cálculos numéricos. Para los griegos el "número" $\sqrt{2}$ no existía, aunque sí la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la unidad. El libro X de los elementos de Euclides contiene un estudio geométrico de magnitudes de este tipo (las que hoy denotaríamos por números de la forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$) que resulta excesivamente complicado. Mayor dificultad les causaba $\sqrt[3]{2}$, magnitud que aparece en el famoso problema de la duplicación del cubo, la cual no podían expresar numéricamente ni construir geométricamente (con regla y compás). En la física de los griegos también aparecen dificultades que se originan en el hecho de que no pudieran extender el concepto de número. Uno de los orígenes de esto es que para los griegos los mismos quebrados no eran números sino relaciones entre números.

La extensión del concepto de número se produjo, como ya hemos visto, a partir de una nueva forma de escribir los números ya conocidos, la notación posicional hindú. El arte de calcular con estos números fué desarrollado enormemente, impulsado por el desarrollo del comercio y la industria, la ingeniería, la navegación, la topografía y la astronomía, durante los siglos XV al XVII en Europa. Se hicieron enormes tablas astronómicas y trigonométricas, se desarrolló la teoría de ecuaciones (Tartaglia y

Cardano, alrededor de 1535; la solución de la ecuación de tercer grado representó el primer resultado importante que superó la matemática de los griegos, lo cual dió lugar a envidias y disputas), la notación algebraica (Francois Vieta, 1540-1630), se introdujeron las fracciones decimales para simplificar el sistema de medidas (Simón Stevin, 1585) y se inventaron los logaritmos y con ellos el punto decimal para escribirlos con mayor facilidad (John Napier, 1614).

Así pues, cuando Galileo lleva a cabo sus investigaciones, los nuevos números y la forma de operar con ellos son ampliamente conocidos y aceptados sin discusión. Galileo desarrolla sus leyes sobre la caída de los cuerpos y calcula sus trayectorias parabólicas. En nuestra notación la ley de Galileo se expresa mediante la fórmula

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

donde **t** denota el tiempo que ha transcurrido desde que se deja caer un objeto, **g** es una constante (=9.81 m/seg^2, aproximadamente) y **h** la distancia recorrida por el objeto en el tiempo **t**. Con esta fórmula podemos calcular **h** dado t, y despejando **t**:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

podemos calcular **t**, dada h. Esto significa substituir números en estas fórmulas, operar con ellos, sacar raíz cuadrada; etc. Todo esto lo hacia Galileo. Si se le hubiera preguntado, ¿Qué son estos números? ¿Qué sentido tiene sacar raíz cuadrada de un número?, Galileo no hubiera podido dar una respuesta rigurosa. El no se preocupaba por esto, pero los usaba, los multiplicaba y sumaba, les sacaba raices, etc. y obtenía resultados numéricos, cuya precisión era, en principio, tan grande como permitieran los aparatos de medición. Para Galileo, "El libro de la Naturaleza está escrito en el lenguaje de los números". Y si bien esto es mucho menos que lo que afirmaban los pitagóricos, su idea de utilizar los números para estudiar la naturaleza resurge, gracias a la notación hindú y la extensión del concepto de número, en forma mucho más poderosa y espectacular. (Galileo también habla con absoluta naturalidad de la totalidad de los números (naturales) y apunta el hecho de que hay tantos números cuadrados perfectos, 1, 4, 9, 16,..., como números naturales).

El desarrollo de la Geometría Analítica, el Cálculo y la Física comprueba la importancia del uso de los números en las comprensión de la naturaleza. Newton recrea la aritmetización pitagórica de la música, al asignar un número a cada color, utilizando la desviación de la luz en un prisma, que es diferente para cada color del espectro. Esto permite eliminar la ambigüedad de nuestra intuición sobre los colores (un poco más azul, ligeramente amarillento) al poderla precisar mediante el concepto actual de longitud de onda, y dió lugar, entre muchas otras cosas a ampliar el espectro de la luz visible con el descubrimiento de los rayos infrarrojos, ultravioletas, X, gama, etc. Además estos números se pueden utilizar en fórmulas y operar con ellos, lo cual ha tenido una importancia inmensa en la Física contemporánea.

Los números ya no sólo nos sirven para contar y medir. Cada vez es mayor el número de fenómenos que podemos estudiar utilizando los números. Sin embargo no caigamos en la exageración de creer que todo se puede reducir a números, como hacen en la actualidad los nuevos pitagóricos. Esto conduce, por una parte, a forzar arbitrariamente la introducción de aspectos numéricos en disciplinas que aún no están maduras para ello y, por otra parte, a impugnar como no-científicas a las ciencias de la vida, del hombre y de la sociedad que, o bien no han alcanzado esta etapa, o bien siguen caminos muy distintos. Hay que recordar que los números son una invención del hombre que le han permitido grandísimos avances en el dominio de la naturaleza, pero que hay muchas otras estructuras matemáticas que hoy están teniendo gran importancia en esta tarea, y que en todo caso la naturaleza es demasiado rica y compleja como para que podamos reducirla a una o a un cierto tipo de estas estructuras.

La pregunta "¿Qué es un número?" fue olvidada por los matemáticos durante siglos, hasta que el propio desarrollo del cálculo los obligó a volver a formularla a mediados del siglo XIX (Cauchy y Weierstrass) y fué contestada en forma muy satisfactoria por Dedekind y Cantor, quienes dieron una construcción de los números reales, equivalente a la que dimos anteriormente, pero mucho más clara y rigurosa. Sobre esto hablaremos posteriormente. Pero para algunos la pregunta aún no ha sido contestada con suficiente claridad, como revela el hecho de que se hayan construi

do otros modelos para la recta como mencionamos en la sección an
terior.

R E F E R E N C I A S

Rodolfo Mondolfo, El Pensamiento Antiguo. Losada, S.A. Buenos Aires 1969.

D. J. Struik, A Concise History of Mathematics. Dover 1948.

C. B. Boyer, The History of the Calculus and its Conceptual - Development. Dover 1959.

S. Bochner, The Role of Mathematics in the Rise of Science. Princeton University Press. 1966.

I. Niven, Números Racionales e Irracionales. Random House, Editorial Norma. Cali, Colombia.

H. Cárdenas, E. Lluis, F. Raggi, F. Tomás. Temas de Algebra. Sociedad Matemática Mexicana, 1970. (Donde aparece un tratamiento geométrico de los números reales)

F. Zubieta, Evolución del concepto de número, I y II. Revista Matemática, Nos. 2 y 3.

M. Meda, La Aritmética Maya, Revista Matemática, No. 3.

M. Willerding, Conceptos Matemáticos, Un Enfoque Histórico. CECSA, México, 1969.

3. Las Funciones

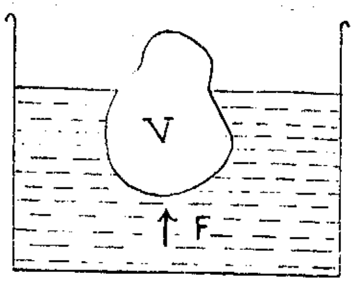
Las Leyes de la Naturaleza. Concepto de Función.

¿Para que sirven los números reales? A un primer nivel, sirven para medir y comparar magnitudes del mismo tipo. Pero para esto no necesitamos estrictamente a los números reales, pues las mediciones sólo las podemos dar con una cierta aproximación.

A un nivel más elevado, nos sirven para relacionar magnitudes aparentemente muy diferentes. Para expresar y trabajar con estas relaciones necesitamos las herramientas y conceptos del álgebra, el cálculo y sus consecuencias, para lo cual si es importante tener un sistema teórico bién estructurado, como es el de los números reales. Estas relaciones son las Leyes de la Naturaleza. (Estamos hablando aquí de hecho únicamente de las Leyes numéricas. Existen muchas Leyes de la Naturaleza que no se expresan mediante números).

Todo proceso natural se nos aparece a simple vista caótico y cambiante. Muchísimos de sus aspectos pueden ser medidos y así obtenemos una serie de números que nos describen el proceso. Sin embargo en todo ese desorden se pueden encontrar relaciones. Los diferentes números que obtenemos no son arbitrarios sino que muchas veces se encuentran relacionados. Veamos algunos ejemplos.

A) Principio de Arquímedes. Un cuerpo sólido al ser sumergido en un líquido sufre una disminución de peso igual al peso del volumen del líquido desplazado.

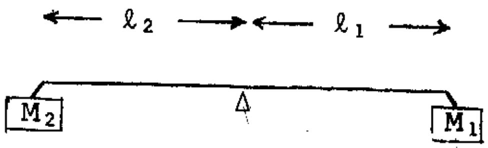


Según los conceptos actuales de la Física, la disminución - del peso se interpreta como una fuerza o empuje que el líquido - ejerce sobre el sólido. Si llamamos **F** a esa fuerza y **P** al - peso del volumen del líquido desplazado (V), el principio de Arquímedes queda expresado por la fórmula

$$F = P$$

¿Qué significa esto? Nosotros observamos un fenómeno: un sólido sumergido en un líquido. Podemos efectuar diversas mediciones. Por una parte, mediante una balanza podemos medir la diferencia entre el peso del objeto cuando se haya fuera del líquido y cuando se encuentra dentro de él. Por otra parte podemos - ver la diferencia en el nivel del líquido cuando el sólido está fuera y dentro de él. Con esto podemos saber el volumen de líquido desplazado, y pesar un volumen igual del líquido mediante la balanza. Obtenemos así dos magnitudes, que quedarán expresadas como un cierto número de gramos, y cada uno de estos números los obtenemos por métodos diferentes y aparentemente poco relacionados. El principio de Arquímedes nos dice que, asombrosamente, estos - dos números que no tenían porque guardar ninguna relación, sí es tán relacionados: ¡los dos números son iguales! (¡Eureka!).

B) Ley de las palancas. En una palanca en equilibrio como la de la figura



los pesos colocados M_1 y M_2 son invérsamente proporcionales a las longitudes de los brazos de palanca:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

Aquí nuevamente sobre la palanca en equilibrio realizamos varias medidas. Por un lado, con una balanza obtenemos los pesos M_1 y M_2 y dividimos el número de gramos en M_1, entre el número de gramos en M_2, obteniendo así un primer número. Despues con una regla obtenemos las distancias ℓ_1, y ℓ_2, dividimos el número de centímetros en ℓ_2 entre el número de centímetros en ℓ_1, obteniendo así un segundo número. La ley de las palancas nos dice que los dos números así obtenidos por métodos tan distintos resultan siempre ser iguales.

La ley puede también expresarse fijando ℓ_1 y M_1 y tomando para cada peso M la distancia ℓ a la cual debe colgarse para que la palanca quede en equilibrio. La relación entre ℓ y M queda entonces expresada por:

$$\ell = \frac{\ell_1 \cdot M_1}{M} = \frac{k}{M}$$

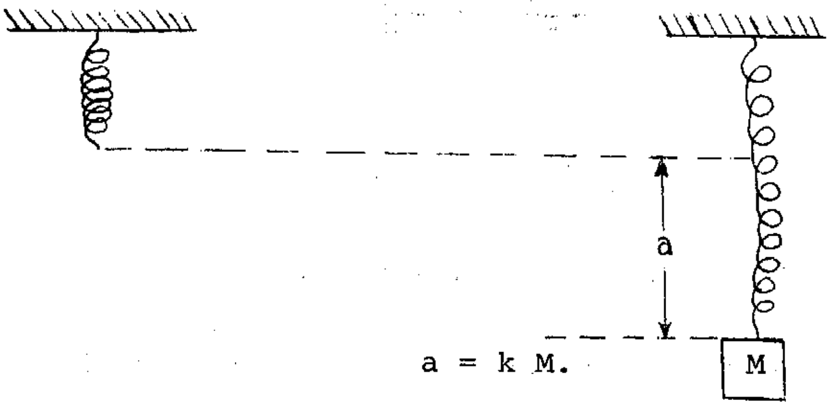
ó

$$\ell M = k$$

donde $k = \ell_1 \ M_1$ es un cierto número fijo.

Es interesante notar que Arquímedes, quién también descubrió esta ley, no llegó a expresarla en ninguna de estas últimas formas. La dificultad surge del hecho de que los griegos no tuvieran un concepto de número, sólo de magnitud. Ellos sabían qué significaba el producto de dos distancias: una área. Pero; qué significaba multiplicar dos magnitudes tan distintas como un peso y una longitud? Hoy no nos preocupamos por eso y podemos formar el producto ℓm, llamado el momento. Para cálcular el momento nos basta saber que ℓ es un cierto número de centímetros y **M** un cierto número de gramos. Multiplicamos esos dos números y obtenemos otro que nos mide el momento, y a este número le agregamos la "unidad" **g.cm** para recordar las unidades que se utilizan en las mediciones originales. Así, si ℓ = 3cm. y **M** = 5 g., tenemos que ℓM = 15g.cm. ¿Qué significa un g.cm? En realidad no importa, aunque en cada situación particular en la que nos aparezcan cantidades expresadas en g.cm podemos dar una interpretación física concreta. Lo importante es que tenemos nuestros números y que podemos operar con ellos. El misterio desaparece.

C) **Ley de Hooke.** El alargamiento de un resorte es proporcional al peso que se le cuelga.



$$a = k\,M.$$

donde **k** es un número fijo para el resorte dado.

D) **Ley de la caída libre de los cuerpos** (Galileo):

$$h = \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

E) **Ley de la gravitación universal** (Newton):

$$F = G\,\frac{M\,M'}{r^2}$$

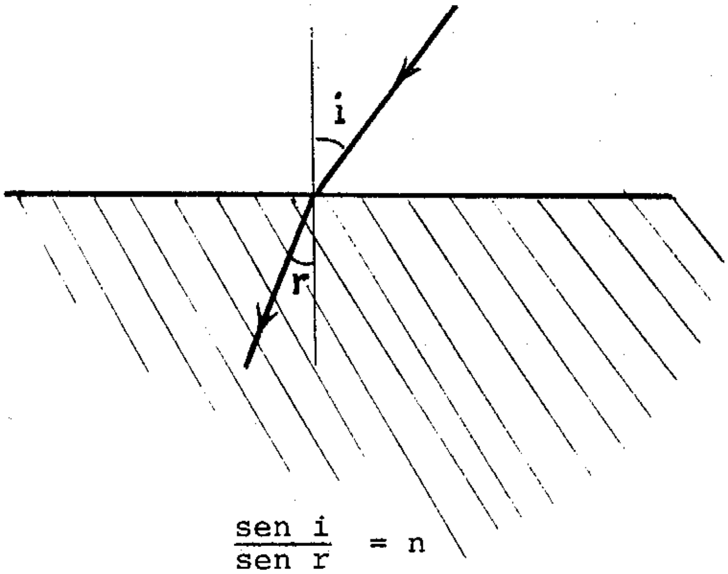
Aquí la fuerza **F** es un número que podemos calcular a partir de mediciones sobre el movimiento de cada cuerpo, utilizando la Ley de Newton **F = m a**, y la expresión de la derecha es otro número que podemos calcular pesando, midiendo, multiplicando y dividiendo. Suponiendo que las masas **M** y **M'** no cambian durante el proceso, podemos escribir

$$F = \frac{k}{r^2}$$

donde $k = G\,M\,M'$ es un número fijo de unidades $g \cdot cm^3 \cdot seg^{-2}$.

(¿Qué cosa es $\mathbf{seg}^{-2} = \frac{1}{\mathbf{seg}^2}$? ¿Qué es un "segundo cuadrado"?)

F) **Ley de Snell.** El seno del ángulo de refracción de un rayo de luz que atraviesa la frontera entre dos medios es proporcional al ángulo de incidencia.



$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n$$

El número **n** es fijo para los dos medios dados y se llama el índice de refracción.

G) **Ley de Stefan.** La radiación total emitida por un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura.

$$R = k\ T^4$$

H) **Ley de Plank.** La energía radiada por un cuerpo negro en la frecuencia μ está dada por

$$E = \frac{C}{e^{h\mu/kT} - 1}$$

donde C, h, k son constantes.

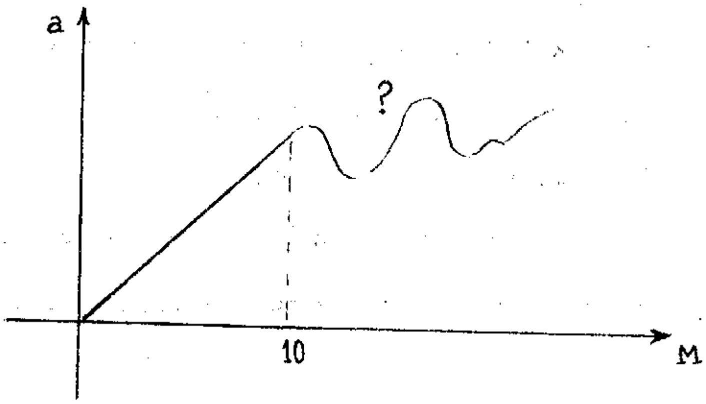
En todas estas leyes se encuentran relacionadas magnitudes de muy diversa naturaleza: pesos, longitudes, tiempos, ángulos, temperaturas, etc., etc. Y se pueden relacionar gracias a que todas ellas las hemos expresado mediante números. En cada caso la ley nos dice que dos o más magnitudes no pueden varias arbitrariamente, independientemente. El valor de una de ellas depende de las otras. Así en la ley de la caída de los cuerpos la distancia recorrida *depende* del tiempo transcurrido. Por el contrario, esta misma ley nos dice que dicha distancia *no depende* de la masa del objeto (como creían erróneamente los griegos).

Además la dependencia es de cierto tipo: el valor de una de las magnitudes queda completamente determinada si conocemos el valor de la ó las restantes. Una relación de este tipo se conoce como una *dependencia funcional*, y decimos que una magnitud está en función, ó es función, de las restantes. Nos restringiremos por ahora a considerar sólo dos magnitudes. A una magnitud por ahora a considerar sólo dos magnitudes. A una magnitud que puede tomar diversos valores en el desarrollo de un proceso se le acostumbra llamar una magnitud variable o, simplemente, una variable. Entonces decimos que una variable es función de otra si para cada valor de la segunda, llamada variable independiente, le corresponde un único valor de la primera, llamada variable dependiente.

Pero ¿Qué es una magnitud? Conocemos varios tipos de magnitudes como longitudes, pesos, temperaturas, etc., pero difícilmente podríamos dar una definición precisa. Los objetos matemáticos que estamos manejando son en realidad números reales y lo que estamos estableciendo son relaciones entre números reales. Cada una de las fórmulas que hemos escrito nos expresan reglas que a cada número le hacen corresponder otro. Son estas funciones entre números las que podemos definir con precisión; y lo haremos dentro de un momento. Primero haremos algunas consideraciones.

Si estamos ya trabajando con números, ¿Qué es una variable? ¿Un número variable? Esto no tiene sentido. Sin embargo es conveniente conservar el término "variable", pero con un sentido más preciso. En las fórmulas anteriores aparecieron las variables $F, P, M, \ell, t, h, a, r, T,$ etc., las cuales aparecían en fórmulas y a las cuales podíamos asignar valores. ¿Qué son estas variables? En matemáticas se le llama al pan, pan y al vino, vino. Las "variables", F, P, M, etc., son <u>letras</u> que nos sirven para representar a un número cualquiera y que nos sirven para expresar las funciones en forma sencilla.

Finalmente las leyes de la naturaleza que hemos expresado mediante fórmulas no siempre son ciertas para todos los valores de las magnitudes que en ellas intervienen. Por ejemplo, la ley de Hooke sólo se cumple si el peso M es relativamente pequeño. Cuando ponemos un peso demasiado grande la ley ya no se cumple y si el peso es excesivo incluso se rompe el resorte. Es decir, sólo podemos asegurar que la ley es válida en un cierto intervalo: cuando el peso varía entre 0 y 10 kg., pongamos por caso. - Fuera de ahí el comportamiento del resorte ya no sigue a dicha - ley:



Lo mismo podríamos decir respecto a algunas otras leyes, aunque algunas, como la de la gravitación universal son ciertas, hasta donde sabemos, para todos los valores de las variables. Necesitamos, por lo tanto, considerar funciones que asocien un número real no a todos, sino sólo a un cierto conjunto de números - reales. Podemos ya dar la

Definición

Una función (numérica) es una regla que a cada número real perteneciente a un cierto conjunto $A \subset \mathbb{R}$ le hace corresponder - otro número real. El conjunto **A** se denomina el dominio de la función, y si llamamos **f** a la función escribiremos

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ejemplos de funciones: la que a todo número real le asocia su cuadrado, la que a todo número real positivo le asocia su raíz cuadrada positiva, etc.

Una <u>variable</u> es una letra que utilizamos para representar a un elemento cualquiera de un conjunto de números reales. Para evitar confusiones se le llama a veces a dicha letra una <u>variable real</u> y a las funciones arriba definidas, funciones reales de variable real. Las variables son muy útiles para denotar las funciones en forma precisa. Si **x** es un elemento cualquiera del conjunto **A**, al número real que le hacemos corresponder mediante la función **f** los denotamos **f(x)**. Así la función **f** que a todo número real le hace corresponder su cuadrado la denotamos por

$$f(x) = x^2$$

Aquí está dada en forma concisa la regla. Para saber "el valor de la función para un valor dado de **x**", (es decir el número que le asocia la regla **f** a un número cualquiera dado) basta substituir en la fórmula. Por ejemplo: $f(0) = 0^2 = 0$, $f(1) = 1^2 = 1$, f(200 = 40,000, f(1,387) = 1.923769, etc.

Mediante estas funciones es que expresamos las leyes de la naturaleza. Por ejemplo la función $f(m) = kM$, que es una regla matemática entre números, sirve para expresar numéricamente la ley de Hooke, que es una ley física que relaciona magnitudes. La dependencia funcional de una magnitud con respecto a otra queda así descrita, cuando expresamos las magnitudes mediante números, por una función, en el sentido matemático de la palabra.

<u>Ejemplos de funciones</u>:

$$I:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I(x) = x \text{ (función idéntica)}$$

$$g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 4x^4 - x + 1$$

$$h:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = +\sqrt{x}$$

$$k:\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k(x) = \frac{1}{x^2}$$

Donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de reales no-negativos y $\mathbb{R}^*$ es el conjunto de reales distintos de 0. Otros conjuntos de reales son los intervalos. Un intervalo es el conjunto de reales comprendidos entre dos fijos:

Los hay de varios tipos: intervalos cerrados

$$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$$

abiertos, $\quad (a,b) = \{ x \mid a < x < b \}$

semiabiertos, $\quad (a,b] \quad \{ x \mid a < x \le b \}$

$$[a,b) = \{ x \mid a \le x < b \}$$

También se utiliza la misma notación, usando los símbolos ∞ y $-\infty$: para denotar los intervalos infinitos, o rayos

$$(-\infty,b] = \{\, x \mid x \leq b \,\}$$

$$(a,\infty) = \{\, x \mid a < x \,\}, \text{ etc.}$$

Con esta notación, $\mathbb{R}^{+} = [0,\infty)$, $\mathbb{R}^{*} = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

Otras funciones:

$$\textbf{sen: } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\textbf{tan: } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \; .$$

$$\textbf{ang sen: } [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tan x no está definida para $x = \pm \frac{\pi}{2}$, **ang sen x** lo podemos definir como el ángulo (en radianes) cuyo seno es **x** y que está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$; dado cualquier valor de **x** en el intervalo $[-1,1]$ siempre hay un único ángulo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es **x**, es decir, que así definida, **ang sen** es efectivamente una función.

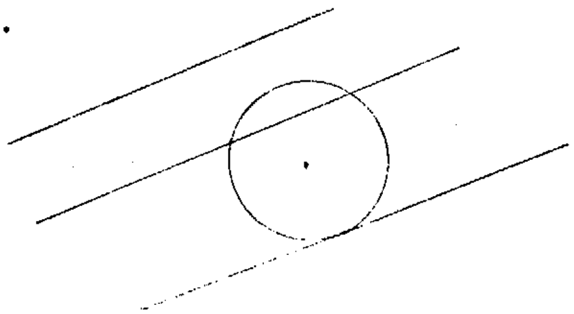
III. LOS PROBLEMAS CLASICOS

Tres problemas principales, además de los problemas del movimiento, fueron los que dieron origen a los métodos del cálculo: el problema de las tangentes, los problemas de máximos y mínimos y el problema de las cuadraturas. Veremos en este capítulo algunos ejemplos de estos problemas y su resolución por métodos especiales, los cuales, sin utilizar el cálculo, prefiguran ya los métodos de éste.

El Problema de las Tangentes

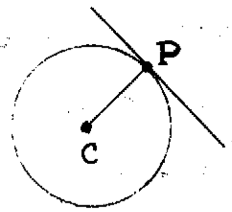
a) La tangente a un círculo.

Con relación a un círculo, una recta en el plano puede estar en una de tres posiciones: o bien la recta no intersecta al círculo, o bien lo atraviesa en dos puntos, o bien lo toca en un sólo punto.

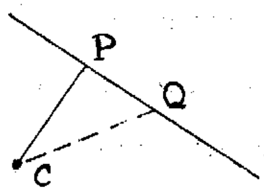


En el segundo caso la recta se llama una secante al círculo y en el tercero se llama tangente.

El problema consiste en encontrar la tangente a un círculo que pase por un punto dado de éste. La solución es bien conocida: para encontrar la tangente que pasa por un punto **P** del círculo se traza el radio **CP** y la recta perpendicular a **CP** que pasa por **P** es la tangente requerida.



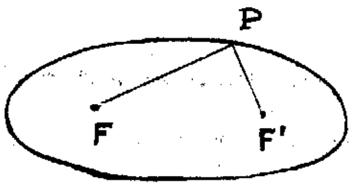
El resultado es claro, pero debemos demostrarlo. Porqué es la recta así construida la tangente? ¿Por qué esta recta no corta al círculo en ningún otro punto?. Esto es fácil de demostrar; basta demostrar que ningún otro punto de la recta pertenece al círculo. Si Q es cualquier otro punto de la recta, tenemos que **CQ>CP**, porque **CP** es la perpendicular a la recta y, por lo tanto, la distancia CP es la menor distancia del punto a la recta.



Pero si **CQ>CP = r**, el radio del círculo, ésto quiere decir que Q no es un punto del círculo, ya que por definición, la distancia de cualquier punto del círculo al centro **C** debe ser **r**. Luego **P** es el único punto de la recta que está en el círculo, y ésta recta es la tangente.

b) **La tangente a la elipse.**

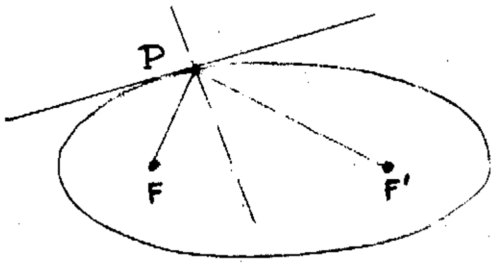
Recordemos la definición de la elipse, para empezar. Si **F** y **F'** son dos puntos del plano y **a** es un número (de preferencia mayor que la distancia **FF'**), al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a **F** y **F'** es **a**, es por definición, una elipse



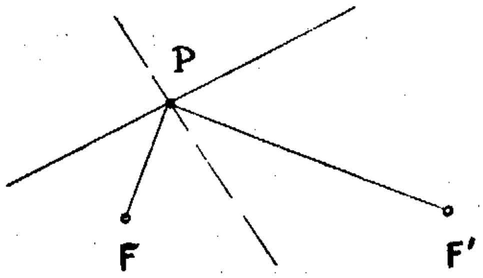
Es decir, la elipse es el conjunto $\{ P \mid PF + PF' = a \}$. A los puntos **F** y **F'** se les llama los focos de la elipse. Si los dos focos coinciden, la elipse es un círculo de radio **a/2**. (Recordar el método del jardinero para trazar elipses).

La construcción de la tangente a la elipse por un punto dado generaliza la del círculo, pero es algo más complicada. (La primera impresión es que debemos trazar el segmento de la recta que une a **P** con el centro de la elipse, que es por definición el punto medio del segmento **FF'**, y después trazar la recta perpendicular; pero esta consturcción no nos da la tangente más que en algunos casos especiales. El lector podrá ver cuales son estos casos especiales después de ver la construcción correcta).

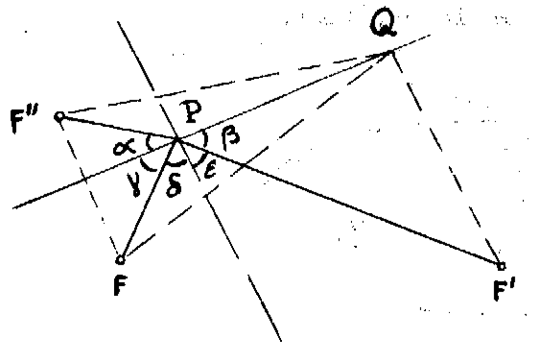
La construcción es la siguiente: Trácese la bisectriz del ángulo **FPF'**. La perpendicular a esta bisectriz que pasa por el punto **P** es la tangente a la elipse.



Nuevamente tenemos que demostrar ésto, para lo cual haremos ver que cualquier otro punto **Q** de la recta no pertenece a la elipse. Para ésto hay que hacer ver que **QR + QF** $\neq$ **a**. De hecho demostraremos que **QF + QF'** es mayor que **a**. Olvidándonos de la elipse, lo que tenemos es una recta, dos puntos **F** y **F'** fuera de la recta, y un punto **P** sobre la recta tal que la perpendicular a ésta en el punto **P** bisecta el ángulo **FPF'**.

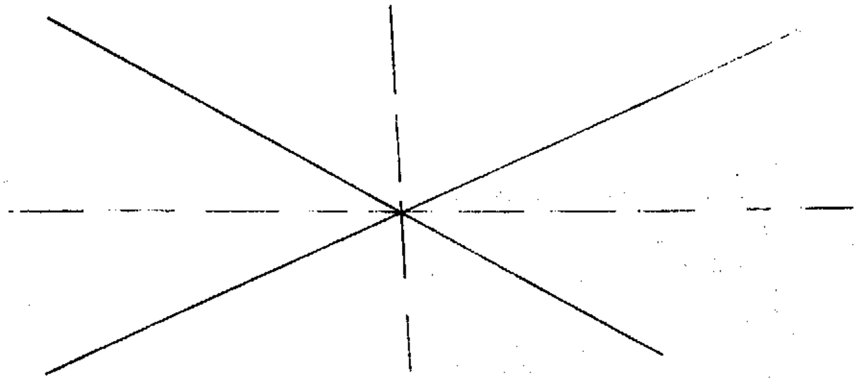


Y tenemos que demostrar que para cualquier otro punto **Q** de la recta **QF + QF'** es mayor que **PF + PF'**. O sea que **P** es el punto de la recta tal que la suma de sus distancia a **F** y **F'** es mínima. Para hacerlo reflejamos el punto **F** respecto a la recta, obteniendo el punto F''.



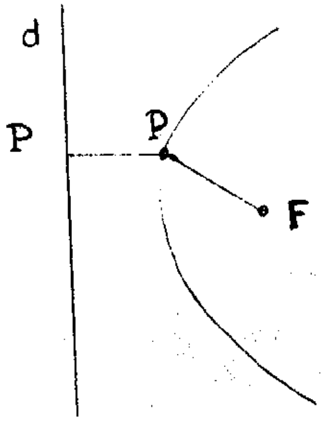
Como la recta es la bisectriz perpendicular del segmento FF'', tenemos que QF = QF'' para cualquier otro punto Q sobre la recta y en consecuencia también QF + QF' = QF'' + QF'. Hemos reducido con esto el problema al de encontrar el punto Q sobre la recta tal que QF'' + QF' sea mínima. Pero este punto es claramente la intersección del segmento F'F'' con la recta. Y este punto es tal que los ángulos α y β son iguales y como $\alpha = \gamma$ tenemos que $\gamma = \beta$ y que $\delta = \varepsilon$. O sea que el punto tal que QF + QF' = QF'' + QF' es mínimo es el punto P tal que los ángulos δ y ε son iguales, que es lo que se quería demostrar. Volviendo a la elipse, hemos demostrado que para cualquier punto Q de la recta distinto de P, QF + QF' > PF + PF' = a y que por lo tanto la recta sólo toca a la elipse en el punto P y es la tangente. (nótese de pasada que la tangente es la bisectriz de las rectas PF y PF': dadas dos rectas que se cortan en un punto, hay dos bisectrices, que son perpendiculares entre sí. La unión de las dos bisectrices es el conjunto de puntos tales que -

están a la misma distancia de ambas rectas).

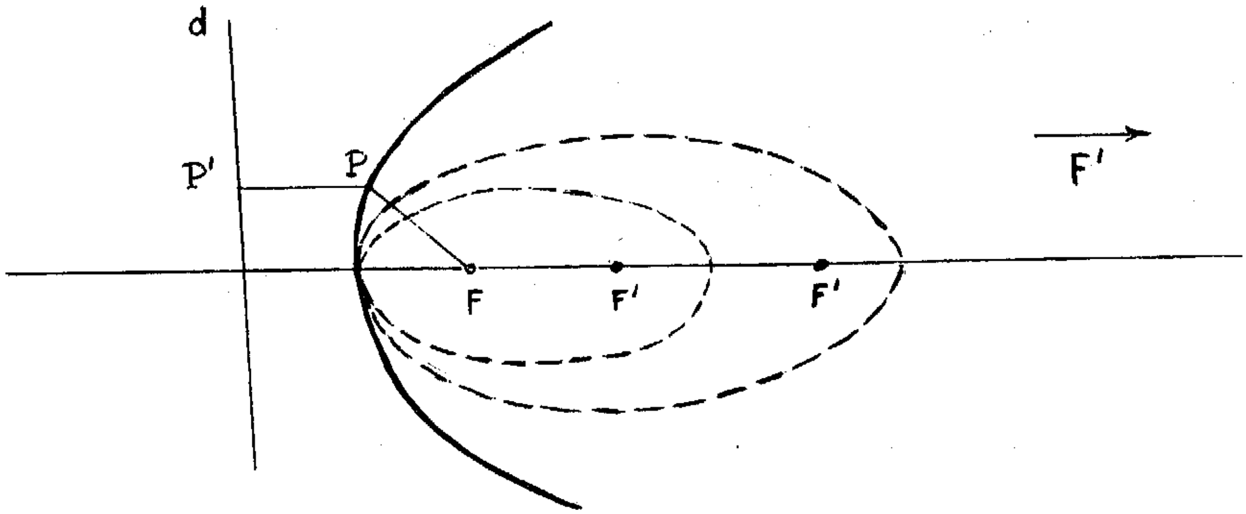


c) **La tangente a la parábola.**

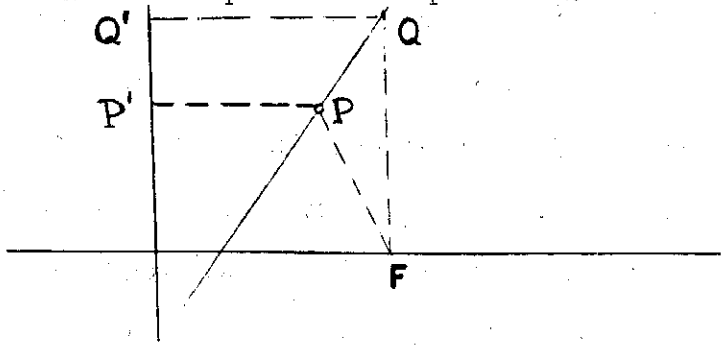
Una parábola es el conjunto de puntos tales que su distancia a un punto **F** y a una recta **d** son iguales.



El punto **F** se llama el foco de la parábola y la recta **d**, su directriz. Es decir la parábola es el conjunto de puntos **P** tales que **PF = PP'**, donde **P'** es la proyección perpendicular de **P** sobre la recta **d**. Podemos deducir cual debe ser la tangente a la parábola por un punto **P** si pensamos en la parábola como una elipse, uno de cuyos focos **F'** "está en el infinito", es decir que si hacemos que **F'** se aleje de **F** a lo largo de la rec ta FF', las elipses



Siguiendo esta línea de razonamiento, la tangente a la parábola debe obtenerse bisectando el ángulo FPF' y tomando la perpendicular a esta bisectriz. Pero si F' es un punto al infinito, el segmento PF' es la semi-recta paralela al eje de la parábola, que es la perpendicular a d que pasa por F. Luego la tangente debe ser la bisectriz del ángulo P'PF. Este razonamiento nos da el resultado correcto, pero debemos dar una demostración rigurosa que no utilice estas ideas del infinito. Para demostrar que la bisectriz del ángulo P'PF es la tangente, consideramos nuevamente cualquier otro punto Q sobre esa recta.



Como $PP' = PF$, la bisectriz del ángulo $P'PF$ es la bisectriz perpendicular del segmento $P'F$ (o, dicho de otra forma P' es la reflexión de F respecto a la bisectriz). Luego, para cualquier punto de la bisectriz $QP' = QF$ Pero como QQ' por ser Q' la proyección perpendicular de Q sobre d tenemos que QQ' es menor que QF y Q no es un punto de la parábola. (Cabe mencionar aquí que el argumento que utiliza los puntos al infinito se puede hacer perfectamente riguroso. Para ello se requieren los conceptos de la Geometría proyectiva).

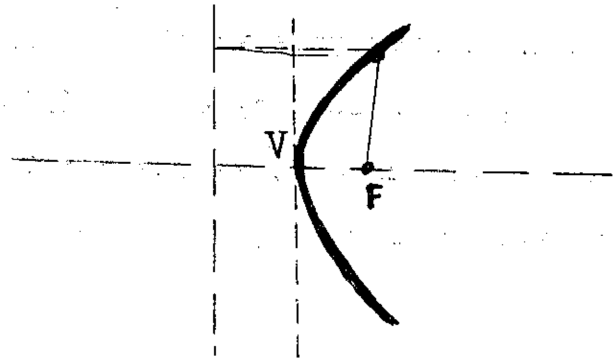
Concluirémos con la siguiente moraleja: el problema de las tangentes tiene algo que ver con máximos y mínimos. (En el caso de la parábola, P es el punto de la recta tal que $PF-PP'$ es mínimo, y en este caso igual a 0).

Ejercicios

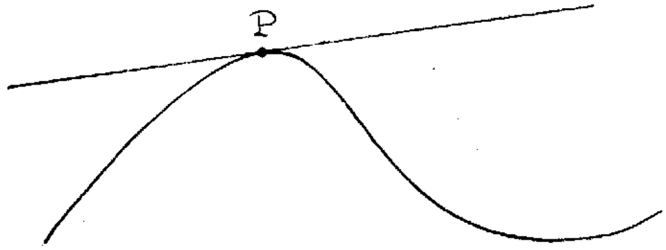
1. Construir la tangente a una hipérbola (dando, naturalmente la demostración correspondiente).

2. Demostrar que en los casos considerados hay una sola tangente en cada punto. Es decir, que cualquier otra recta que pase por el punto dado de la cónica es una secante. Que pasa en el caso del vértice de la parábola? (el vértice de una parábola es el punto donde la parábola cruza el eje).

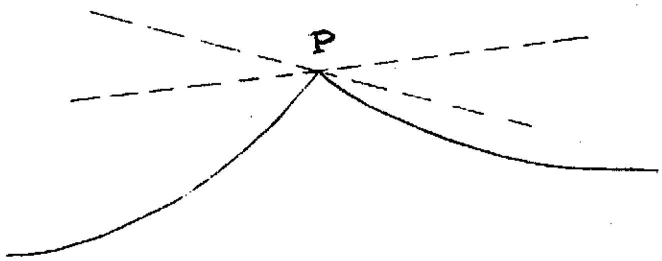
Hemos resuelto el problema de las tangentes para el caso de las cónicas, que son las curvas más simples fuera de las rectas. Pero hay muchas otras curvas (las cicloides por ejemplo). ¿Cómo encontrar la tangente a una curva cualquiera?. Hay un problema más básico, ¿qué debemos entender por la tangente a una curva?. Para el círculo y la elipse utilizamos la definición de que la - tangente es la recta que toca a la curva en un sólo punto. Pero incluso para la parábola esta definición es ambigua, ya que en - el vértice, tanto el eje como la perpendicular al eje intersec-tan a la parábola en un sólo punto.



Aquí es claro que el eje no es la tangente a la parábola, - sino la perpendicular, pero eso no lo podemos decidir a partir - de la definición de tangente como recta que intersecta a la cur-va en un solo punto. El eje "corta" a la parábola, no la "toca", podríamos decir. Pero tendríamos que decir qué entendemos por - que una recta "toque" a una curva, lo cual nos trae al problema original. En casos como la curva



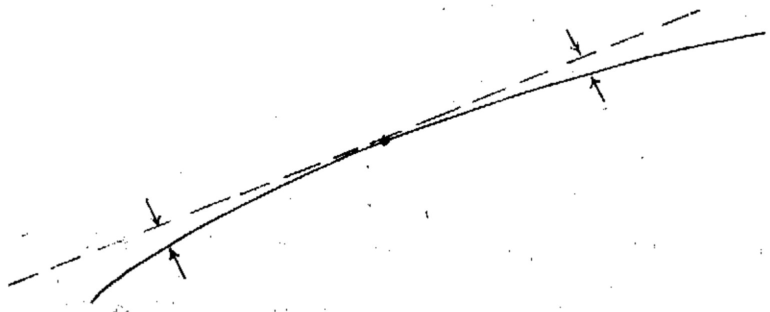
estaremos de acuerdo en que la recta que hemos dibujado es la tangente a la curva en el punto P . Pero esta recta intersecta a la curva en dos puntos. Otra situación más anómala se nos presenta con la curva



Por el punto P pasan muchas rectas que intersectan a la curva en un sólo punto. ¿Debemos pensar que todas ellas son tangentes a la curva?, ¿o que ninguna lo es?.

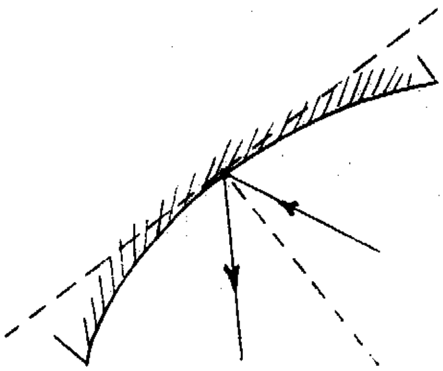
Y aunque no podamos definir lo que es la tangente, todos estamos de acuerdo en que en todas las curvas que hemos considerado, excepto la última, la tangente es la recta dibujada. El problema es dar una definición rigurosa. Esto tardaremos aún en hacerlo.

Por lo pronto podemos dar una definición informal que vemos que se acerca a nuestra idea intuitiva: la tangente a una curva en un punto es la recta que más se parece a la curva de las que pasan por este punto.

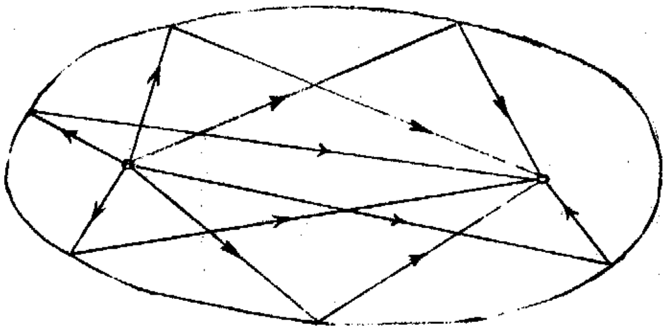


Aún falta definir en qué sentido se parece más la tangente a la curva, pero podemos precisar diciendo que si tomamos un segmentito de tangente y un segmentito de curva alrededor de P, estos dos segmentitos se parecen, y cuanto más pequeños son, más y más se parecen.

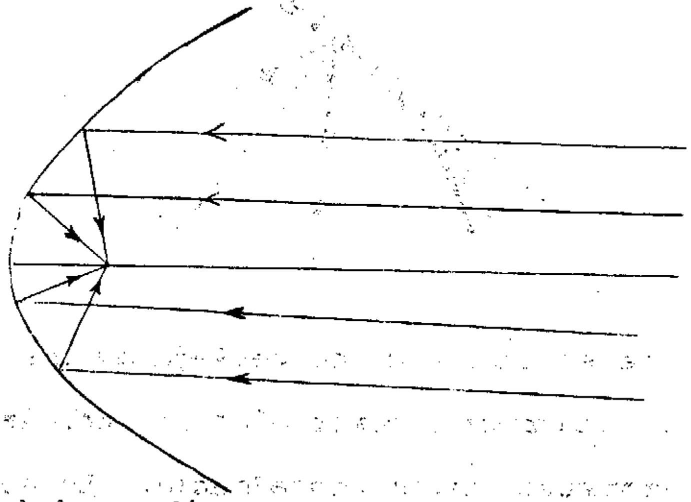
La corrrección de esta definición informal se hace patente en las aplicaciones que tiene. Primeramente supongamos que tenemos un espejo curvo y queremos saber cómo se va a reflejar un rayo de luz en ese espejo. El espejo es una superficie, pero supondremos que todo sucede en un plano y que el espejo es una curva. Sabemos como se refleja un rayo de luz si el espejo es plano, o en nuestro caso, una recta: "el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión". Si el rayo de luz es muy fino, tocará la curva en un segmento muy pequeño, que se parece mucho a un segmento de la tangente, y cuanto más fino sea, menos distinguirá entre la curva y la tangente. Por lo tanto podemos decir que un rayo de luz finísimo, que podemos suponer reducido a una recta, se reflejará en la curva como si se reflejara en la recta tangente:



Como ya sabemos cómo se refleja en una recta, con nuestro - concepto de tangente sabemos cómo se refleja en la curva. Este hecho se comprueba experimentalmente. En particular esto tiene una gran aplicación para el caso de las cónicas. En el caso de la elipse, todos los rayos de luz que parten de un foco se concentran en el otro foco:



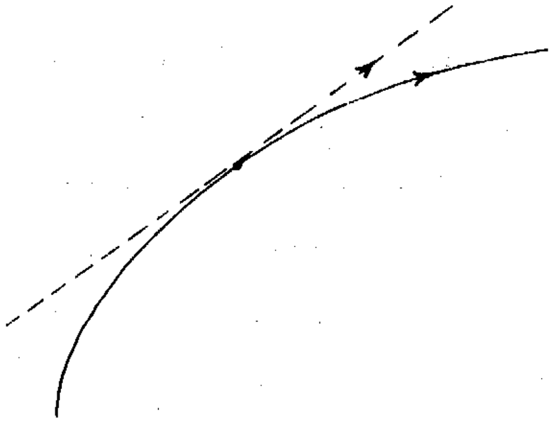
En un espejo parabólico, un haz de rayos de luz paralelos al eje (como, por ejemplo, podemos considerar a los que provienen de una estrella muy lejana) se concentran en el foco. Esta es la razón por la cual los espejos parabólicos se utilizan en los telescopios.



Estos hechos se deducen directamente del estudio que hemos hecho de las tangentes a las cónicas. Los espejos de los telescopios tienen la forma de paraboloides de rotación; es decir tienen la forma de la superficie que se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de su eje. Si cortamos al espejo con cualquier plano que contenga al eje obtenemos una parábola con el mismo foco que el original. Por esta razón, y por la simetría del paraboloide respecto al eje, todos los rayos de luz paralelos al eje, sin importar el plano en que se encuentren, se reflejan concentrándose en el foco.

Lo mismo que con la luz sucede para el sonido. Este es el origen de muchos fenómenos acústicos. En una cápsula que tiene la forma de un elipsoide de rotación, lo que habla en voz baja una persona colocada en un foco es escuchado perfectamente por una persona situada en el otro foco; una persona situada en otro punto sólo escucha cuando más un murmullo ininteligible. Esto - se debe a que todas las ondas sonoras emitidas por la primera - persona en todas direcciones se concentran en el oído de la otra persona y como además tardan lo mismo en llegar porque recorren la misma distancia, según la definición de la elipse, todas llegan perfectamente sincronizadas. A cualquier persona situada en otro punto las únicas ondas sonoras que le llegan son las que -- le llegan en línea recta desde el que habla y las que se reflejan según la línea que lo une con el otro foco, las cuales ciertamente son una pequeñísima parte del total, y además le llegan defasadas.

Otra aplicación del concepto de tangente a una curva aparece al considerar un objeto que se mueve sobre una curva. Si el objeto se moviera en una recta diríamos que se mueve siempre en la misma dirección, pero al moverse en una curva decimos que "está cambiando constantemente de dirección". Esto sugiere que en cada momento se está moviendo en una dirección distinta, pero - ¿cómo definir esa dirección?. Nuevamente, si consideramos un - tramo pequeño de curva, el movimiento del objeto se parece al - que realizaría si se moviera en línea recta a lo largo de la tangente y cuanto más pequeño es el tramo, mayor es el parecido. - Por consiguiente, podemos considerar que la dirección en la cual se mueve "instantáneamente" al pasar por un punto se puede definir como la dirección de la tangente a la curva en el punto:

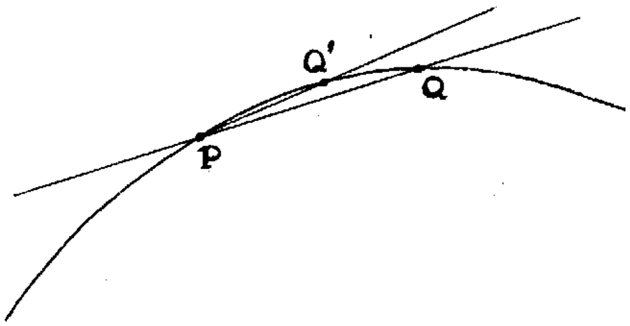


Esta idea es central en Mecánica. Una de las aplicaciones más inmediatas es al describir lo que sucede si desaparece la fuerza que hace que el objeto se mantenga en la curva. Al suceder ésto el objeto continuará moviéndose en la misma dirección en que se estababa moviendo en el momento de desaparecer la fuerza, por lo cual el razonamiento anterior nos indica que el objeto se deberá "salir por la tangente". Y esto es precisamente lo que sucede cuando se suelta una honda y desaparece la fuerza que mantiene a la piedra girando en círculo, o cuando al patinar un automóvil desaparece la fuerza de fricción entre las llantas y la carretera que es la que mantiene al automóvil sobre la curva.

Finalmente, muchos conceptos geométricos asociados a rectas se puede extender a curvas, substituyéndolas por sus tangentes. Por ejemplo, el ángulo entre dos curvas que se cortan en un punto se puede definir como el ángulo que forman sus tangentes en el punto.

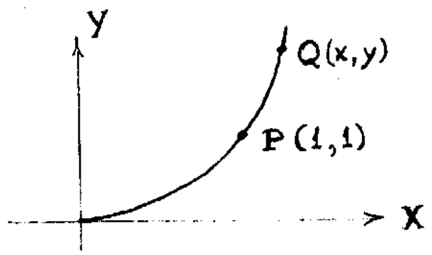
Vemos así que el concepto de la tangente como la recta que más se parece a una curva en un punto es utilísimo para extender muchas ideas, conceptos y leyes, del caso de rectas al caso de curvas más generales.

Este concepto nos permitirá también dar un método para calcular las tangentes, y de hecho para dar una definición más precisa. Si consideramos un punto Q sobre la curva cercano al punto P y tomamos la recta PQ, vemos que esta recta se parece a la curva.



Si tomamos un punto Q' aún más cercano a P, la recta PQ' se parece aún más a la curva en el punto P, y por lo tanto será más parecida a la tangente. Si podemos averiguar qué sucede cuando el punto Q' se acerca más y más a P, podremos averiguar cuál debe ser la tangente. Esta es la idea de considerar a la tangente como "límite" de secantes.

Podemos aplicar esta idea para algunos de los casos ya estudiados. Consideremos la parábola $y = x^2$ y tratemos de calcular la tangente en el punto $P(1,1)$.



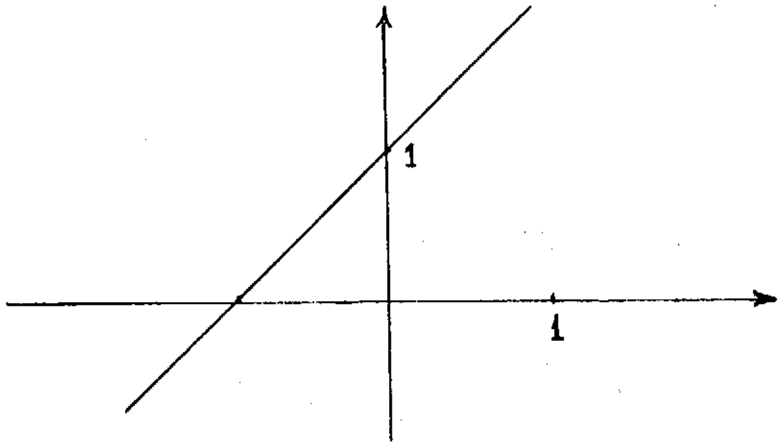
Si consideramos todas las rectas que pasan por el punto P, vemos que quedan unívocamente determinadas por su pendiente, que es por definición la tangente del ángulo que forman con la dirección positiva del eje X. (no confundir la tangente de un ángulo, que es una función trigonométrica con la tangente a una curva). Si $Q(x,y)$ es cualquier otro punto de la curva, la pendiente de la recta PQ es:

$$m = \frac{y - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \qquad (x \neq 1)$$

La primera igualdad surge del hecho de que $y = x^2$ por ser Q un punto de la parábola. La segunda se cumple para $x \neq 1$. Nótese que para $x = 1$ la expresión algebraica de la pendiente de la secante PQ no tiene sentido y que al mismo tiempo no tiene sentido hablar de la secante porque en ese caso P y Q coinciden y la recta PQ no está definida. Pero la expresión algebraica final, $x + 1$, si tiene sentido para $x = 1$, y vamos a tratar de ver que sucede si substituimos ese valor. La expresión

$$M = x + 1 \qquad (x \neq 1)$$

nos da una función que para cada número real distinto de 1, que corresponde a la abcisa del punto Q, nos asocia otro número real que nos da la pendiente de la secante PQ. La gráfica de la función es la siguiente:



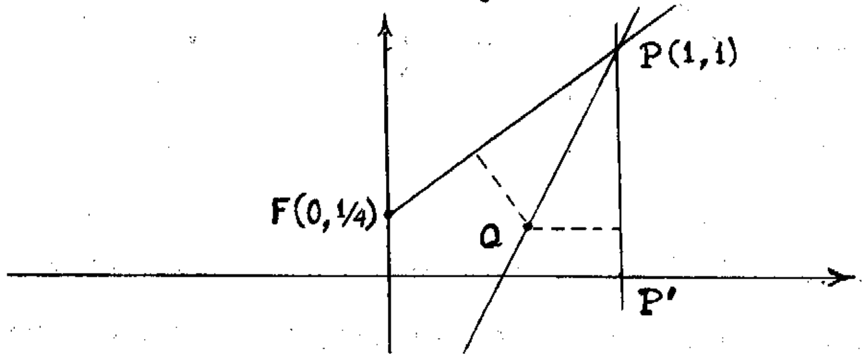
Es decir, la recta $y = x + 1$ menos el punto $(1,2)$. ¿Qué valor deberá tener la pendiente de la tangente? Se ve que lo más natural es completar la gráfica añadiendo el punto $(1,2)$. Al - acercarse x al valor de la pendiente m se acerca más y más al valor 2, y como la secante se acerca más a la tangente cuando Q se acerca a P, o sea, también, cuando x se acerca a 1, podemos decir que el valor de la pendiente de la secante debe ser 2. Así pués, concluimos que la tangente a la parábola en el punto $(1,1)$ es la recta que pasa por ese punto y tiene pendiente 2.

¿Coincide esto con la construcción que dimos anteriormente? La parábola $y = x^2$ es la que tiene por foco el punto $(0,\frac{1}{4})$ y por directriz la recta $y = -\frac{1}{4}$, según se puede verificar escribiendo la ecuación de esta parábola. Luego lo que hay que verificar es que la recta de pendiente 2 que pasa por $(1,1)$ es la bisectriz de la recta PF y de la recta vertical $x = 1$. La ecuación de la presunta tangente es

$$\frac{y - 1}{x - 1} = 2 \qquad ó \qquad y = 2x - 1$$

y de la recta PF

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1-0} = \frac{3}{4} \quad ó \quad 4y - 3x - 1 = 0$$



La distancia de cualquier punto R de la recta $y = 2x - 1$ a la recta PF está dada por

$$\frac{4y - 3x - 1}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4(2x-1) - 3x - 1}{\pm 5} = |x-1|$$

la cual es también la distancia de Q a la recta $x = 1$, (ver la fórmula de la distancia de un punto a una recta en cualquier libro de Geometría Analítica). Es decir, la recta $y = 2x - 1$ es la bisectriz del ángulo FPP', la cual sabemos ya que es la tangente a la parábola en el punto (1,1). Hemos verificado que este método da el resultado correcto en este caso.

Podemos verificarlo también con el círculo. Encontremos la tangente al círculo $x^2 = y^2 = 25$ en el punto P(3,4). Si Q(x,y) es otro punto del círculo cercano a P (por lo cual podemos suponer que x y y son positivos), la pendiente de la secante OQ es

$$m = \frac{y-4}{x-3} = \frac{\sqrt{25 - x^2} - 4}{x-3} \qquad (x \neq 3)$$

Esta expresión nuevamente carece de sentido para $x = 3$, al igual que no tiene sentido hablar de la recta PP. En el caso anterior reducimos la expresión de la tangente a una en la cual tuviera sentido substituir $x = 1$. En este caso debemos buscar como transformar esta expresión. Para eso hay un truco bastante general, que se aplica cuando aparecen radicales. Multipliquemos denominador y numerador por el "Conjugado" del numerador que es

$$\sqrt{25 - x^2} + 4 : \quad m = \frac{\sqrt{25 - x^2} - 4}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{25 - x^2} + 4}{\sqrt{25 - x^2} + 4} = \frac{25 - x^2 - 16}{(x - 3)(\sqrt{25 - x^2} + 4)}$$

$$= \frac{(3 - x)\ (3 + x)}{(x - 3)\ (\sqrt{25 - x^2} + 4)} = - \frac{x + 3}{\sqrt{25 - x^2} + 4}$$

Todo esto es válido para $x \neq 3$, pero en la última expresión tiene sentido substituir $x = 3$ obteniendo $m = - 3/4$. Aunque en este caso es más difícil hacer la gráfica, podemos darnos cuenta de que cuando x se acerca a 3, m se acerca a $- 3/4$. Esto coincide con lo que demostramos antes; la recta OP tiene pendiente 4/3, y la perpendicular es la que tiene pendiente $-3/4$. Vemos nuevamente que este método nos da la tangente.

En la parte formal del curso se verá con precisión el concepto de límite y se justificarán los métodos aquí empleados.

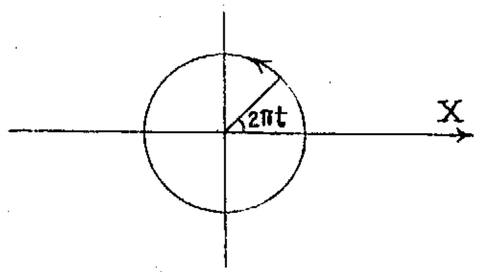
Por lo pronto nos ocuparemos de otro problema. Ya tenemos -

idea de lo que significa la tangente a una curva, pero, ¿qué es una curva? Una idea intuitiva es que una curva es la trayectoria de un punto que se mueve. Podemos precisar este concepto gracias a los conceptos ya desarrollados de función y números reales. El movimiento de un punto sobre un plano queda determinado si a cada instante de tiempo (dado por un número real) le hacemos corresponder un punto del plano (dado por una pareja de números reales). Por lo tanto el movimiento de un punto es algo que podemos representar mediante una función que a cada real asocie una pareja de números reales, es decir, una función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Ejemplos

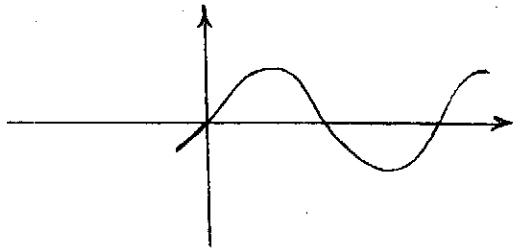
La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$ Como $\cos^2 2\pi t + \operatorname{sen}^2 2\pi t = 1$, $f(t)$ es siempre un punto del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Y es el punto que forma un ángulo $2\pi t$ con el eje X.



Al aumentar t vemos que el punto va girando alrededor del círculo con velocidad angular uniforme, y que en cada unidad de tiempo da una vuelta completa.

La función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(t) = (2t, 2t + 1)$ describe el movimiento de un punto que se mueve a velocidad uniforme sobre la recta $y = x + 1$.

La función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(t) = (t, \text{sen } t)$.



representa el movimiento de un punto que se mueve siguiendo la sinusoidal $y = \text{sen } x$.

Es claro que dar una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es lo mismo que dar dos funciones $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que son sus componentes: $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Cuando $f_1(t) = t$, la curva descrita es la gráfica de la función f_2 como se ve en el último ejemplo.

El movimiento circular uniforme es particularmente importante. Se trata de un movimiento periódico, el más simple de todos. Si consideramos una rueda que gira a velocidad uniforme sobre un eje fijo y sobre esa rueda marcamos un punto, al ver la rueda de frente vemos un punto que sube y baja en un movimiento periódico. Este movimiento está dado esencialmente por la función **sen t.** Vista así la función seno no es ya sólo un instrumento para calcular triángulos sino nos está representando un movimiento periódico muy natural, y esa es la razón por la cual las funciones trigonométricas aparecen con gran frecuencia en la descripción -

de fenómenos naturales.

Hay que observar que varias funciones nos pueden describir la misma curva. Esto se debe a que el punto que pensamos que está recorriendo la curva lo puede estar haciendo a velocidades distintas. Así las funciones

$$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

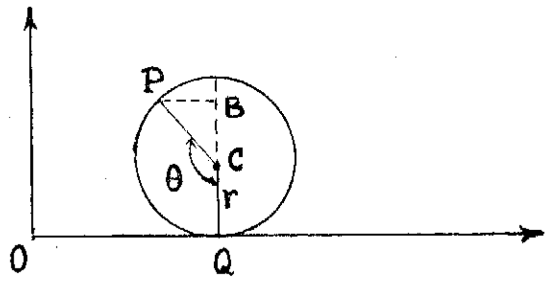
$$g(t) = (\cos 400\pi t, \operatorname{sen} 400\pi t)$$

$$h(t) = (\cos t^3, \operatorname{sen} t^3)$$

nos describen un punto que gira sobre un círculo, pero a diferentes velocidades. A cualquiera de esas funciones la llamaremos una parametrización de la curva, aunque a una curva la denotemos generalmente por una de sus parametrizaciones (es decir, hablaremos de la curva $f(t) = (2t, 25 + 1)$; aunque de hecho, esta no es una curva, sino una parametrización de una curva).

<u>Ejemplo</u>:

La cicloide. Para describir la cicloide mediante una expresión analítica, supondremos que la rueda se mueve sobre el riel a una velocidad uniforme v, y que para $t = 0$ está en el origen.



Sea r el radio de la rueda. Debemos describir la posición del punto en el momento t. La distancia OQ, distancia recorrida por el tren en el tiempo t es

$$OQ = vt$$

Pero como la rueda gira sin resbalar, OQ debe ser igual a la longitud del arco PQ. Esto nos permite calcular el ángulo $\theta = PCQ$ (en radianes), ya que

$$PQ = r\theta$$

(Fórmula para la longitud del arco circular en función del ángulo y el radio). Luego

$$\theta = \frac{PQ}{r} = \frac{OQ}{r} = \frac{vt}{r}$$

Esto nos permite calcular las coordenadas del punto P, ya - que $CB = r \cos$ y $PB = r \operatorname{sen} \theta$. Entonces las coordenadas de P son:

$$x = OQ - PB = vt - r \operatorname{sen} \theta = vt - r \operatorname{sen} \frac{vt}{r}$$

$$y = QC + CB = r + r \cos \theta = r + r \cos \frac{vt}{r}$$

y la función que describe el movimiento del punto de la rueda al girar ésta es

$$t \longrightarrow \left(vt - r \operatorname{sen} \frac{vt}{r}, r + r \cos \frac{vt}{r}\right)$$

Ya que se puede variar al gusto la velocidad con que se mueva el punto, para el efecto de dar una parametrización de la cicloide, podemos suponer que $v = r$, con lo cual queda la función

$$t \longrightarrow (r(t - \operatorname{sen} t),\ r(1 - \cos t))$$

Con nuestra definición de curva hemos introducido muchas "curvas" que ordinariamente no las consideraríamos como tales. Por ejemplo la función constante $f(t) = (2,3)$ nos da un punto que no se mueve y toda la curva se reduce a un solo punto, y generalmente no decimos que un punto sea una curva. Otro caso más anómalo estaría dado por la función

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } \ t < 0 \\ (0,1) & \text{si } \ t \geq 0 \end{cases}$$

Esta función nos describe el movimiento de un punto que durante todo tiempo con $t < 0$ está en el origen y de pronto, sin más trámite, aparece en el lugar de coordenadas $(0,1)$ para $t=0$ y permanece ahí para toda $t \geq 0$. Todos estos casos los debemos considerar como curvas ya que están dadas por funciones $f: \ \to \ {}^2$ bien definidas. Para acercarnos a la idea intuitiva de curva debemos restringir el tipo de funciones que utilizamos. Por ejemplo, podemos hablar de curvas continuas, que representan el movimiento de un punto que se mueve continuamente, es decir, sin dar saltos. Estas curvas estarán descritas por funciones continuas.

Con esta definición de curva podemos reformular nuestra definición de tangente. Si una curva está dada por la función - $f(t) = (f_1(t), f_2(t)$, y queremos encontrar la tangente a la curva en el punto P correspondiente a $t = t_0 + h$, donde h es un número pequeño (en valor absoluto). La pendiente de la recta PQ es

$$\frac{f_2(t_0 + h) - f_2(t_0)}{f_1(t_0 + h) - f_1(t_0)}$$

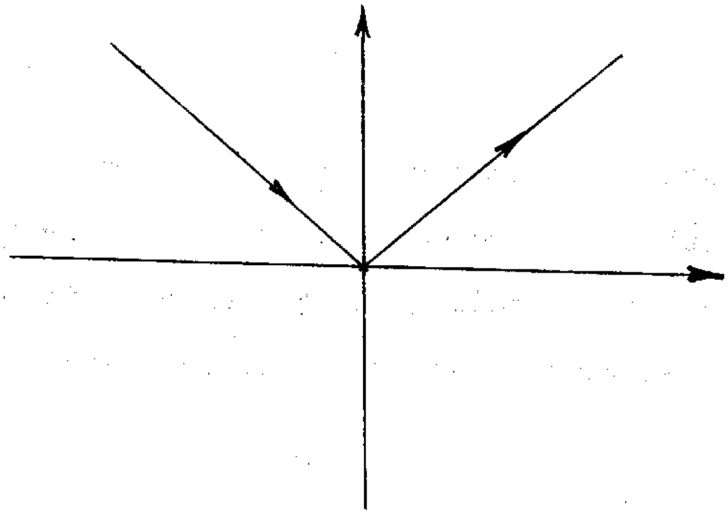
Si cuando h se hace más y más pequeño vemos que este número se acerca más y más a un número real, diremos que la curva tiene tangente en el punto P y la tangente será la recta que pasa por P y que tiene por pendiente a dicho número. Si la función es de la forma $f(t) = (t, g(t))$, es decir si se trata de una función - real, la expresión que debemos considerar cuando h se acerca a 0 es

$$\frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h}$$

Las curvas consideradas anteriormente, que abarcan sólo uno o dos puntos, no tienen tangente. Tampoco tienen tangente la curva

$$t \longrightarrow (t, |t|)$$

en el origen, es decir, para $t = 0$, como se ve fácilmente considerando valores positivos y negativos para h.



Ejercicios

Encontrar la expresión analítica de las cicloides corta y larga.

Encontrar analíticamente la tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$ en el punto $(5,4)$. comprobar que coincide con la construcción geométrica de la tangente.

Verificar que la curva $t \longrightarrow (t, |t|)$ no tiene tangente en el origen.

¿Cuál es la tangente a la cicloide en los puntos que están sobre el riel?

2. Máximos y mínimos

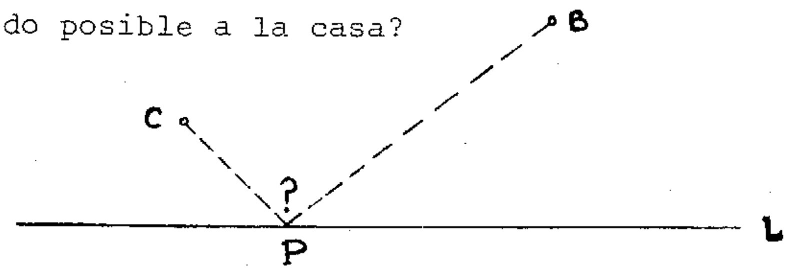
Los problemas de máximos y mínimos aparecen en todos los aspectos de la naturaleza y de la actividad humana. ¿Cuál es la ruta más corta entre la Ciudad Universitaria y la Unidad Profesional de Zacatenco? ¿Cuál es la más rápida? ¿Cuál es la hora mejor para hacer el recorrido? ¿Qué proporción de hierro y carbón da el acero más resistente? ¿Cómo se deben organizar las distintas etapas de la construcción de un edificio para que el costo total sea mínimo? ¿Cuál es la forma más efectiva de aprender cálculo? ¿Cuál es la mejor forma de impulsar la economía de un país? ¿Cómo se debe organizar la educación en México?, etc., etc. En todas estas cuestiones aparecen diversos criterios motivados por intereses personales o sociales acerca de que debemos entrender por "lo mejor". Pero una vez fijado el criterio debemos buscar un método para encontrar la mejor solución de acuerdo con él.

La naturaleza misma parece seguir caminos elegidos según criterios de optimización. Muchas leyes de la naturaleza se pueden reformular en términos de principios generales sobre máximos y mínimos. Un sistema mecánico (por ejemplo, una cadena flexible que cuelga de sus extremos) tiende a moverse hacia una posición de equilibrio, la cual se caracteriza porque su energía potencial sea mínima. La trayectoria de un rayo de luz de un punto a otro es siempre tal que el tiempo de recorrido sea mínimo. Al principio de mínima acción en mecánica nos dice que un cuerpo se mueve de tal forma que su "acción" sea mínima.

El cálculo es una herramienta fundamental para resolver una amplia gama de problemas muy concretos de máximos y mínimos. - Otros problemas más complicados se resuelven mediante el Cálculo de Variaciones que es una rama de las matemáticas surgida directamente del cálculo. Otros problemas mas sencillos, relacionados sobre todo con problemas económicos, han dado lugar al desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas como son la Programación Lineal, la Programación Dinámica, el Método de la Ruta Crítica, etc.

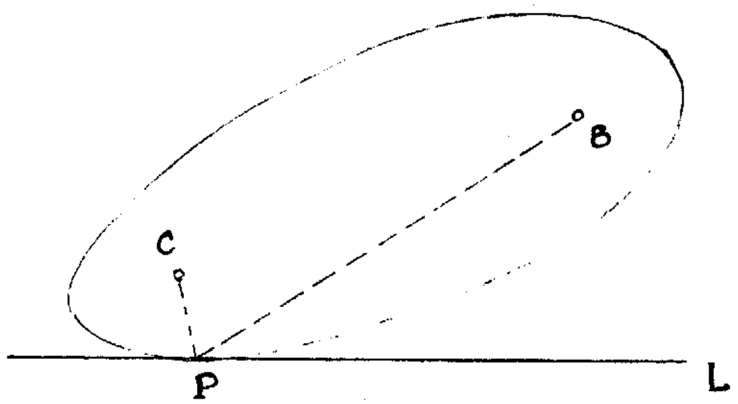
Veremos aquí unos cuantos problemas de máximos y mínimos del tipo de los que se resuelven utilizando el cálculo, pero como todavía no hemos desarrollado los conceptos necesarios, los resolveremos por métodos geométricos adaptados específicamente a ellos. Esto presupone un análisis cuidadoso de las funciones que aparecen en estos problemas. Pero aún con los métodos del cálculo este análisis es necesario, porque el cálculo no nos da automáticamente la solución de un problema en todos los casos.

A) El problema del bombero. Un bombero situado en el punto B observa que una casa situada en el punto C se está incendiando. Pero como su cubeta está vacía debe ir primero al río, representado por la recta L, a llenarla y después ir a la casa a apagar el fuego. ¿Hacia qué punto del río debe correr para llegar - lo más rápido posible a la casa?

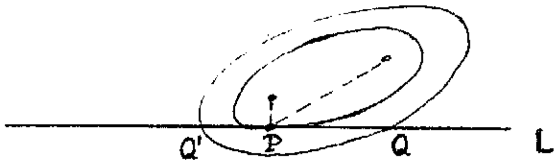


Este problema ya lo hemos resuelto en nuestro estudio sobre la tangente a la elipse. El bombero debe correr hacia el punto **P** del río tal que las rectas **BP** y **PC** hagan el mismo ángulo - con la perpendicular al río. Este es el punto tal que **BP + PC** es mínimo.

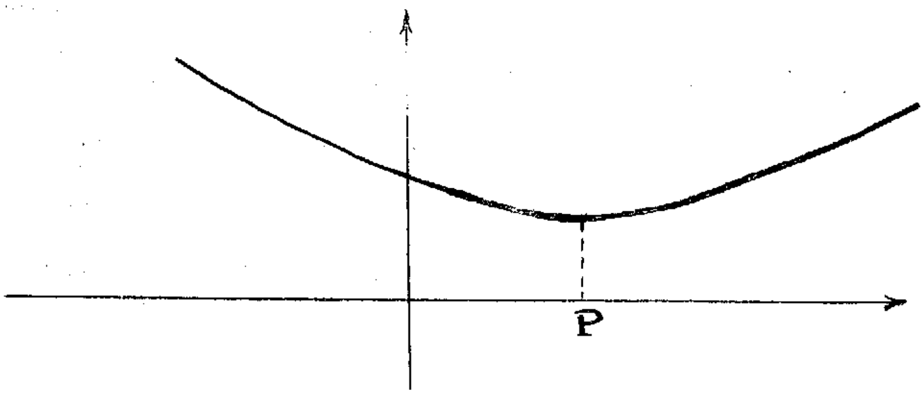
Otra forma equivalente de expresar la solución, según lo que ya hemos visto, es que el punto **P** es tal que la elipse que tiene a **C** y **B** por focos y pasa por **P** es tangente a **L**.



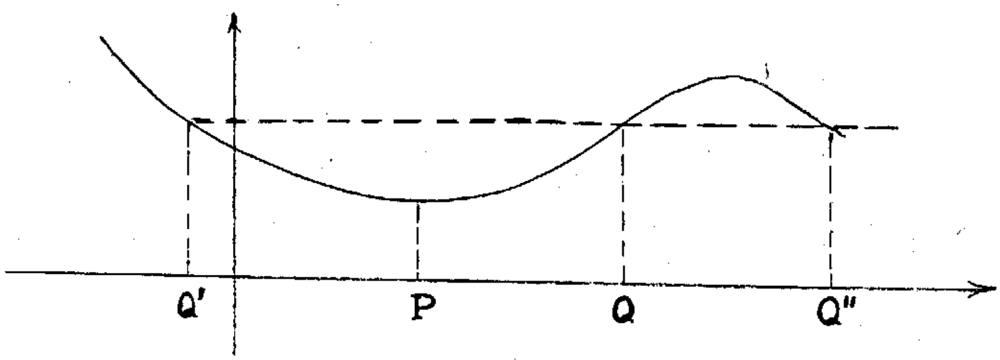
Un análisis más cuidadoso de esta situación nos permitirá - resolver los problemas siguientes. Lo que tenemos aquí es una - función $f:L \to$ dada por $f(P) = BP + PC$ y queremos encontrar el punto $P \in L$ tal que $f(P)$ sea menor que para cualquier otro punto de **L**. Es decir, queremos encontrar el mínimo de la función **f** sobre la recta. En particular el valor $f(P)$ debe ser tomado por la función únicamente en el punto **P**; para cualquier otro punto $Q \in L$ se tendrá $f(Q)>f(P)$ y, por lo tanto, - $f(Q) \neq f(P)$. Veamos que pasa con otro punto $Q \in L$. Si trazamos la elipse con focos **C** y **B** que pase por **Q**, ésta no será tangente a **L** y por lo tanto **L** la cortará en otro punto **Q'**.



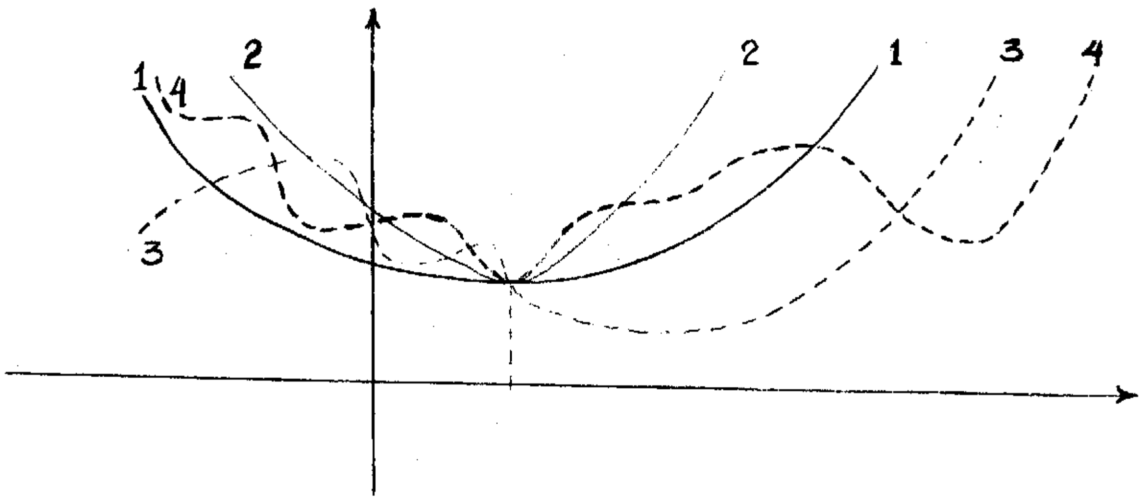
Lo que vemos con esto es que Q es un punto a la derecha de P, existe otro punto Q' a la izquierda de P tal que Q y Q' están sobre la misma elipse con focos C y B (y viceversa) y Q y Q' son los únicos puntos sobre la elipse. Pero si Q y Q' están sobre una elipse con focos B y C, tenemos que $BQ+QC=BQ'+Q'C$, o sea, $f(Q) = f(Q')$. Además como la elipse contiene a todos los puntos R del plano tales que $BR + RC = BQ + QC$, Q y Q' son los dos únicos puntos sobre la recta en los cuales la función toma el valor $f(Q)$. Por lo tanto concluímos que el valor $f(P)$ sólo lo toma la función f en el pnto P y que cualquier otro valor que tome la función lo toma en dos puntos. (Naturalmente hay valores que no toma la función, como son todos los números reales menores que $f(P)$). Esto nos permite deducir como se ve la gráfica de la función f. La gráfica debe tener esta forma



Esta es una descripción cualitativa de la función f. Nos dice que la función alcanza un mínimo en P y a la derecha de P crece continuamente y lo mismo hace si nos movemos desde P hacia la izquierda. Esto se debe a que si, por ejemplo, a la derecha de P creciera y luego decreciera en algún intervalo, habría valores que la función f tomaría 3 ó más veces



Decimos que la descripción es cualitativa por que no hemos dibujado la gráfica de f con exactitud (es decir, cuantitativamente). No sabemos si la gráfica de f es la gráfica 1 ó 2 de la figura siguiente, pero si sabemos que tiene esa forma y que no es la gráfica 3 ni la 4.

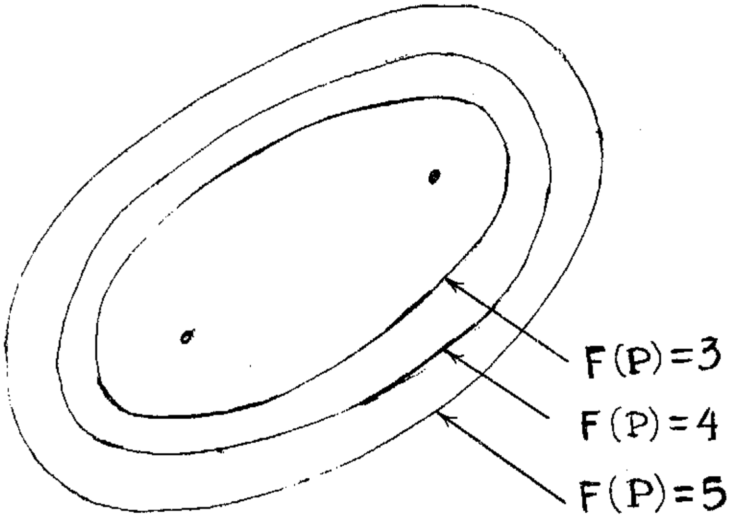


Para dibujar con mayor precisión la gráfica se requeriría, naturalmente, calcular bastantes de sus valores con exactitud, o encontrar una forma mecánica de hacerlo si sabemos que curva es (con compas, hilitos, etc.). Pero la descripción cualitativa es suficiente para lo que nos interesa en este momento.

¿Qué es lo que hemos hecho? Al hacer uso de las elipses para estudiar este problema, implícitamente hemos hecho dos cosas:

a) Considerar los puntos **Q** donde **BQ + QC** toma cierto valor, no sólo para los puntos de la recta **L**, sino para todos los puntos del plano quiere decir que hemos extendido la función $f: L \to \mathbb{R}$ a una función $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $F(Q) = + BQ + QC$. Nótese que aunque la regla de correspondencia y el contradominio de **f** y **F** son iguales. el dominio es diferente, y las funciones son diferentes. El dominio de **F** contiene el dominio **f**, y las dos funciones toman los mismos valores en el dominio de **f**, es decir, **F** es una extensión de **f**. Al ampliar el dominio, ampliamos nuestro punto de vista y podemos entender mejor la situación que si nos restringiéramos a **L**.

b) Las elipses son los conjuntos de puntos del plano donde **F** toma un cierto valor constante. Estas curvas para una función en general se llaman <u>curvas de nivel</u>. Una curva de nivel para una función **F** es entonces una curva dada por la ecuación $F(P)=c$ donde **c** es un cierto número real.

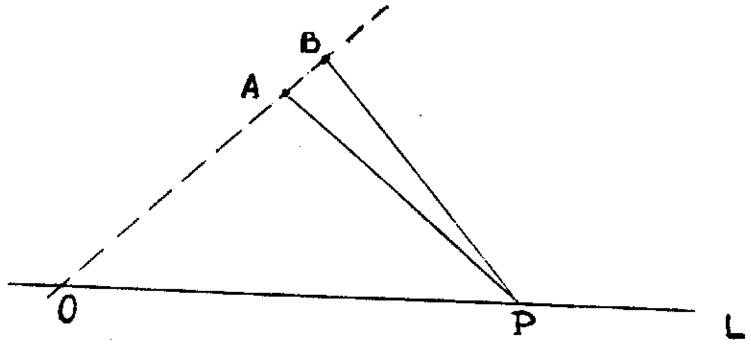


(Las curvas de nivel son muy utilizadas para describir funciones del plano a los reales, o de una superficie a los reales. Por ejemplo, es muy común describir la distribución de las temperaturas sobre la superficie de la tierra, o sobre una región de esa superficie, utilizando las isotermas. Aquí la función es - la que asigna a cada punto de la región, la temperatura que existe en ese punto en un momento dado, la cual está dada por un número real una vez que se escoge una escala. Las isotermas son - las curvas que consisten de todos los puntos donde hay una temperatura dada).

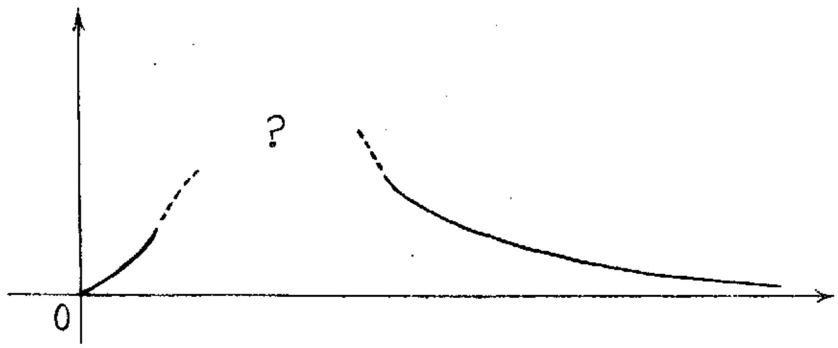
Si no hubieramos sabido la solución del problema del bombero, lo hubiéramos podido resolver extendiendo la función y considerando las curvas de nivel. Esto es lo que haremos en los problemas que siguen.

(Nota: al hablar aquí de "Curvas de nivel" no se debe entender "curva" en el sentido de la sección anterior).

B) <u>El problema del futbol ("soccer").</u> Un jugador corre con la pelota a lo largo de la línea **L** y quiere meter gol. La portería tiene sus extremos en los puntos **A** y **B**. Desde que punto debe tirar para tener el mejor ángulo?



En este caso queremos encontrar el punto **P** sobre la línea **L** tal que el ángulo **APB** sea máximo. Por razones obvias consideraremos que **L** es la semirrecta a la derecha del punto **O**, en el cual la recta **AB** (la "línea de meta") corta a **L**. Lo que tenemos es una función $f: L \to \mathbb{R}$ dada por la regla $f(Q) = \sphericalangle\, AQE$ y queremos encontrar el máximo de esta función. ¿Qué podemos decir de esta función? Sabemos que en el punto 0 vale cero. También podemos asegurar que si nos alejamos mucho hacia la derecha el ángulo se hace cada vez más pequeño (y diremos que en el infinito se hace cero). Podemos dibujar tentativamente, pues, parte de la gráfica de **f**:



Pero aun no sabemos como es la función en la parte que más nos interesa. Para hacerlo utilizamos los trucos del problema anterior.

En primer lugar, extender la función, en este caso no a todo el plano sino a la región **C** bajo la recta **AB** (la "cancha")

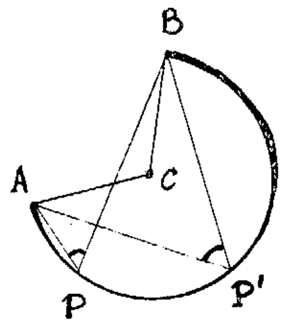
$$F:C \to \mathbb{R} \,, \qquad F(Q) = \measuredangle AQB$$

(Para los puntos **A** y **B** no está definida la función. Consideraremos que los puntos de la línea de meta **AB** no están en la - cancha **C**).

Cuáles son ahora las curvas de nivel? Tenemos que encontrar todos los puntos que sustienden un ángulo dado sobre el segmento AB.

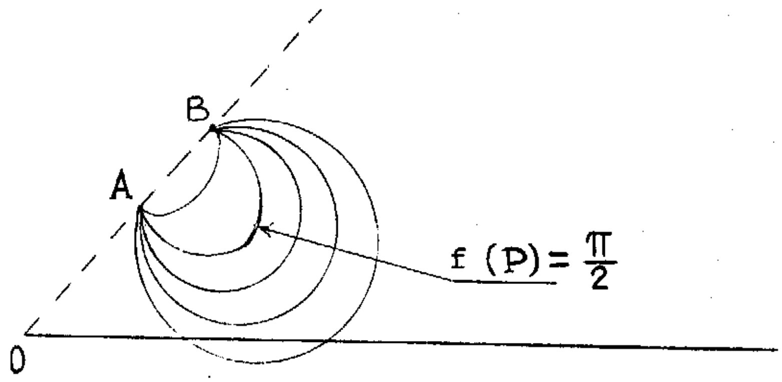
Para eso utilizaremos un conocido teorema de geometría:

<u>Si **a** es un arco de círculo con extremos **A** y **B** para todo punto **P** de **a** el ángulo **APB** es el mismo</u>.



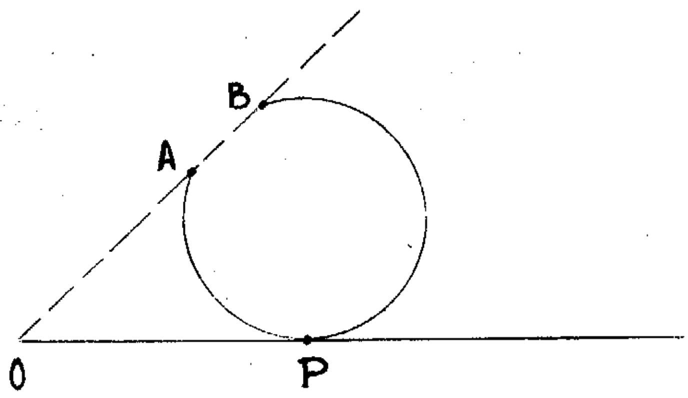
(Este teorema se demuestra fácilmente, demostrando que el ángulo **APB** es la mitad del ángulo **ACB**, para cualquier punto **P** del círculo, ver el Apéndice de esta sección).

Por lo tanto las curvas de nivel son arcos de círculo que pasan por los puntos **A** y **B**.

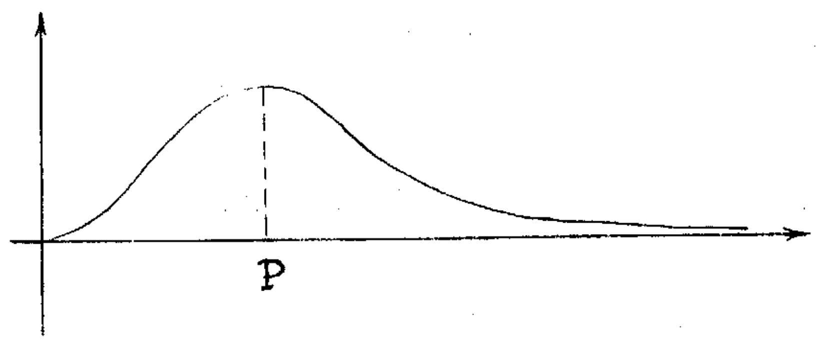


En particular el arco con diámetro **AB** es la curva de nivel $f(0) = \pi/2$.

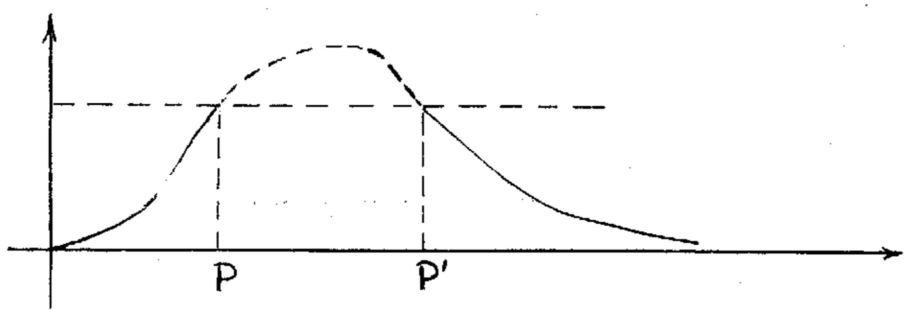
Nuevamente tenemos la siguiente situación. Hay arcos que no tocan a la recta **L**. Estos corresponden a valores que no toman - la función sobre **L**. Hay arcos que cortan a la recta en dos puntos. Estos corresponden a valores que la función **f** toma sobre **L** en dos puntos distintos. Y, finalmente, hay un arco que es - tangente a **L** y que corresponde a un valor que la función toma una sola vez. Sea **P** el punto donde el arco que pasa por **A** y **B** y es tangente a **L**, toca a **L**.



Nuestra experiencia nos hace sospechar que este es el punto que buscamos. Y que la gráfica de la función tiene la siguiente forma:



Ya es fácil demostrarlo. Si hubiera un punto $P' \epsilon L$ donde $f(P') > F(P)$, habría puntos donde la función tomara otra vez el valor $f(P)$. Por ejemplo si P' estuviera a la derecha de P, como la función tiende a 0 al alejarnos a la derecha, habría otro punto a la derecha de P' donde f tomara el valor $f(P)$.



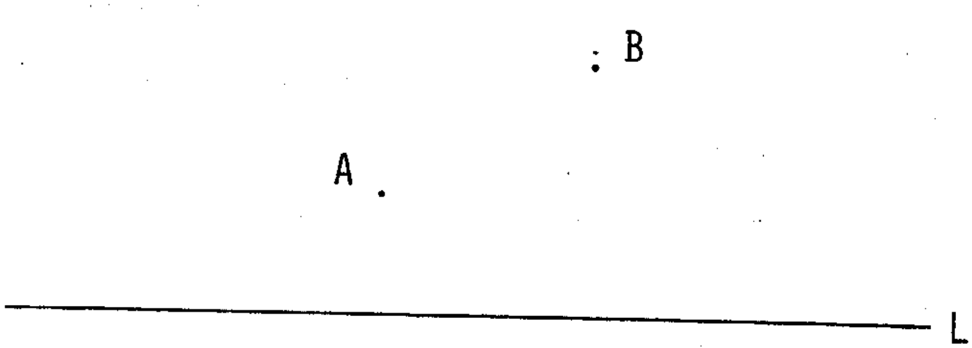
Esto se debe a que $f(Q)$ no puede bajar del valor $f(P')$ al valor 0 (o casi) sin pasar por el valor $f(P)$ alguna vez.

Algo semejante sucedería si P' estuviera entre 0 y P.

Luego P nos da el máximo. Que la gráfica tiene la forma que dibujamos se deduce como en el caso anterior (si tuviera algún chipote adicional, habría valores que la función tomaría tres o mas veces).

Tenemos pues la solución de nuestro problema: trácese el círculo que pasa por A y B y sea tangente a L. El punto de tangencia es el mejor punto para tirar a gol.

C) El problema del futbol americano. Un jugador tiene el balón y se encuentra en el punto A, mientras que un jugador del equipo contrario se encuentra en el punto B. ¿hacia que punto de la línea de "Touch" L debe correr el jugador A para que la posibilidad de que lo alcance el jugador B antes de llegar a ella sea mínima?



(La respuesta no es correr sobre la línea **AB** alejándose de **B**, como se puede ver en algunos casos particulares. Por ejemplo, en el caso dibujado arriba, si la velocidad de **B** es el doble que la de **A**, si **A** corre alejándose de **B**, éste lo alcanza, pero si corre directamente hacia **L**, **B** no lo alcanza. Por simplicidad estamos eliminando la posibilidad de que **A** pueda esquivar a **B** zigzagueando; consideraremos que ambos corren en línea recta hacia **L**.)

El problema es como medir la "posibilidad" de que **B** alcance a **A**. Es decir, qué función queremos minimizar? Para analizar esto supongamos que tanto **A** y **B** corren hacia un punto **Q** sobre **L**. Si V_a y V_b son las velocidades de **A** y **B**, respectivamente, el tiempo que tarda **A** en llegar a **Q** es **AQ/Va** y el que tarda **B** es **BQ/Vb**. Si **AQ/Va** < **BQ/Vb** entonces **A** llega a **Q** antes que **B**, y viceversa. Pero esta desigualdad es equivalente a

$$AQ/BQ < Va/Vb$$

Si esto se cumple, **A** gana, si no, **A** pierde. Pero como **A** no sabe, ni nosotros tampoco, cuanto valen **Va** y **Vb**, lo que conviene a **A** es correr hacia el punto donde **AQ/BQ** sea mínimo. Veamos porque. Si este punto es **P**, pueden pasar dos cosas. Si **AP/BP** < **Va/Vb**, **A** se escapa corriendo hacia **P**, y ya no hay problema. Si por el contrario, **AP/BP** > **Va/Vb**, **A** pierde corriendo hacia **P**, pero con mayor razón perdería si corre hacia cualquier otro punto. En todo caso, corriendo hacia **P** es como tiene la mayor posibilidad de que el signo de la desigualdad lo favorezca.

Por lo tanto el problema es minimizar la función

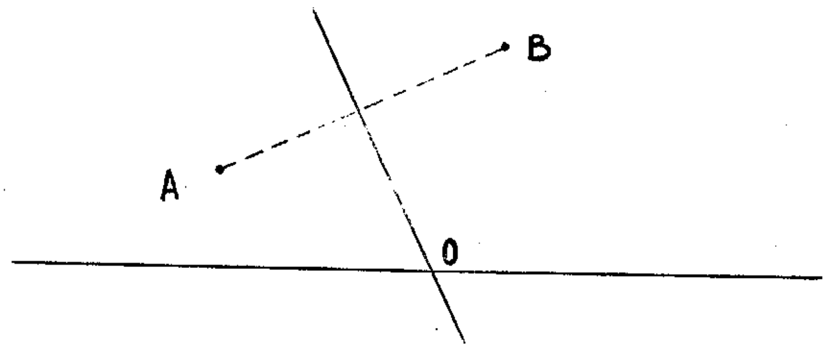
$$f: L \to \mathbb{R} \ , \ f(Q) = AQ/BQ$$

para lo cual ya sabemos que conviene extenderla a todo el plano

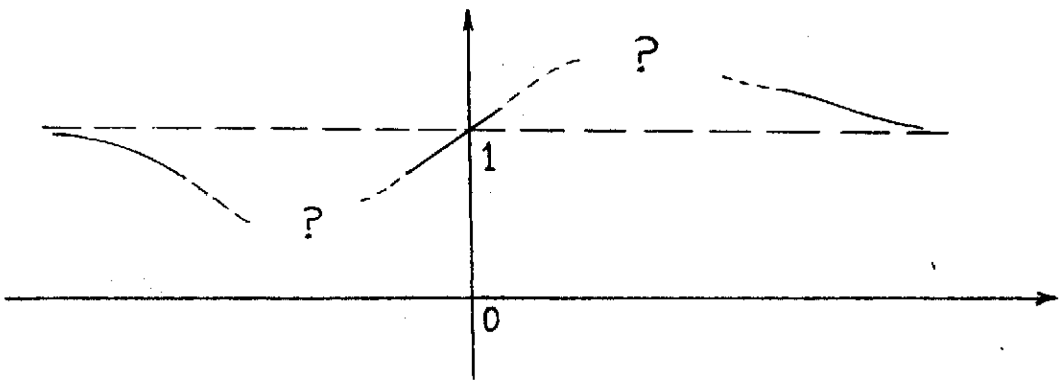
$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \ F(Q) = AQ/BQ$$

($F(B)$ no está definida, pero no nos detendremos en considerar esos detallitos).

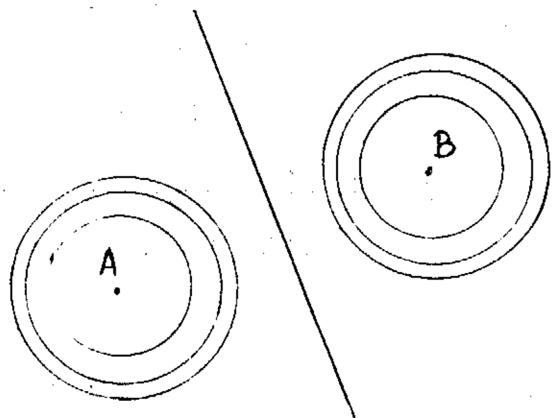
Cómo son las curvas de nivel de F ? Hay una que es obvia, la curva $F(Q) = 1$. Este es el conjunto de puntos Q tales que $AQ = BQ$, o sea la bisectriz perpendicular del segmento AB. Sea 0 el punto donde cruza a L.



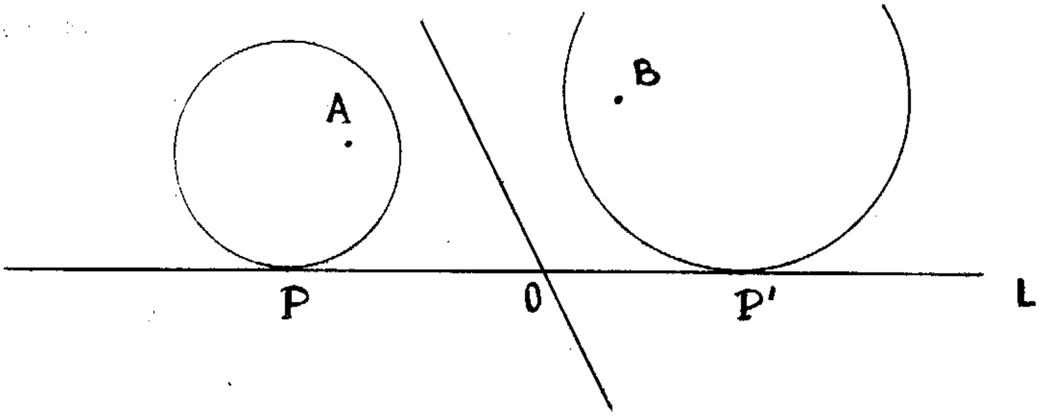
Podemos decir más cosas: los puntos a la izquierda de la bisectriz están más cerca de A que de B; y por lo tanto $f(Q) < 1$ para esos puntos. Análogamente $f(Q) > 1$ si Q está a la derecha de la bisectriz. Además sabemos que si Q se va a infinito hacia la derecha o hacia la izquierda f tiende a 1, ya que desde puntos muy, muy lejanos la diferencia entre **AQ** y **BQ** es muy pequeña en relación con **BQ**. Con todo esto podemos ya dibujar parte de la gráfica. En **0** la función vale 1 y al pasar el punto **0** de izquierda a derecha la función pasa de ser menor que 1 a ser mayor que 1. Toda esta información la podemos describir cualitativamente en la siguiente gráfica parcial:



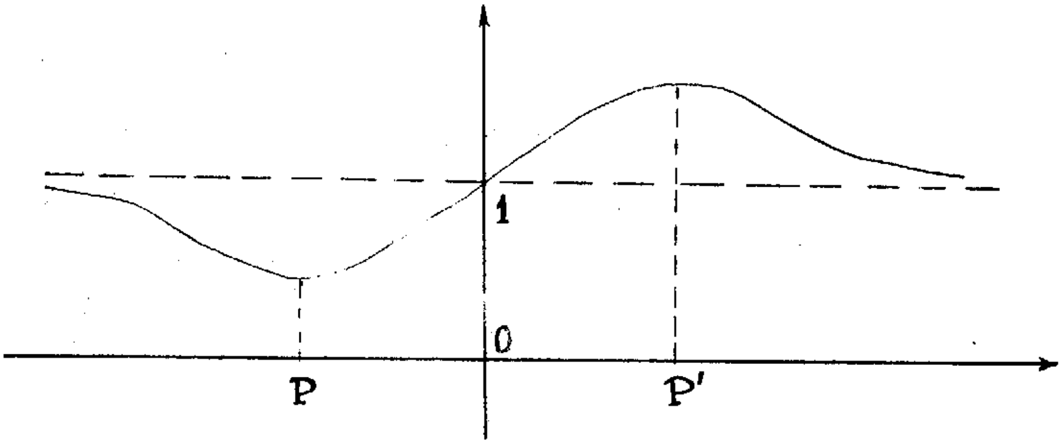
Para completar la gráfica necesitamos saber como son las curvas de nivel $F(Q) = c$, con $c<1$ y con $c>1$. Estas curvas son círculos, llamados <u>círculos de Apolonio</u>. En el apéndice demostraremos que si $c<1$ $F(Q) = c$ es un círculo alrededor de **A** y si $c>1$ $F(Q) = c$ es un círculo alrededor de **B**. $F(Q) = 0$ es naturalmente el punto **A**. Estos círculos de Apolonio se ven así:



Razonando como en el caso anterior, vemos que el punto mínimo para **f** es el punto **P** donde un círculo de Apolonio que rodea a **A** es tangente a **L** y el máximo lo toma en el punto **P** donde un círculo de Apolonio que rodea a **B** es tangente a **L**.



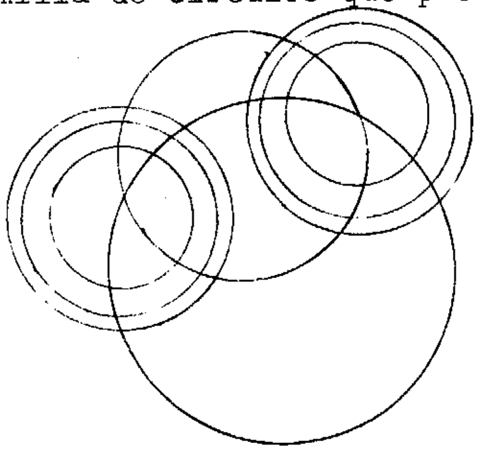
Y la gráfica de la función **f** se ve como sigue:



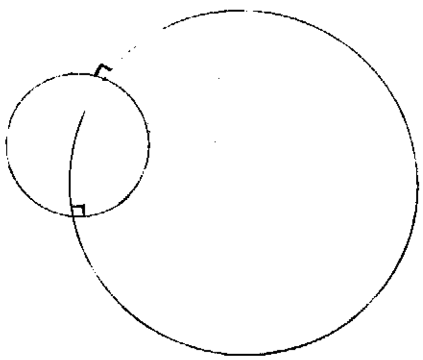
La solución al problema es, entonces, la siguiente. Trácese el círculo de Apolonio con respecto a **A** y **B** que rodea a **A** y que es tangente a **L**. <u>El punto de tangencia es el punto hacia el cual debe correr el jugador **A** para tener la mayor posibilidad de meter "touchdown"</u>.

Esto parece (y es) mucho mas complicado que el resultado anterior. Pero vamos a ver que, como sucede muchas veces en matemáticas si combinamos los dos últimos problemas podemos ir mucho mas lejos. (Muchas veces es mejor tener dos problemas que uno sólo).

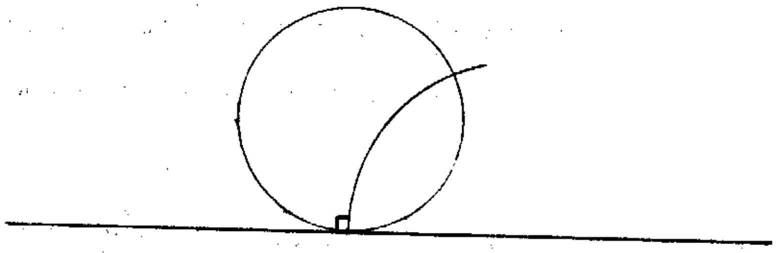
En el problema del futbol (soccer) teníamos una familia de círculos: la familia de círculos que pasan por **A** y **B**.



Resulta que estas dos familias son <u>ortogonales</u>. Esto es, que un círculo cualquiera de la primera familia y uno cualquiera de la segunda se cruzan en ángulo recto. (Ver apéndice).



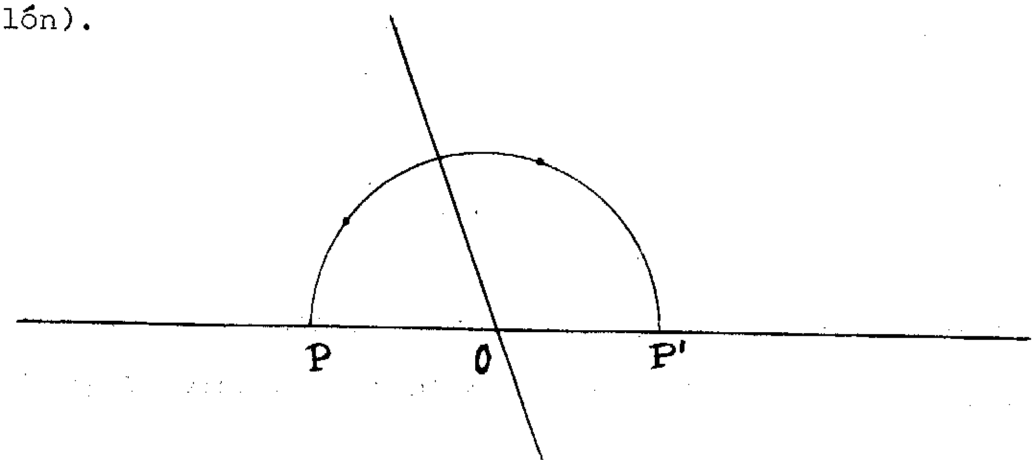
Esto nos permite dar una mejor solución al problema del fútbol americano. Encontrar un círculo de Apolonio tangente a **L** es lo mismo que encontrar un círculo que pase por **A** y **B** y que sea ortogonal a **L**.



Pero un círculo intersecta ortogonalmente a una recta si, y solo si, el centro del círculo está sobre la recta. Luego lo que hay que encontrar es un círculo con centro en **L** y que pase por **A** y **B**. Pero el centro de un círculo que pase por **A** y **B** debe estar en la bisectriz. Por lo tanto el centro del círculo debe ser el punto **0**. La solución queda pues así.

Trácese el círculo con centro **0** que pasa por **A** y **B**. El punto **P** del lado de **A** donde ese círculo corta a **L** es el mejor punto hacia donde puede correr **A**.

(Y el punto **P'** donde ese círculo corta a **L'** del lado de **B** es el peor punto para **A**, o sea el mejor para **B** si este trajera el balón).

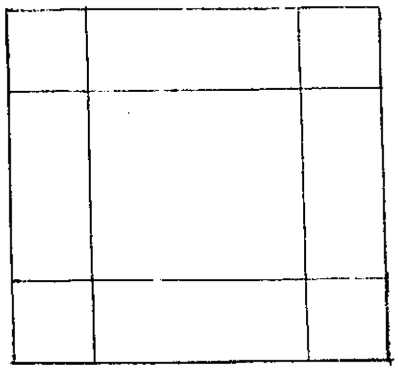


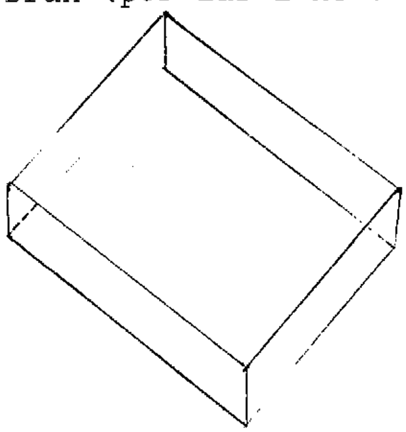
(Moraleja: todo jugador de fútbol americano debe llevar consigo regla y compás).

La relación entre estos dos problemas es muy similar a la que existe en Programación Lineal entre un problema y lo que se conoce como su "problema dual". En este caso las curvas de nivel son rectas, por lo cual los problemas que hemos considerado podrían llamarse de "programación circular".

Hemos demostrado aquí que el fútbol ("soccer") es el dual del fútbol americano (Principio de Fico).

D) Otros problemas. Un problema típico de máximos y mínimos es el siguiente: De una placa cuadrada de lado **a** queremos construir una caja sin tapa, cortando cuadritos en sus esquinas y doblando los pedazos que sobran (por las líneas punteadas).

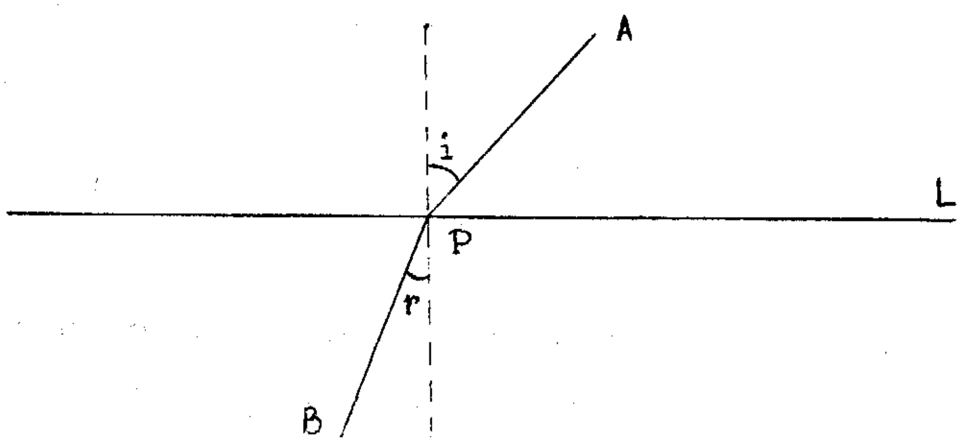




¿cuánto debemos cortar para que podamos acarrear la mayor cantidad de agua con esta caja?.

Lo que queremos maximizar aquí es el volúmen de la caja. Este problema no se presenta a una solución geométrica como las anteriores. El lector puede buscar la solución apropiada haciendo la gráfica del volúmen como función del lado de los cuadritos recortados.

E) La propiedad de los rayos de luz de seguir trayectorias de tiempo mínimo también da lugar a muchos problemas. El problema de la reflexión de la luz en un espejo es equivalente al problema del bombero. Un rayo de luz que vaya del punto **B** al punto **C** pasando por el espejo deberá hacerlo en el mínimo tiempo y por lo tanto se reflejará según la ley de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Incluso la demostración que dimos de este hecho en la sección sobre tangentes está relacionada con el hecho de que el ver un objeto a través de un espejo lo vemos como si estuviera colocado en el punto simétrico **B'**. Otro problema más interesante es el de la refracción. Al pasar la luz de un medio a otro en el cual tiene una velocidad distinta se desvía según la ley de Snell (ver la sección sobre funciones). Esto se puede demostrar usando el mismo principio. Un rayo de luz que viaje del punto A al punto **B** pasando por la línea **L** que divide los dos medios deberá hacerlo en un tiempo mínimo.



Si v_A es la velocidad de la luz en el medio superior y v_B es su velocidad en el inferior, el tiempo total de recorrido es:

$$\frac{AP}{v_A} + \frac{BP}{v_B}$$

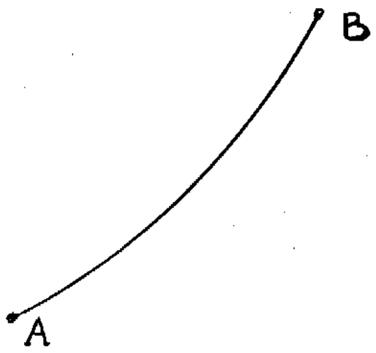
y el punto P tal que esta suma es mínima es aquel para el cual

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_A}{v_B}$$

con lo cual se tiene una interpretación del índice de refracción entre dos medios como el cociente de las velocidades de la luz en cada uno de ellos. ¿Puede el lector demostrar esto?.

La situación se puede complicar más si suponemos que hay varias líneas donde cambia el medio y la velocidad correspondiente. Finalmente podemos considerar que la velocidad varía continuamente con la altura. Por ejemplo, que la velocidad está dada por $v = kh$, donde h se mide de la altura del punto A hacia abajo. La respuesta en este caso es más difícil de encontrar ya que no se trata de calcular un número o de encontrar un punto, sino determinar toda una curva y el problema cae dentro del campo del cálculo de variaciones. Sin embargo el problema se puede resolver suponiendo que la velocidad no varía continuamente, sino a saltos; es decir, que hay un número muy grande de capas horizontales. Haciendo que su número crezca indefinidamente, se -

puede obtener la solución "pasando el límite". La solución es una curva que ya conocemos: la cicloide. Otra interpretación de este problema es el de la curva de más rápido descenso. El problema es encontrar de que forma debe ser una resbaladilla tal que si soltamos el objeto A y lo dejamos resbalar sobre ella llegue al punto B en el menor tiempo posible.



Esta curva se llama "broquistocrona" y fué J. Bernoulli, el que calculó que se trataba de una cicloide usando el argumento esbozado antes. El problema es equivalente al anterior precisamente porque la velocidad de un cuerpo que cae es proporcional a la altura recorrida desde el punto de reposo.

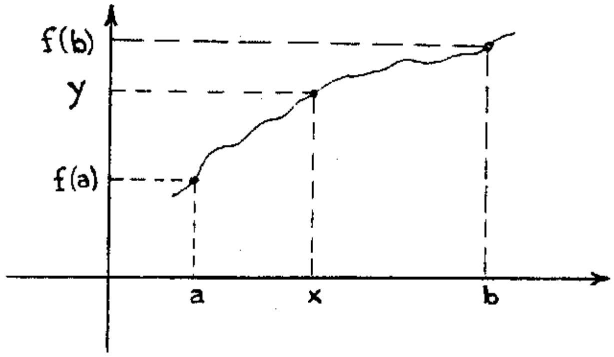
Para conlcuir esta sección mencionaremos que varios de estos y de otros problemas de máximos y mínimos se pueden resolver por métodos algebraicos. Pero utilizamos los métodos geométricos porque son más interesantes y nos permiten formular otra moraleja: los problemas de máximos y mínimos tienen que ver algo con tangentes.

Ejercicio

Dados los puntos A y B y una recta L encontrar el punto

P sobre la recta tal que $AP^2 + BP^2$ sea mínimo.

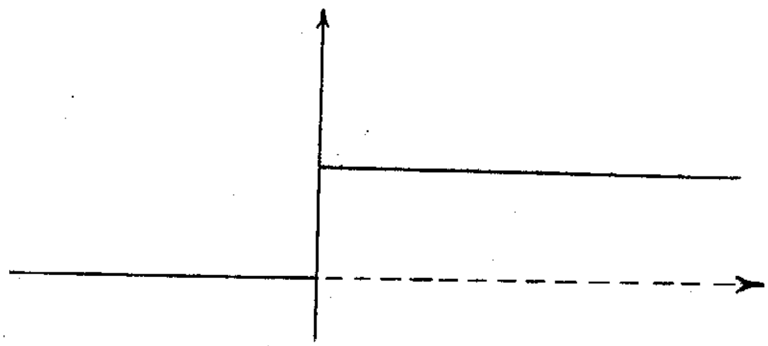
Observación: En varias demostraciones de esta sección utilizamos un argumento del siguiente tipo. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $f(a)<f(b)$. Entonces dado un valor de y comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un real x comprendido entre a y b tal que $f(x) = y$.



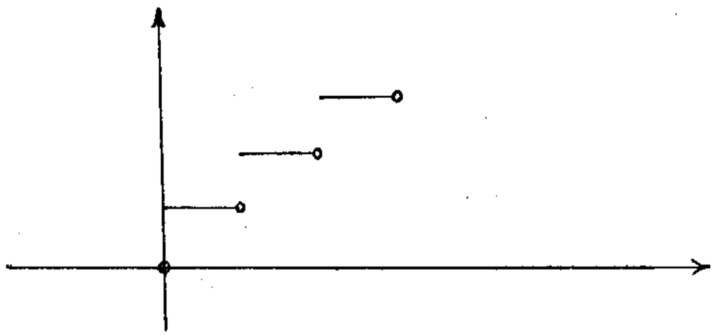
Es decir, que la función no puede pasar del valor $f(a)$ al valor $f(b)$ sin tomar en algún momento el valor y. Esto es muy claro para las funciones consideradas porque son funciones contínuas y no pueden dar saltos. El resultado es válido para cualquier función continua. Pero no es necesariamente cierto para funciones discontinuas. Por ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

salta del valor 0 al valor 1 sin pasar por el valor $\frac{1}{2}$ ni por ningún otro entre 0 y 1.



Lo mismo sucede con la función de Dirichlet y con la función del "taxi" que a cada número real **x** le asocia el menor número entero que sea mayor o igual que **x**.



R E F E R E N C I A S

G. Polya, Matemáticas y Razonamiento Plausible.

Y. I. Perelman, Algebra Recreativa. Ediciones en Lenguas Extranjeras. Moscú.

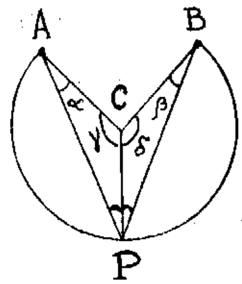
Kasner y Newman, Matemáticas e Imaginación (op. cit.)

Courant y Robbins, ¿Qué es la Matemática? (op. cit.)

A P E N D I C E

Proposición

Si **a** es un arco del círculo con extremos **A** y **B**, entonces para cualquier punto **P** de **a** el ángulo **APB** es el mismo



Demostraremos que $\measuredangle APB = 1/2 \measuredangle ACB$ para todo punto **P** de **a**. Como **C** es el centro y está fijo, resulta que todos los ángulos **APB** son iguales, cuando **P** varía sobre el arco.

Como $AC = PC = BC$, por ser radios del círculo, los triángulos **ACP** y **BCP** son isósceles y $\measuredangle CAP = \measuredangle CPA = \alpha$ y $\measuredangle CBP = \measuredangle CPB = \beta$. Luego

$$\gamma + 2\alpha = 180$$

$$\delta + 2\beta = 180$$

Sumando $\gamma + \delta + 2(\alpha + \beta) = 360$

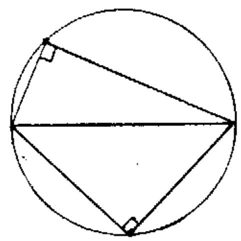
Como además $\gamma + \delta + \measuredangle ACB = 360$, concluimos que

$$\measuredangle ACB = 2(\alpha + \beta) = 2 \measuredangle APB$$

Se deja al lector demostrar que si **P** está fuera del círculo, entonces $\measuredangle APB < 1/2 \measuredangle ACB$, y si **P** está dentro, se tiene la desigualdad contraria. Todo esto para unir puntos debajo de la recta **AB**. ¿Qué pasa para los que están encima? Con esto se demuestra que el arco de círculo **a** es el lugar geométrico de todos los puntos por debajo de la recta **AB** tales que

$$\measuredangle APB = 1/2 \measuredangle ACB.$$

Un caso particular importante es cuando **A** y **B** son los extremos de un diámetro. Entonces $\measuredangle APB = 90°$ para todos los puntos del círculo y sólo para ellos.



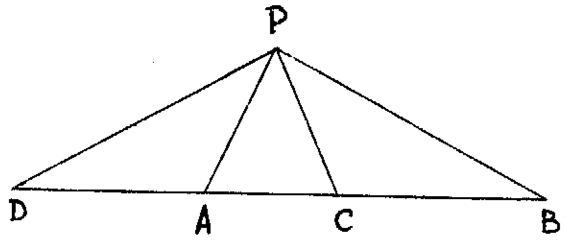
Esta característica del círculo será muy importante para la siguiente demostración.

<u>Teorema</u>

(Apolonio) Si **A** y **B** son dos puntos del plano, el lugar geométrico de todos los puntos **P** del plano tales que $\frac{AP}{PB} = \lambda$, con $\lambda < 1$, es un círculo que rodea al punto **A**.

<u>Demostración</u>

Sea **C** el punto del segmento **AB** tal que $\frac{AC}{BC} = \lambda$, y **D** el punto sobre la recta **AB** exterior al segmento, tal que $\frac{AB}{BD} = \lambda$.



Demostraremos que todo punto P del plano tal que $\frac{AP}{BP} = \lambda$ está sobre el círculo con diámetro DC. Para demostrarlo basta ver que el ángulo DPC es recto, por la caracterización anterior delos puntos del círculo.

Para ver esto utilizaremos primero la ley de los senos para los triángulos ACP y BCP.

$$\frac{\text{sen APC}}{AC} = \frac{\text{sen PCA}}{PA} \quad , \quad \frac{\text{sen BPC}}{BC} = \frac{\text{sen PCB}}{PB}$$

De donde

$$\text{sen APC} = \frac{AC}{PA} \quad \text{sen PCA} = \frac{BC}{PB} \ , \quad \text{sen PCB} = \text{sen DPC} \ ,$$

ya que $\measuredangle$ PCA y $\measuredangle$ PCB son suplementarios y por lo tanto sen PCA = sen PCB, y además $\frac{AC}{PA} = \frac{BC}{PB}$ ya que $\frac{AC}{BC} = \frac{PA}{PB} = \lambda$

De esto se deduce que $\measuredangle$ APC = $\measuredangle$ BPC. (Dos ángulos menores que 180° tienen el mismo seno si, y sólo si, son iguales o suplementarios).

Por un cálculo análogo se deduce que sen APD = sen BPD, pero en este caso no pueden ser iguales los ángulos y deben ser su plementarios:

$$\measuredangle APD + \measuredangle BPD = 180° \qquad (1)$$

De aquí

$$\measuredangle APD + \measuredangle BPC + \measuredangle CPA + \measuredangle APD \quad \measuredangle 180°$$

o sea

$$2(\measuredangle APD + \measuredangle CPA) = 180°$$

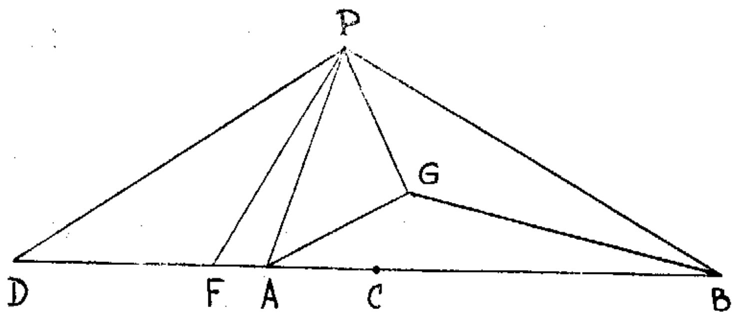
y

$$\measuredangle CPD = 90°$$

que es lo que se quería demostrar.

(En rigor habría que demostrar también que si $\frac{AP}{BP} \neq \lambda$ entonces P no está sobre el círculo. Esto se deja al lector)

Vamos a considerar ahora el punto F, punto medio de DC y el punto G, centro del círculo que pasa por A, P y B.



Por ser G el centro del círculo APB, $\measuredangle PGA = 2 \measuredangle PBA$ y considerando el triángulo PGA (que es isósceles) tenemos

$$180° = \measuredangle PGA + \measuredangle GAP + \measuredangle APG = 2 \measuredangle PBA + 2 \measuredangle GPA$$

de donde

$$\measuredangle PBA + \measuredangle GPA = 90° \qquad (2)$$

Además tenemos

$$\measuredangle PBA + \measuredangle BDP + \measuredangle BPD = 180°$$

y como ya sabíamos que

$$\measuredangle DPA + \measuredangle BPD = 180° \text{ (fórmula 1)}$$

obtenemos

$$\measuredangle DPA = \measuredangle PBA + \measuredangle BDP$$

como también

$$\measuredangle DPA = \measuredangle DPF + \measuredangle FPA$$

y como

$$\measuredangle DPF = \measuredangle BDP$$

por ser **DPF** isósceles, ya que **F** es el centro del círculo de Apolonio que pasa por D, **P** y C).

Tenemos que

$$\measuredangle PBA = \measuredangle FPA$$

substituyendo en (2) tenemos

$$\measuredangle FPA + \measuredangle GPA = 90°$$

sea

$$\boxed{\measuredangle FPG = 90°}$$

(¡Uf! ¿No habrá una demostración más corta?)

¿Qué significa esto? **FP** es el radio del círculo de Apolonio, **PG** es el radio del círculo que pasa por **A** y **B.**

Y hemos demostrado que estos dos radios son ortogonales. Esto significa que el círculo de Apolonio con respecto a **A** y **B** el círculo que pasa por **A** y **B** al cortarse en el punto **P** lo hacen ortogonalmente. (Dos círculos se cortan en ángulo recto si, y sólo si, sus tangentes se cortan en ángulo recto (por definición) sí, y sólo si, los radios en el punto de corte forman un ángulo recto (ya que la tangente es siempre perpendicular al radio).

Por lo tanto hemos demostrado:

<u>Teorema</u>

La familia de círculos de Apolonio con respecto a **A** y **B** es ortogonal a la familia de círculos que pasan por **A** y **B**.

Que es el último resultado geométrico que utilizamos en esta sección.

(Para mayores detalles sobre círculos de Apolonio y familias ortogonales ver L. S. Shively, Introducción a la Geometría Moderna, Ed. CECSA).

3. El problema de las cuadraturas

El problema de las cuadraturas consiste en calcular longitudes áreas y volúmenes. Por sus abundantes aplicaciones es uno de los temas más importantes de las matemáticas, su historia se remonta a los orígenes de la civilización y su forma moderna, la teoría de la medida, es una de las principales ramas de las matemáticas contemporáneas.

Se denomina clásicamente problema de las cuadraturas debido a la forma que le dieron los griegos. Como hemos visto, los griegos abandonaron los números, por lo cual no pensaban en términos de calcular áreas sino que formulaban el problema así: dada una figura plana, encontrar un cuadrado que tenga la misma área. El famoso problema de la cuadratura del círculo era precisamente un caso particular. (Hoy se sabe que es imposible hacerlo con regla y compás, que es como lo proponían los griegos).

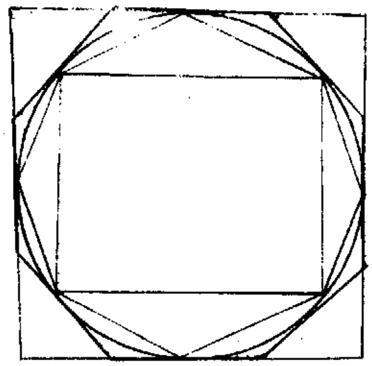
Todos sabemos calcular áreas de algunas figuras. No es difícil calcular el área de una figura limitada por segmentos de recta. El problema más serio aparece cuando consideramos figuras limitadas por curvas.

Sin embargo todo mundo sabe que el área de un círculo es πr^2 y ha utilizado esta fórmula en repetidas ocasiones. Pero ¿quién sabe demostrar que efectivamente es πr^2. De hecho, casi nadie. Todo el mundo usa esta fórmula porque le dijeron que era la buena, o en el mejor de los casos, porque le dieron un argumento más o menos convincente.

Uno de esos argumentos va como sigue: el área de un polígono regular es $\frac{1}{2}$ P.a, donde P es su perímetro y a su apotema, que es por definición la distancia del centro a un lado cualquiera del polígono. Ahora bien el círculo es un polígono con un número infinito de lados, su perímetro es $2\pi r$ y su apotema es igual al radio r. Luego su área es $\frac{1}{2}2\pi r.r=\pi r^2$.

Este es un buen argumento y da el resultado correcto. Pero tiene muchas fallas. ¿Qué significa que el círculo sea un polígono con un número infinito de lados? ¿Cuáles son sus lados? ¿Y porqué podemos aplicar una fórmula que se demuestra (y fácilmente) para un polígono con un número finito de lados a uno que tiene un número infinito (de hecho, no numerable)?. Muchos argumentos del mismo estilo nos conducen a resultados falsos, por lo cual hay que tener mucho cuidado con ellos. No podemos, pues, aceptar éste como una demostración de la fórmula para el área del círculo.

Una demostración que se puede dar se basa en considerar polígonos regulares inscritos y circunscritos (con un número finito de lados, claro está) al círculo, y ver que pasa cuando hacemos cada vez más grande el número de lados.



Sea A_n el área del polígono inscrito al círculo que tiene n lados, A'_n el área del correspondiente polígono circunscrito y A el área el círculo, es claro, que para toda n

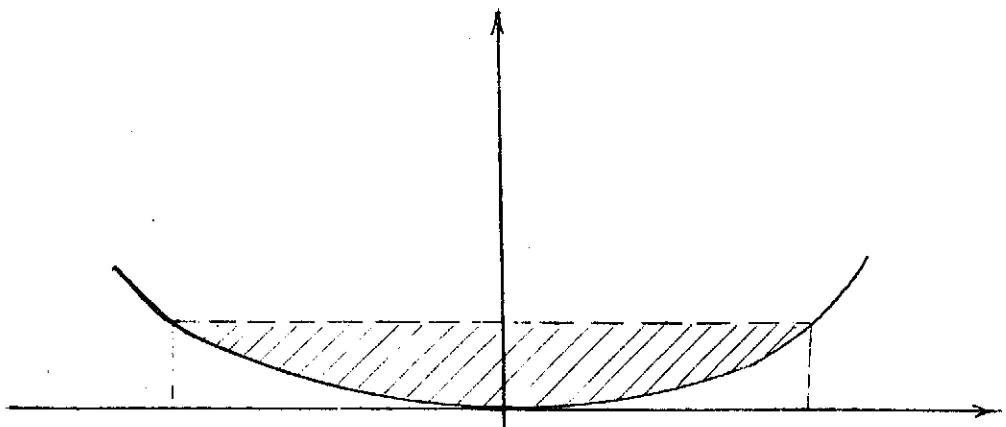
$$A_n < A < A'_n$$

Además es fácil demostrar que

$$A_n < \pi r^2 < A'_n$$

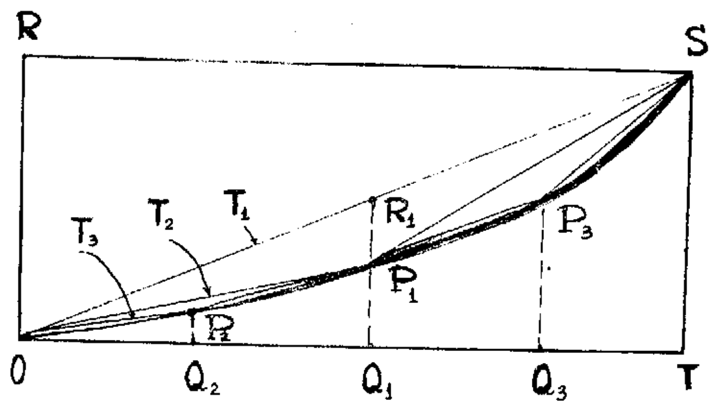
Vemos así que los dos números A y πr^2 están encerrados por los mismos límites A_n y A'_n. A medida que hacemos crecer n, la diferencia $A'_n - A_n$ es cada vez más y más chica, según se puede ver con un poco más de trabajo; ésto implica que A y r^2 no les queda otra más que ser iguales. Si fueran distintos podríamos tomar una n muy grande tal que $A'_n - A_n$ fuera menor que la diferencia entre ellos, y entonces alguno de los dos se saldría del intervalo (A_n, A'_n), lo cual no es posible. Luego $A = \pi r^2$.

En lugar de aclarar los detalles de la demostración anterior, lo cual no es muy difícil con nuestros conocimientos sobre los números reales y la trigonometría, vamos mejor a ver como se encuentra el área de la parábola. Con ésto nos referimos a un segmento de parábola y vamos a considerar el segmento de la parábola $y = x^2$ por debajo de la recta $y = 1$



Como la parábola es simétrica, basta calcular el área de la parte que está a la derecha del eje **y**. ¿Cómo calcularla? Una figura limitada por segmentos de recta puede ser triangulada y podemos calcular su área sumando las áreas de los triangulitos. Podemos intentar descomponer el trozo de parábola en triangulitos y aunque necesariamente será un número infinito de ellos, quizás si lo hacemos bien podremos sumar sus áreas. Nótese que ésto es muy diferente al argumento que rechazamos anteriormente. No es lo mismo decir que el círculo es un polígono con un número infinito de lados, que decir que una figura es la unión de un número infinito de triángulos y además decir cuales son esos triángulos.

La forma de escoger los triángulos que vamos a utilizar se debe a Arquímedes. El primer triángulo es el triángulo **ORS** de la figura



A ese lo llamamos T_1. El segundo lo obtenemos levantando la perpendicular en el punto Q_1, punto medio de **OT** y considerando el punto P_1 donde cruza la parábola; el triángulo T_2 es el triángulo OP_1S.Y así sucesivamente: T_3 es el triángulo - OP_2P_1, donde P_2 es el punto donde la vertical sobre Q_2, punto medio de OQ_1, cruza la parábola, el triángulo T_4 en el - P_1P_3S, etc.

El área de T_1 es fácil de calcular

$$A\ (T_1) = \frac{1}{2}$$

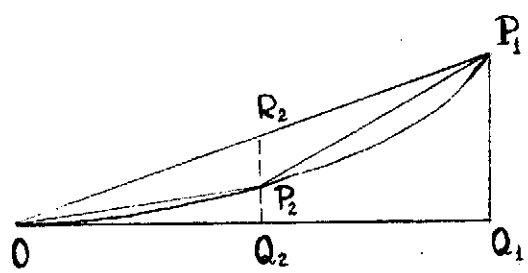
Para calcular el área de T_2 lo dividimos en dos partes por la vertical P_1R_1. Como $P_1Q_1 = \frac{1}{2}$, ya que P_1 está sobre la parábola, $OQ_1 = \frac{1}{2}$ y la ecuación de la parábola es $y = x^2$, y como $R_1Q_1 = \frac{1}{2}$, por estar R_1 en la diagonal tenemos que $P_1R_1 = \frac{1}{2}$; luego el área del triángulo OP_1R_1 es ("base por altura sobre dos").

$$\frac{P_1R_1 \cdot OQ_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

El área del triángulo P_1R_1S es también $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$ y por lo - tanto

$$A(T_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

Para calcular el área de T_3 lo dividimos según la vertical P_2R_2



Como $OQ_2 = \frac{1}{4}$, $Q_2P_2 = 1/16$ y por la similitud de los triángulos OQ_2RR_2 y OQ_2P_2, tenemos que $Q_2R_2 = 1/8$. Luego el área de OP_2R_2 es $\frac{1}{2}\cdot 1/16\cdot\frac{1}{4}$ y lo mismo el área de $P_2R_3P_1$. Luego

$$A(T_3) = \frac{1}{2}\cdot 1/16\cdot\frac{1}{2}$$

(Dejamos los productos indicados para después sumarlos más fácilmente).

Por un razonamiento análogo

$$A(T\ ) = \frac{1}{2}\cdot 1/16\cdot\frac{1}{2}$$

Luego

$$A(T_3 \cup T_4) = \frac{1}{2}\cdot 1/16$$

En el siguiente paso calcularíamos el área de los triángulos T_5, T_6, T_7 y T_8 y obtendríamos

$$A(T_5 \cup T_6 \cup T_7 \cup T_8) = \frac{1}{2}\cdot 1/64$$

El lector que quiera tomarse la molestia de hacer la demostración por inducción podrá verificar que

$$A(T_{2^n+1} \cup \ldots \cup T_{2^n+1}) = \frac{1}{2}\cdot 1/4^{n+1}$$

(Se ve aquí la razón por la cual los agrupamos en esa forma). Todos estos triángulos nos llenan la figura que estamos considerando. Luego su área es

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1/16 + \frac{1}{2}\cdot 1/64 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\ (1 + \frac{1}{4} + 1/16 + 1/64 + \ldots)$$

Ahora el problema es tratar de ver que quiere decir la suma indicada dentro del paréntesis, la cual tiene un número infinito de sumandos. Para eso vamos a tomar un cachote de esta suma y - ver cuando da. Vamos a escribir r en lugar de un cuarto. La suma de los primeros $n + 1$ términos es

$$Sn = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

(Si recordamos la fórmula $(1 - x)\ (1 + x + x^2 + \ldots x^n)$ es igual a $(1 - x^{n+1}))$ que podemos escribir así:

$$S_n = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

Como $r = \frac{1}{2} < 1$, r^{n+1} es muy pequeño si r es muy grande. Luego de aquí podemos deducir lo siguiente:

(i) Sn es siempre menor que $\frac{1}{1-r}$, pero

(ii) Sn se acerca cada vez más a $\frac{1}{1-r}$ cuando hacemos que n crezca. Es decir que la diferencia entre $\frac{1}{1-r}$ y S_n la podemos hacer tan pequeña como queramos si tomamos

n bastante grande.

Esto lo denotaremos así:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-r} = 4/3$$

Podemos interpretar ésto diciendo que cuando sumemos "todos" los términos nos da $4/3$.

También podemos dar una demostración tramposa, parecida a la que hicimos al transformar un decimal periódico en un quebrado: - sea

$$x = 1 + r + r^2 + \ldots.$$

$$rx = r = r^2 + r^3 \ldots.$$

restando $(1-r)x = 1$, o sea $x = \frac{1}{1-r})$.

Según ésto, $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ y el área del segmento de pará bola es $\frac{4}{3}$.

La idea detrás de ésto es la siguiente: Si A_n es el área de los 2^n primeros triángulos, también tenemos que:

(i) A_n es siempre menor que A

(ii) A_n se acerca cada vez más a A cuando hacemos que n crezca.

O sea, $$\lim_{n \to \infty} A_n = A$$

Como $A_n = \frac{1}{2} S_n$ y $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} S_n = \frac{2}{3}$

Vemos que los dos números A y $\frac{2}{3}$ tienen la misma propiedad y es que la sucesión de numeros A_n satisfacen las propiedades (i) y (ii) con respecto a los dos. Esto hace que sean iguales. Porque si $A < \frac{2}{3}$, los números A_n, que son siempre menores que A, no se podrían acercar indefinidamente a $\frac{2}{3}$, pero sabemos que sí se acercan. Lo análogo sucedería si $\frac{2}{3} < A$. Luego, no queda otra más que $A = \frac{2}{3}$.

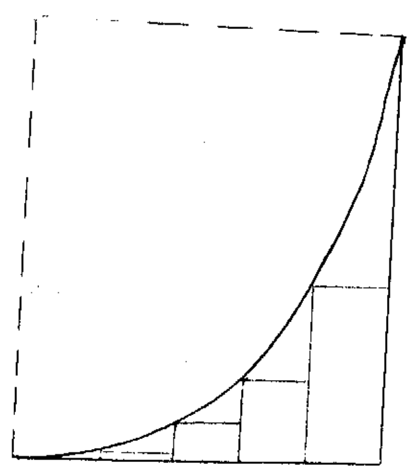
Vemos pues que tiene sentido hacer la suma infinita, porque sólo hay un número que tenga las propiedades (i) y (ii) respecto a las sumas parciales, y a ese número lo podemos definir como la suma infinita de la serie.

(Así no razonaba Arquímedes su argumento era parecido al que damos a continuación. Vale la pena observar que aunque Arquímedes no sabía que la ecuación de la parábola es $y = x^2$, ni sabía qué quiere decir eso, conocía la propiedad de que la "ordenada" es proporcional a la "abcisa", al cuadrado lo cual es suficiente para calcular el área de los triangulos).

Queda un punto flaco en ésta demostración, y es que hemos utilizado la idea intuitiva de que los triangulos nos van llenando toda la parábola sin dejar huecos. Si aceptamos ésto, la demostración está completa. Si alguien no lo acepta puede seguir leyendo, pues daremos otra demostración que no tiene esta falla. (Este problema es el que le hubiera molestado a Arquímedes de la demostración anterior).

Si no aceptamos lo anterior, lo único que hemos demostrado es que $A \geqslant 2/3$, ya que A es mayor que todos los números A_n y no puede ser menor que su límite.

Para demostrar que A es menor o igual que $2/3$ habría que demostrar que el área complementaria por debajo del arco de parábola es por lo menos $1/3$. Llenar esta parte con triangulitos está más dificil, por lo cual lo haremos con rectángulos (acercándonos así a los métodos del cálculo). Dividamos el segmento $[0,1]$ en n partes iguales y en cada uno de los segmentos levantaremos un rectángulo cuyo vértice superior izquierdo este sobre la parábola.



Sea B_n el área total de estos rectángulos. Es fácil calcular el área de cada uno de ellos: su base es $1/n$ y su altura se calcula usando la ecuación de la parábola $y = x^2$. El área total es

$$B_n = \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3}(1+4+9+\ldots+(n-1)^2)$$

Utilizando la fórmula

$$1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

(que se demuestra fácilmente por inducción), obtenemos

$$B_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

y vemos nuevamente que

(i) B_n es siempre menor que $1/3$.

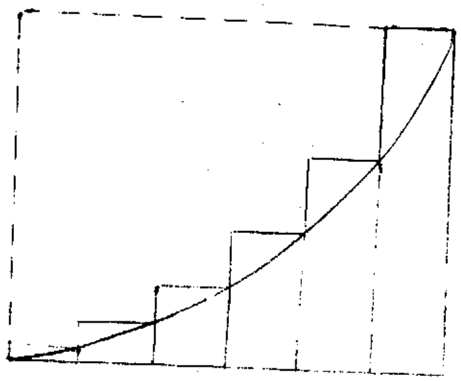
(ii) B_n se acerca cada vez más a $1/3$ cuando n crece

O sea,

$$\operatorname{im}_{n \to \infty} B_n' = \frac{1}{3}$$

Si B es el área por debajo de la parábola, esto nos demues tra que B es menor o igual que 1/3, y como $A + B = 1$, $A \geq 2/3$ y $B \leq 1/3$, ninguna de estas igualdades puede ser estricta. Luego $A = 2/3$ y $B = 1/3$.

Otra cosa podemos hacer para calcular B directamente, y es levantar rectángulos más altos sobre la división del segmento [0,1], de tal forma que su vértice superior derecho esta sobre la parábola.



Si B'_n es el área total de estos rectángulos, obtenemos

$$B'_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}(1+4+9+\ldots+n^2)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Aquí sucede que

(1) La B'_n es siempre mayor que 1/3

(11) B'_n se acerca cada vez más a 1/3 cuando n crece.

En este caso escribiremos también

$$\lim_{n \to \infty} B'_n = \frac{1}{3}$$

Como $B'_n > B$ para toda n, tenemos que B tiene que ser menor o igual que $1/3$. Habiendo demostrado que $B \geqslant 1/3$ y $B \leqslant 1/3$ concluimos que $B = 1/3$.

Hay otra forma de demostrar esto,

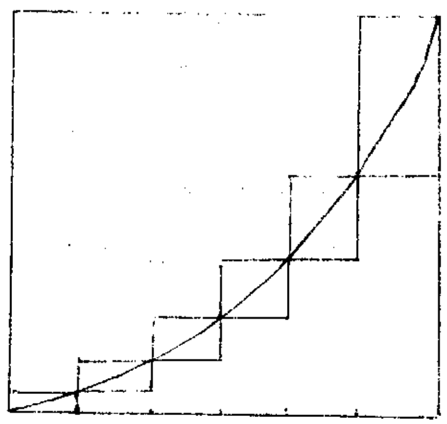
hemos visto

$$B_n < B < B'_n$$

y que

$$B_n < 1/3 < B'_n$$

Nuevamente razonamos como en la demostración que esbozamos para calcular el área del círculo. Los dos números B y $1/3$ quedan encerrados en los intervalos (B_n, B'_n). Vamos a calcular la diferencia $B'_n - B_n$. Esta diferencia representa el área de una serie de rectangulitos alrededor de la parábola.



y se que cuando n crece esta área es muy pequeña. De hecho por las fórmulas anteriores, $B'_n - B_n = 1/n$, y esta diferencia se vuelve menor que cualquier número si hacemos n bastante grande. Nuevamente esto implica que no les queda otra a B y 1/3 mas que ser iguales. (Por que si fueran distintos, etc...)

R E F E R E N C I A S

Carl B. Boyer *(op. cit.)*

E. Moises. *Calculus*

4. Conclusión

Hemos resuelto varios problemas muy distintos en este capítulo. Cada uno de ellos ha requerido de un argumento especial, y a veces de complicadísimas demostraciones geométricas.

Hemos visto que el problema de las tangentes y los problemas de máximos y mínimos tienen algo que ver entre sí. Pero el problema de las cuadraturas es aparentemente muy distinto.

El cálculo unifica todos estos problemas, nos permite ver la relación precisa entre los problemas de tangentes y los de máximos y mínimos, y nos revela una relación insospechada entre el problema de tangentes y el de cuadraturas. Y finalmente nos da métodos generales para resolver todos estos problemas, reduciéndolos esencialmente a un simple "cálculo"