Miscelánea Matemática **74** (2022) 11-23 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7403

El gigante Johannes Kepler

E. Pérez-Chavela
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
ernesto.perez@itam.mx

A todos mis estudiantes,
pasados, presentes y futuros

Empecemos

El estudio moderno de la *mecánica celeste* como una rama importante de las matemáticas empieza con la publicación en 1687 de los *Principia Mathematica* de Issac Newton, donde demuestra que el movimiento de los cuerpos celestes en el espacio es debida a la ley de la gravitación universal, la cual nos permite dar una formulación rigurosa para el movimiento de N masas puntuales por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$m_i\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{Gm_im_j(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

donde $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3$ representa la posición de la i-ésima partícula y G es la constante de gravitación universal.

El gran descubrimiento de la ley de la gravitación universal fue posible a partir de las tres leyes de Kepler, es por esto que Newton se refería a esta ley diciendo que no hubiera sido posible obtenerla si no hubiera estado parado sobre los hombros de gigantes como Nicolás Copérnico, Galileo Galilei, Tycho Brahe y por supuesto Johannes Kepler, el personaje del cual nos ocuparemos en este escrito.

En el año 1543, Nicolás Copérnico publica su libro *De revolutionibus orbium coelestium*, donde introduce el modelo *heliocéntrio* para nuestro Universo, es decir postula que el Sol está en el centro del Universo y los planetas giran en torno a él. Antes de esta fecha los astrónomos tenían como guía principal el celebre libro *Almagesto* (el gran libro en árabe), escrito por el astrónomo griego Claudio Ptolomeo en el siglo II

Palabras clave: Problema de fuerza central, las leyes de Kepler, movimiento de los planetas.
El autor agradece el apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura, A.C.

de nuestra era. El libro está basado en la concepción *geocéntrica* del Universo, donde la Tierra está fija en el centro y alrededor de ella giran esferas concéntricas las cuales contenían a las estrellas. Este libro fue referencia principal para toda la gente interesada en mecánica celeste durante 1500 años aproximadamente, todo un record Guinness.

Las ideas de Copérnico fueron realmente revolucionarias, en esa época colocar al Sol en el centro del Universo era algo inconcebible, ya que nosotros observamos a la Luna, el Sol, a los otros planetas y en general a los cuerpos celestes desde la Tierra, donde el movimiento de estos objetos resulta sumamente complicado. Otro factor importante fue la iglesia, que se oponía a nuevas ideas en esta dirección.

La motivación de este escrito es mostrar las grandes ventajas que tiene el modelo heliocéntrico sobre el modelo geocéntrico para describir el movimiento de los cuerpos celestes. Una persona que aprovechó fuertemente esta idea fue Johannes Kepler, quien gracias a las efemérides recolectadas día tras día por el astrónomo danés Tycho Brahe, pudo contar con información mucho más precisa que la que tuvo N. Copérnico en su tiempo y establecer con esto que los planetas giran alrededor del Sol en elipses, con el Sol en uno de sus focos, y no en círculos como suponía Copérnico.

Johannes Kepler estuvó muy interesado en estudiar el movimiento de los planetas en nuestro Sistema Solar, particularmente en el estudio de la órbita de Marte. El objetivo de este escrito es mostrar como los trabajos de Kepler nos dan una excelente aproximación del movimiento de los planetas, que son las soluciones del llamado *Problema de Kepler*. Haremos especial hincapié en mostrar lo complicado que puede ser la órbita de un planeta en general vista desde la Tierra, y en particular daremos una aproximación de cómo es el movimiento de Marte si lo vemos desde la Tierra.

Entremos en detalle

Johannes Kepler nació un 27 de diciembre de 1571, acabamos de celebrar el 450 aniversario de su nacimiento, lo que originó este escrito. Tuvo una infancia muy complicada, su padre fue mercenario y desapareció a los pocos años de su nacimiento; su madre escapó por suerte de morir en la hoguera ya que fue acusada de practicar actos de brujería. Gracias a su gran voluntad por aprender Kepler pudo salir de este ambiente denso y alcanzar la inmortalidad con sus grandes descubrimientos, entre los que destacan las conocidas tres leyes de Kepler, pero sus estudios para calcular la órbita de Marte son también muy

Figura 1. El gigante Johannes Kepler.

reconocidos. No voy a entrar en detalles sobre su biografía, para los interesados recomiendo el excelente libro [1].

Como mencionamos anteriormente, la gran aportación de Kepler fue la de explicar y unificar las ideas de G. Galilei y N. Copérnico, para después basándose en las efemérides del astrónomo T. Brahe y su gran intuición concebir una primera aproximación del movimiento de los planetas en el sistema solar. En otras palabras, las tres leyes de Kepler están basadas en observaciones empíricas y algunos cálculos geométricos, resultados que eran muy avanzados para su época pero que siempre tenían un pequeño error de medición, a pesar de esto sus tres leyes explicaban mejor que cualquier otra teoría de la época el movimiento planetario. Para poder probar teoricamente sus deducciones necesitaba del cálculo diferencial y de la ley de atracción universal descubiertas por Newton varios años después.

En este artículo daremos una visión general, no cronológica, de lo que hoy conocemos como el problema de Kepler. Para esto, partiremos de las ecuaciones de Newton (1) para el caso más sencillo dado por $N = 2$, es decir con el problema de los dos cuerpos. Para simplificar la lectura de este manuscrito, vamos a suponer que $G = 1$, entonces la ecuaciones de movimiento para $N = 2$ están dadas por

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 &= \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1), \\ m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 &= \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $r_{12} = |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|$. Sumando estas ecuaciones obtenemos $m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 = 0$, integrando se tiene $m_1\dot{\mathbf{q}}_1 + m_2\dot{\mathbf{q}}_2 = l$, esta integral es conocida como la conservación del momento lineal, si integramos una vez más obtenemos $m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 = lt + k$. Lo cuál implica que el centro de masa del sistema

$$\frac{m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2}{m_1 + m_2}$$

se mueve en línea recta.

Sabiendo cómo se mueve el centro de masa podemos suponer que está fijo en el origen, es decir, vamos a suponer que $m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 = 0$. Usando este hecho, de las ecuaciones (2), tenemos que

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_1 &= \frac{m_2}{r_{12}^3}\left(-\frac{m_1\mathbf{q}_1}{m_2} - \mathbf{q}_1\right) = -\frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{q}_1) = \kappa\mathbf{q}_1, \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \frac{m_1}{r_{12}^3}\left(-\frac{m_2\mathbf{q}_2}{m_1} - \mathbf{q}_2\right) = -\frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{q}_2) = \kappa\mathbf{q}_2, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\kappa = -(m_1 + m_2)/r_{12}^3$. Observemos que los vectores de aceleración y de posición de cada partícula son proporcionales, con la misma constante de proporcionalidad.

Restando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 - \ddot{\mathbf{q}}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1).$$

Haciendo $\mathbf{r} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ y $\mu = m_1 + m_2$, obtenemos el famoso problema estudiado por Kepler, que en su honor se llama *el problema de Kepler*.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}. \tag{4}$$

Ya que la fuerza y la posición de la partícula apuntan en la misma dirección, decimos que este es un *problema de fuerza central*. Por todo lo anterior tenemos que el problema de Kepler y el problema de los dos cuerpos son equivalentes, en el sentido que una solución de (2) es también una solución de (4) y viceversa.

Para que todo esto quede más claro, supongamos que el problema de los 2 cuerpos está formado por el Sol con masa M, y un planeta de masa m. Supongamos además que el Sol está en el origen de nuestro sistema de coordenadas y el planeta está en algún punto $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (suposición original de Kepler). Nos preguntamos ¿cuál es la fuerza con la que el Sol atrae al planeta?

Primero vemos que la fuerza debe tener la misma dirección que el vector $\mathbf{r}$, pero el sentido opuesto es decir

$$F = -\lambda\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{\mathbf{3}}} \quad \text{para algún} \quad \lambda > 0. \tag{5}$$

Por la ley de atracción universal de Newton sabemos que

$$|F| = \frac{Mm}{|\mathbf{r}|^{\mathbf{2}}}, \tag{6}$$

recordemos que la constante de gravitación la hemos tomado $G = 1$. De la ecuación (5) tenemos que $|F| = \lambda$, entonces usando la ecuación (6) tenemos que

$$F = F(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\mathbf{Mm}}{|\mathbf{r}|^{2}}\right)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{7}$$

Esta fuerza produce una aceleración al planeta que de acuerdo a la segunda ley de Newton (la fuerza es igual a la masa por la aceleración) nos da

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(\mathbf{r}(t)) = -\left(\frac{Mm}{|\mathbf{r}|^{\mathbf{2}}}\right)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

simplificando obtenemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{M}{|\mathbf{r}|^{\mathbf{2}}}\right)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{8}$$

Si definimos $f(r) = -M/r^2$ donde $r = |\mathbf{r}|$ obtenemos el problema de fuerza central

$$\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{9}$$

En general la función f puede ser cualquier función continua $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, si $f > 0$ tenemos un problema de fuerza central repulsivo, y si $f < 0$ se trata de un problema de fuerza central atractivo. La gran intuición de Kepler, desarrollada sobre todo al estudiar las efemérides de T. Brahe, lo llevó a considerar al Sol situado en el origen de su sistema coordenado, y estudiar para cada planeta el respectivo problema de fuerza central. Para entender mejor la importancia que tiene fijar el centro de masa en el origen, veamos algunos sencillos ejemplos.

Ejemplo 1

Consideremos la expresión más simple del problema de Kepler

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{\mathbf{3}}}. \tag{10}$$

Se verifica facilmente que $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$ es solución, la cual recorre una circunferencia de radio 1 en el plano $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$, con velocidad angular $\omega = 1$, su período (el año de la partícula) es 2π.

Tomemos ahora una curva que se mueve sobre una circunferencia de radio k con una velocidad angular ω, esta curva viene dada por

$$\mathbf{r}_k(t) = k(\cos\omega t, \sin\omega t, 0), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

¿Para qué valor de ω la curva anterior es solución de nuestro problema de fuerza central?

Observemos que

$$\dot{\mathbf{r}}_k(t) = k\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0),$$
$$\ddot{\mathbf{r}}_k(t) = -k\omega^2(\cos\omega t, \sin\omega t, 0).$$

Es decir

$$\ddot{\mathbf{r}}_k(t) = -\omega^2\mathbf{r}_k(t).$$

Ahora como $|\mathbf{r}(t)| = k$, sustituyendo en la ecuación original obtenemos

$$-\omega^2\mathbf{r}_k(t) = -\frac{\mathbf{r}_k(t)}{k^3} \iff \omega^2 = \frac{1}{k^3},$$

es decir, la curva (11) es una solución del problema de fuerza central si y solo si $|\omega| = 1/k^{3/2}$, si $\omega > 0$ la órbita rota en sentido positivo, y si $\omega < 0$ rota en sentido negativo.

El periódo de la órbita es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{k^{3/2}}} = 2\pi k^{3/2}.$$

Esto es lo que se conoce como la tercera ley de Kepler que veremos más adelante en este manuscrito.

Ejemplo 2

Supongamos ahora que tenemos un sistema solar con dos planetas, y que estos planetas se mueven alrededor del Sol sobre las trayectorias circulares (ver Figura 2)

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \sin t, 0),$$
$$\mathbf{r}_2(t) = 2(\cos t/\sqrt{8}, \sin t/\sqrt{8}, 0).$$

Se verifica facilmente que en la segunda ecuación $\omega^2 = \frac{1}{k^3}$, por tanto $\mathbf{r}_2(t)$ efectivamente representa una solución del problema de Kepler. Supongamos que nosotros vivimos en el planeta $\mathbf{r}_1$ y que queremos estudiar como se mueve el planeta $\mathbf{r}_2$ desde nuestra posición.

Lo que nosotros observamos es el movimiento del vector de posición dado por (ver Figura 2).

$$f(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t) = (2\cos t/\sqrt{8} - \cos t, 2\sin t/\sqrt{8} - \sin t, 0).$$

Es fácil verificar que la función $f(t)$ no es periódica de ningún periódo, a este tipo de funciones le llamamos cuasi-periódicas. La Figura 3 muestra la gráfica de esta función para $t \in [0, 20\pi]$.

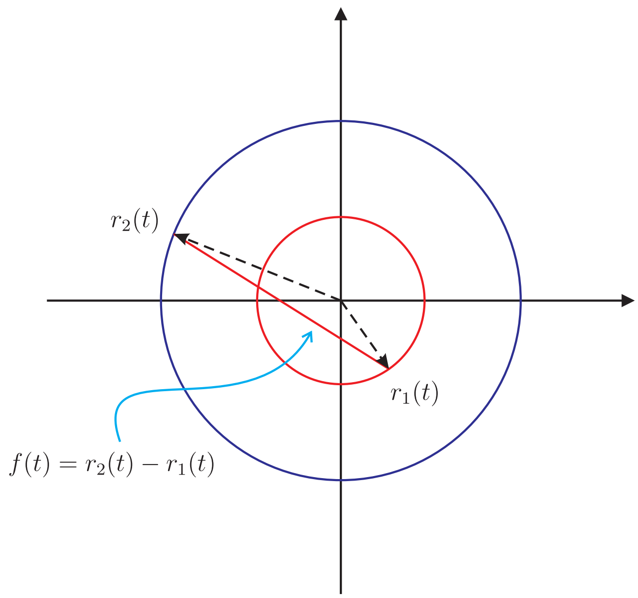

Figura 2. Sistema solar con dos planetas.

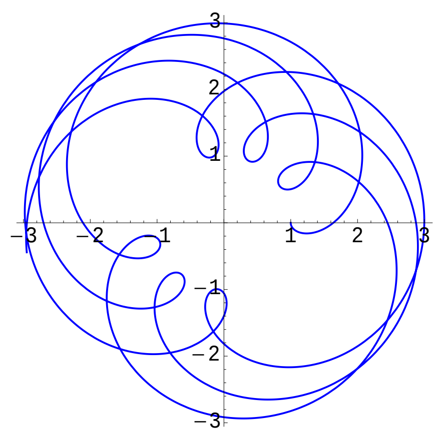

Figura 3. Órbita del planeta 2 vista desde el planeta 1.

Ejemplo 3

Kepler estudió con mucho interés particularmente la trayectoria de Marte, donde en su análisis lo considera como un problema de Kepler para el sistema Sol-Marte, al hacer esto descubre que su movimiento es casi circular, es decir Marte se mueve alrededor del Sol en una órbita con una excentricidad muy cercana a cero, si dibujamos una circunferencia y una elipse con la excentricidad de la órbita de Marte, no podríamos distinguir cuál es la circunferencia. Para estudiar la órbita de Marte desde la Tierra podemos usar los argumentos dados en el Ejemplo 2,

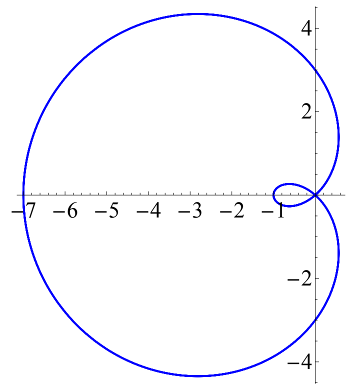

Figura 4. Órbita de Marte vista desde la Tierra.

sin embargo en este caso para motivar a nuestros lectores usaremos una demostración más elegante usando variable compleja (para más detalles ver [3]).

Consideremos una versión simplificada del sistema Sol-Tierra-Marte, donde la Tierra y Marte se mueven en órbitas circulares. Sabemos que la distancia de Marte al Sol es 1.524 veces la distancia de la Tierra al Sol y que a Marte le toma 687 días terrestres darle una vuelta al Sol. Así que para simplificar vamos a suponer que Marte está 3/2 veces más lejos del Sol que la Tierra, y que le toma dos años en darle una vuelta al Sol. Para eliminar fracciones supongamos que la distancia de la Tierra al Sol son dos unidades, entonces Marte esta a 3 unidades del Sol, por lo tanto las posiciones de la Tierra y Marte están dadas por

$$T(t) = 2e^{2\pi it} \quad \text{y} \quad M(t) = 3e^{\pi it}, \tag{12}$$

donde t se mide en años terrestres.

Por lo tanto, la posición de Marte vista desde la Tierra es

$$Z(t) = M(t) - T(t) = 3e^{\pi it} - 2e^{2\pi it}. \tag{13}$$

Haciendo una translación por dos unidades obtenemos

$$\begin{aligned} Z(t) - 2 = 3e^{\pi it} - 2e^{2\pi it} - 2 &= e^{\pi it}\left(3 - 2e^{\pi it} - 2e^{-\pi it}\right) \\ &= \left(3 - 4\cos(\pi t)\right) e^{\pi it}, \end{aligned} \tag{14}$$

una limacón en coordenadas polares (ver Figura 4). Esta trayectoria tiene dos puntos especiales a y b, si recorremos la órbita de Marte en sentido positivo a partir del punto P, cuando llegamos al punto a, nosotros desde la Tierra colocada en el punto T, vemos que el planeta se detiene y se regresa hasta el punto b, donde Marte se detiene nuevamente (va hacia la derecha hasta a y después «vemos» que regresa a b), después de esto Marte sigue un movimiento regular, hasta que vuelva a llegar al punto P. Es por este fenómeno que vemos en el cielo, que

Marte para los griegos fue conocido como el planeta que se regresa, es decir por la forma peculiar de su trayectoria vista desde la Tierra. Para los romanos Marte fue una deidad, debido a su color rojo cuando lo vemos en el cielo, fue llamado el dios de la guerra.

Es claro que si en lugar de considerar órbitas circulares para el movimiento de los planetas consideramos órbitas periódicas elípticas, nustras aproximaciones serán más cercanas a la realidad. Sin embargo para los fines de este escrito, nos parece que considerar órbitas circulares es suficiente. En realidad, no es mucho lo que ganamos al considerar las órbitas elípticas de los planetas.

Cómo se mueven los planetas

La trayectoria de cada planeta alrededor del Sol se obtiene al resolver el problema de Kepler o el problema de dos cuerpos *Sol–Planeta*, dado por la ecuación diferencial de segundo grado que introducimos en la sección anterior (ver equación (4)), donde la μ es diferente para cada uno de los planetas, para comodidad del lector la escribimos aquí nuevamente.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^{\mathbf{3}}}. \tag{15}$$

Resolver la ecuación anterior no es sencillo, de hecho uno de los grandes logros de Kepler fue percatarse que ella tiene dos primeras integrales de movimiento, es decir cantidades que se conservan a lo largo de cada trayectoria, estas son, la integral de la energía total que denotamos por h y está dada por

$$h = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{\mu}{|\mathbf{r}|}, \tag{16}$$

y la integral del momento angular que denotamos por $\mathbf{c}$, dada por

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \tag{17}$$

Observación. Notemos que en el problema de Kepler dado por la ecuación (15), si $\mathbf{r}(t)$ es solución entonces $\mathbf{r}(-t)$ tambien es solución. Esto se cumple en general para cualquier problema de fuerza central y por esta razón decimos que este problema es reversible. Esta propiedad nos permite restringir nuestro análisis sobre el comportamiento de las soluciones hacia el futuro; para estudiar resultados similares hacia el pasado (estudio del *big bang* por ejemplo) solo aplicamos la reversibilidad del flujo.

La definición de momento angular dada por la ecuación (17), nos dice que si $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, entonces los vectores $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$, son colineales, es decir la posición y la velocidad de la partícula son colineales, por tanto el movimiento es colineal. Como $\mathbf{r}(t) \neq 0$, tenemos que en este caso $\dot{\mathbf{r}}(t) = \alpha(t)\mathbf{r}(t)$ *con* $\alpha(t) > 0 \quad \forall t \in J$.

Si $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, podemos deducir facilmente que el movimiento tiene lugar sobre un plano, el plano que pasa por el origen y es ortogonal al vector $\mathbf{c}$, usualmente tomamos este plano como el plano coordenado x-y. Observemos que en cualquier caso el movimiento se da en un plano, por tanto a partir de este momento, el problema de Kepler siempre lo vamos a considerar en el plano x-y.

Existe una tercera integral de movimiento, que no es independiente de las dos anteriores, pero que nos ayuda a obtener las soluciones de (15), esta nueva cantidad conservada es conocida como vector de Runge-Lenz, vector de Laplace o vector de excentricidad, lo denotamos por $\mathbf{e}$ y está dado por:

$$\mu\left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e}\right) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}. \tag{18}$$

Usando que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{e}||\mathbf{r}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{e}$ y $\mathbf{r}$ tomados desde el origen, manipulando las cantidades conservadas (primeras integrales), obtenemos la solución al problema de Kepler, donde $r = |\mathbf{r}|$

$$r = \frac{c^2}{\mu(1 + e\cos\theta)}. \tag{19}$$

Como ya se habrán dado cuenta, la ecuación (19) representa una cónica en coordenadas polares, donde $e = |\mathbf{e}|$ es la excentricidad. La deducción completa de (19) la pueden encontrar en cualquier libro de mecánica celeste, por ejemplo en [2].

De geometría analítica, sabemos que cuando el movimiento no es rectilíneo $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, se tiene:

i) Si $e = 0$, entonces tenemos un movimiento circular, la cónica es un círculo.
ii) Si $0 < e < 1$, entonces el movimiento es sobre una elipse.
iii) Si $e = 1$, entonces la cónica es una parábola.
iv) Si $e > 1$, entonces el movimiento se da sobre la rama de la hipérbola con foco más próximo al origen.

La ecuación que liga las tres cantidades conservadas es

$$\mu^2(|\mathbf{e}|^2 - 1) = 2h|\mathbf{c}|^{\mathbf{2}}. \tag{20}$$

A partir de esta ecuación, para $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, obtenemos

I) $h < 0 \iff |\mathbf{e}| < 1$ que implica movimiento elíptico o circular.
II) $h = 0 \iff |\mathbf{e}| = 1$ que implica movimiento parabólico.
III) $h > 0 \iff |\mathbf{e}| > 1$ que implica movimiento hiperbóloico.

Ya que tenemos la solución al problema de Kepler, y la clasificación de la trayectorias de acuerdo al valor de la energía total o del módulo del vector de excentricidad, vamos a describir algunas propiedades de las trayectorias de los planetas en nuestro Sistema Solar, donde como es conocido la energía total sobre cada trayectoria es negativa. Esta información es obtenida de las así llamadas *leyes de Kepler*

Las leyes de Kepler

Basado en las observaciones minuciosas del astrónomo danes Tycho Brahe, quién durante varias décadas, noche tras noche observó y elaboró sus efemérides sobre el movimiento de los planetas en el cielo, además de que él mismo calculó en forma precisa las posiciones de estos planetas, para cuando el momento angular es distinto de cero, Johannes Kepler postuló sus famosas leyes alrededor del año 1600. Newton, años más tarde, usando su ley de la gravitación universal dio una demostración analítica mucho más elegante de estas leyes.

Empecemos enunciando las tres leyes de Kepler.

Primera ley de Kepler

Si el momento angular es distinto de cero, entonces cada planeta se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol, donde el Sol está en uno de sus focos.

Segunda ley de Kepler

El segmento de recta que une cada planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley de Kepler

Supongamos que el momento angular es positivo, entonces el periodo de rotación de un planeta alrededor del Sol es proporcional a la potencia 3/2 del eje semimayor de la órbita.

La primera ley de Kepler fue demostrada en la sección anterior, una versión sencilla de la tercera ley de Kepler fue demostrada en el **Ejemplo 1**. Vamos ahora a demostrar la segunda ley de Kepler, esta ley es equivalente al momento angular, concepto con el que ya estamos más familiarizados.

Sabemos que el momento angular definido como $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ es una cantidad conservada. Sea A el área barrida por el planeta entre un tiempo 0 y un tiempo t y sea dA el área barrida por el mismo planeta

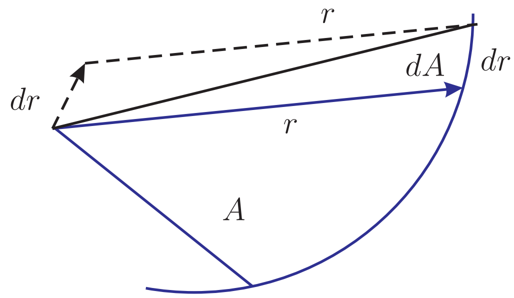

Figura 5. Área del paralelogramo.

entre el tiempo t y el tiempo $t + dt$. Sabemos que el paralelogramo acotado por los vectores $\mathbf{r}$ y por $d\mathbf{r}$ tiene área $|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$, por tanto dA tiene la mitad de esta área (ver Figura 5). De donde se obtiene

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\right| = \frac{1}{2}c.$$

Ahora como $\mathbf{c}$ es una cantidad conservada, o una función constante del tiempo, se tiene

$$A = \int_0^t \frac{dA}{ds} ds = \int_0^t \frac{1}{2}|\mathbf{c}| ds = \frac{1}{2}|\mathbf{c}| \ s \ |_0^t = \frac{1}{2}|\mathbf{c}|t.$$

En otras palabras, el área barrida por el planeta es proporcional al intervalo de tiempo; es decir el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Para reforzar lo anterior calculemos el momento angular $\mathbf{c}$ en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= r(\cos\theta, \sin\theta, 0) \times (\dot{r}(\cos\theta, \sin\theta, 0) + r\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta, 0)) \\ &= (0, 0, r^2\dot{\theta}). \end{aligned}$$

Ya que $\mathbf{c}$ es una cantidad conservada tenemos que $r^2\dot{\theta}$ es constante, recordemos que los cuerpos se mueven en un plano fijo, que sin perder generalidad supones es el plano x-y, por tanto el vector normal a este plano es $\mathbf{c}$ que tiene magnitud con signo dada por $r^2\dot{\theta}$, usualmente a esta cantidad le llamamos el momento angular.

De nuestro curso de geometría analítica sabemos que el área D barrida por un segmento de curva entre los tiempos t_1 y t_2 está dada por

$$\text{Area de } D = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r(t)^2\dot{\theta}(t) dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{c}| dt,$$

es decir la segunda ley de Kepler es equivalente al momento angular.

¿ Y si nuestro espacio no fuera euclideano?

El problema de Kepler ha generado muchísimos artículos de investigación, por ejemplo desde el punto de vista de la teoría de perturbaciones, para estudiar una órbita particular en un problema de astronomía, dinámica molecular o alguna otra rama de las ciencias. Los investigadores usualmente recurren a un problema de Kepler como una primera aproximación y a partir de ahí perturban el problema para obtener una mejor aproximación de la órbita buscada.

Otra aplicación muy interesante consiste en curvar el espacio euclideano donde nos encontramos y estudiar el problema de Kepler definido sobre un espacio de curvatura constante, pudiendo ser esta positiva o negativa. El primer paso consiste en extender la ley de atracción de Newton a estos espacios, intuitivamente notamos que si la curvatura es pequeña, estos espacios curvados deberían ser similares al espacio euclideano, y en efecto lo son, sin embargo las ecuaciones de movimiento son mucho más complicadas ya que tenemos trabajar con geometrías no euclideanas, lo cual nos lleva a resultados sorpresivos, por ejemplo, en espacios de curvatura constante el problema de Kepler es integrable mientras que el problema de dos cuerpos no lo es (para los interesados, una demostración de este hecho la pueden encontrar en [4]). Es decir, a diferencia del espacio euclideano, estos problemas no son equivalentes en el sentido que una solución del problema de Kepler no necesariamente es una solución del problema de dos cuerpos y viceversa, lo que lo convierte en un problema muy complicado, encontrar sus soluciones es un gran desafío para los investigadores en el tema. La razón de este hecho es que, para el problema de los dos cuerpos en espacios de curvatura constante, el momento lineal no es una primera integral de movimiento. Una vez más, notamos que fijar un centro del universo es un problema muy complicado. Pero esta es otra historia que les contaré en otro momento.

Bibliografía

[1] A. Koestler, *Kepler*, Barcelona, Salvat Editores, 1988.

[2] R. Ortega y J. Ureña, *Introducción a la mecánica celeste*, Editorial Universidad de Granada, 2010.

[3] D. Saari, «A visit to the newtonian n–body problem via elementary complex variables», *The American Mathematical Monthly*, vol. 97, núm. 2, 1990, 105–119, https://doi.org/10.2307/2323910.

[4] A. Shchepetilov, «Nonintegrability of the two-body problem in constant curvature spaces», *J. Phys. A*, vol. 39, núm. 20, 2006, 5787–5806, https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/20/011.