Miscelánea Matemática 26 (1997) 33–47 SMM

Monedas y Pesadas: Segunda Parte

José L. Fernández Muñiz
Posgrado en Matemáticas
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Introducción.

Es conocido el ingenioso problema de las doce monedas, el cual consiste en determinar, con el auxilio de una balanza y en sólo tres pesadas, una moneda entre doce, que pesa distinto a las demás. No sólo determinarla, sino conocer si pesa más o menos que las restantes monedas. Tengo que confesar que no conocía dicho problema cuando una alumna que cursaba conmigo la asignatura de Análisis Matemático, en la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana, me pidió que lo resolviera, tal vez con el ánimo de reciprocar los problemas que yo les planteaba como ejercicio. Le prometí pensar en la solución y ella me rogó se lo trajera resuelto para la próxima clase, a lo cual contesté afirmativamente, no sin antes mostrar cierto aire de suficiencia. Esto fue un viernes y tenía todo el fin de semana para encontrar la solución. Desde luego que pensé y analicé distintas posibilidades y caminos, pero el problema se resistía. Busqué entonces en mi biblioteca y tampoco pude encontrar en ella la respuesta.

A mi me gusta pensar, pero me sentía presionado por el tiempo y por eso buscaba la solución en alguno de mis libros. Al no encontrarla volví con calma a mis pensamientos y al fin, como suele ocurrir cuando el cerebro se ve obligado, apareció la respuesta.

Como también suele ocurrir, seguí pensando en el problema y en algunas formas de generalizarlo. Se me ocurre analizar el caso de 4.3^n monedas, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $2 + n$ pesadas y surgen paralelamente otras problemáticas.

El problema clásico de las 12 monedas no necesita herramientas matemáticas para su solución. Sólo cierta capacidad de razonamiento. En nuestras generalizaciones empleamos como única herramienta matemática el llamado *Principio de Inducción Completa o de Recurrencia.* Este principio pudiéramos decir que es simple y al mismo tiempo muy profundo. Recordaremos a los lectores una de las formas del mismo:

Principio de Inducción Completa. Si para cada número natural $n = 1, 2, 3, \ldots$, viene dada una función proposicional $P(n)$, para las cuales se cumple que $P(1)$ es verdadera y si suponiendo que $P(n)$ es verdadera podemos deducir que también $P(n+1)$ es verdadera, entonces para todo número natural n la proposición $P(n)$ es verdadera.

En este principio no es esencial el primer valor en el cual comenzamos a comprobar la validez de nuestra proposición. Basta hacerlo para un primer elemento n_0, y después suponiendo que sea cierta para $n \geq n_0$, comprobar que también es cierta para $n+1$. También podemos considerar que los números naturales comienzan con el cero.

Este problema puede haber sido resuelto por distintas vías, incluyendo la que a mi me costó tanto esfuerzo y también publicadas. Incluso pudiera ser posible que también las generalizaciones. Por esa razón, al presentar las soluciones y generalizaciones en la publicación mencionada aclaré que de ninguna manera las consideraba originales en el sentido en que esa palabra se emplea en la literatura científica y sólo aspiraba a contribuir a la divulgación de este interesante problema.

El primer trabajo publicado contenía doce lemas y cuatro teoremas. Posteriormente trabajé en otras generalizaciones, las cuales quiero presentar a los lectores, con el mismo objetivo que las anteriores.

I Resultados anteriores.

En esta sección recordamos los resultados presentados en la anterior publicación. Los incluyo con sus demostraciones, para no remitir a los lectores a la publicación anterior.

Lema I.1 *Si en 3^n monedas $n = 1, 2, \ldots$ sabemos que hay una que pesa más (o menos) que las otras, entonces podemos localizar dicha moneda en n pesadas.*

Demostración: Supongamos que es más pesada. Emplearemos el Principio de Inducción. Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que es cierto para n. Para 3^{n+1} monedas formamos tres grupos de 3^n monedas y con una sola pesada localizamos en que grupo está. Aplicamos entonces lo supuesto en la inducción. ■

Lema I.2 *Si en* 2.3^n *monedas* $n = 1, 2.3, \ldots$, *hay una que pesa más (o menos) esta puede localizarse en* $(n + 1)$ *pesadas.*

Demostración: Dividimos el grupo en dos de 3^n monedas. Con una pesada localizamos en cual está y aplicamos el Lema I.1. ■

Lema I.3 *Si en* 2.3^n *monedas hay una que pesa distinto a las demás y el grupo puede separarse en dos partes de* 3^n *monedas y sabemos que si está en uno de esos grupos pesa más y si está en el otro pesa menos, entonces con* $(n+1)$ *pesadas puede localizarse y determinar si pesa más o pesa menos que las restantes monedas.*

Demostración: Por inducción: Para $n = 1$, colocamos en un platillo de la balanza una moneda que puede pesar menos y una moneda que puede pesar más y en el otro platillo colocamos dos monedas entre las cuales puede estar una que pesa más. Si la balanza queda en equilibrio, la moneda distinta pesa menos y está entre las dos monedas que quedaron fuera de la balanza. Con una pesada más se localiza. Si la balanza se inclina hacia donde están las dos monedas, entre las cuales puede haber una más pesada, entonces si es más pesada es una de ellas y si es más liviana es la única posible del otro platillo. Colocamos en la balanza las dos monedas entre las cuales puede haber una más pesada y si queda en equilibrio la moneda distinta es la más liviana del otro platillo, si se inclina sabemos de inmediato cual es la moneda y además que es más pesada. Si la balanza se hubiera inclinado hacia donde están las dos monedas con una posible más liviana y la otra más pesada, la posible más pesada es la distinta.

Supongamos el resultado cierto para n. Coloquemos en un platillo 3^n monedas entre las cuales puede haber una menos pesada junto a 3^n monedas donde puede haber una más pesada. En el otro platillo de la balanza colocamos 2.3^n monedas entre las cuales puede haber una más pesada. Si la balanza queda en equilibrio, la monedas distinta es más liviana y está entre las 2.3^n monedas que quedaron fuera de la balanza.

Por el Lema I.2 la localizamos en $(n + 1)$ pesadas. Si la balanza se inclina hacia el platillo donde están las 2.3^n monedas con una posible más pesada, entonces dividimos este grupo en dos de 3^n monedas y colocamos cada uno de ellos en los platillos de la balanza. Si queda en equilibrio la moneda es más liviana y se encuentra en un grupo de 3^n monedas del otro platillo y la localizamos según el Lema I.1 con n pesadas. Si la balanza se inclina sabemos en que grupo está y que es más pesada. Aplicamos también el Lema I.1 y la localizamos en n pesadas. Finalmente, si en la primera pesada, la balanza se hubiese inclinado hacia donde estaban los dos grupos de 3^n monedas con una posible más liviana en uno de ellos y una posible más pesada en el otro, la moneda se encuentra en este último y por lo supuesto en la inducción para n, se localiza con $(n + 1)$ pesadas. ∎

Lema I.4 *Si en cuatro monedas hay una que pesa distinto de las demás, entonces con dos pesadas puede localizarse. Pudiera suceder que no sepamos si pesa más o menos que las otras.*

Demostración: Ponemos una monedas en cada platillo de la balanza. Si la balanza se inclina es que una moneda pesa más o menos que la otra, con otra pesada comparamos una de esas monedas con una de peso normal y determinamos cual pesa distinto y si pesa más o menos. Si la balanza queda en equilibrio, la moneda de peso distinto está entre las dos que no estaban en la balanza. Tomamos una de ellas y la comparamos con una de peso normal. Si la balanza se inclina determinamos cual es la moneda distinta y si pesa más o menos. Si queda en equilibrio la moneda distinta es la que no pusimos en la balanza, pero en ese caso no sabemos si pesa más o menos. ∎

Lema I.5 *Con las hipótesis del Lema I.4, si además disponemos de una quinta moneda que sabemos tiene un peso normal, entonces en dos pesadas la podemos localizar y conocer si pesa más o menos que las otras.*

Demostración: Denotemos con los números $1, 2, 3$ y 4, a las cuatro monedas y con el 5 a la quinta moneda de peso normal. Hagamos una primera pesada colocando en un platillo las monedas 1 y 2, y en el otro platillo las monedas 3 y 5. Si la balanza queda en equilibrio, la moneda 4 pesa distinto y con otra pesada comparándola con una moneda normal determinamos si pesa más o menos. Si la balanza se inclina hacia el lado donde están las monedas 1 y 2, hacemos una nueva pesada colocando en un platillo la moneda 1 y en el otro la moneda 2. Si la balanza queda en equilibrio, la moneda 3 es la distinta y es más liviana, si se inclina determinamos la que pesa más. La otra posibilidad es que la balanza se hubiera inclinado hacia donde están las monedas 3 y 5. En este caso procedemos de forma análoga comparando las monedas 1 y 2. ∎

Lema I.6 *Si en un grupo de* 12 *monedas hay una que pesa distinto a las demás, entonces con tres pesadas puede localizarse y además se puede determinar si pesa más o menos que las restantes.*

Demostración: Separamos las doce monedas en tres grupos de cuatro cada uno. Colocamos dos de ellas en la balanza. Si queda en equilibrio, la bola distinta está en el otro grupo de cuatro monedas y por el Lema I.5 se localiza en dos pesadas determinando si pesa más o menos que las otras. Si se inclina la balanza sabemos que si está en un grupo es más liviana y si está en el otro es más pesada.

Hacemos una segunda pesada colocando en un platillo una moneda que puede ser más pesada junto a tres monedas entre las cuales puede haber una más liviana y en el otro platillo una moneda que puede ser más liviana junto a tres monedas de peso normal. Si la balanza se inclina hacia el primer platillo es porque o una moneda es más pesada con una sola posible o una moneda es más liviana con una sola posible.

Comparando una de ellas con una de peso normal determinamos cual es y si pesa más o menos.

Si la balanza se hubiera inclinado hacia el segundo platillo es porque la bola es más liviana y está en un grupo de tres. Aplicando el Lema I.1 se determina con una pesada más.

Si la balanza hubiera quedado en equilibrio, es porque la moneda distinta está en un grupo de tres que no está en la balanza y es más pesada. De nuevo aplicamos el Lema I.1 y se localiza con otra pesada. ∎

Teorema I.7 *Si tenemos* 4.3^n *monedas* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *y una de ellas pesa distinto a las demás, entonces podemos localizarla con* $2 + n$ *pesadas. Para* $n = 1, 2, \ldots$ *podemos determinar también si pesa más o menos que las restantes.*

Demostración: Para $n = 0$, la respuesta la da el Lema I.4, con el cual se localiza la moneda en dos pesadas, aunque puede ocurrir que no podamos determinar si pesa más o menos. Para $n = 1$, con el Lema I.6, se localiza la moneda en tres pesadas y tambien se determina si pesa más o menos.

Completemos la demostración por inducción. Para ello supongamos que es cierto para n monedas y comprobemos que es cierto para $n+1$ monedas. Separamos el grupo de 4.3^{n+1} monedas en tres de 4.3^n monedas. Colocamos dos de ellos en la balanza. Si queda en equilibrio, entonces la moneda de peso distinto está en el otro grupo de 4.3^n monedas y por lo supuesto en la inducción se localiza en $(n+2)$ pesadas más y se determina si pesa más o menos.

Si la balanza se inclina colocamos en un platillo 3^{n+1} monedas de peso normal junto a 3^n monedas entre las cuales puede haber una más pesada y en el otro platillo 3^{n+1} monedas entre las cuales puede haber una más pesada junto con 3^n entre las cuales puede haber una más liviana. Fuera de la balanza queda un grupo de 3^n monedas de peso normal junto a otro de 3^{n+1} entre las cuales puede haber una más liviana. Si la balanza queda en equilibrio, hay una que pesa menos y está en el grupo de 3^{n+1} que quedó fuera de la balanza, y por el Lema I.1 se localiza con $(n+1)$ pesadas más.

Si la balanza se inclina hacia donde están las 3^{n+1} monedas, con una posible más pesada entre ellas, la distinta está en ese grupo y se localiza aplicando de nuevo el Lema I.1, en $(n+1)$ pesadas más.

Si la balanza se inclina hacia el platillo donde está el grupo de 3^n monedas, entre las cuales puede haber una más pesada, entonces tenemos dos grupos de 3^n monedas y sabemos que si está en uno de ellos es más pesada y si está en el otro es más liviana. Aplicamos ahora el Lema I.3 y en $(n+1)$ pesadas más se localiza y se determina si pesa más o menos.

Si sólo nos interesa localizar la moneda que pesa distinto, podemos añadir una moneda a las doce, de acuerdo al siguiente lema. ∎

Lema I.8 *Si tenemos cinco monedas, entre las cuales hay una que pesa distinto que las demás y contamos con una moneda adicional de peso normal, entonces se puede localizar la moneda que pesa distinto con dos pesadas.*

Demostración: Denotemos las cinco monedas con los números $1, 2, 3, 4$ y 5 y la moneda adicional de peso normal por 6. Pongamos en un platillo de la balanza las monedas 1 y 2. En el otro platillo las monedas 3 y 6. Si queda en equilibrio, la moneda de peso distinto está entre las 4 y 5. Comparamos una de ellas con otra de peso normal y la localizamos. Si la balanza se inclina hacia donde están las monedas 3 y 6, entonces comparamos las monedas 1 y 2. Si son iguales la distinta es la 3 y pesa más. Si se inclina, determinamos la distinta que tiene que ser más liviana. Si la balanza se hubiese inclinado hacia las monedas 1 y 2, comparándolas, podemos determinar en otra pesada si está entre ellas la distinta que sería más pesada o es la del otro platillo que sería más liviana, procediendo en forma análoga al paso anterior. ■

Lema I.9 *Si tenemos trece monedas, entre las cuales hay una que pesa distinto a las restantes, entonces esta se puede localizar en tres pesadas.*

Demostración: Dividimos el grupo en tres, dos de cuatro monedas y uno de cinco. Colocamos en la balanza los dos grupos de cuatro monedas. Si queda en equilibrio, aplicamos el Lema I.8. Si se inclina la balanza continuamos como en el Lema I.6. ■

Lema I.10 *Si tenemos trece monedas y una de ellas tiene un peso distinto a las restantes y disponemos de una monedas adicional de peso normal, la moneda que pesa distinto puede localizarse en tres pesadas y se puede determinar si pesa más o menos.*

Demostración: Colocamos en un platillo cinco monedas, en el otro cuatro junto a la moneda de peso normal. Si queda en equilibrio, está en el grupo de cuatro fuera de la balanza. Con el Lema I.5 se localiza en dos pesadas y se sabe si pesa más o menos.

Si la balanza se inclina, realizamos una nueva pesada. En un platillo colocamos tres monedas entre las cuales puede haber una que pesa menos junto a dos monedas entre las cuales puede haber una que pesa más. En el otro platillo colocamos una moneda que puede pesar menos junto a cuatro de peso normal. Si la balanza queda en equilibrio, la bola distinta está entre las tres que quedaron fuera de la balanza: una que puede ser menos pesada y dos entre las cuales puede haber una más pesada. Colocamos estas últimas en la balanza, si queda en equilibrio es la otra moneda y pesa menos, si se inclina localizamos de inmediato la distinta y pesa más. Si en el segundo paso la balanza se hubiese inclinado hacia el platillo donde está una única moneda que puede pesar menos, entonces la distinta está en el otro platillo en un grupo de tres y pesa menos. Se localiza con otra pesada.

Si en el segundo paso se hubiese inclinado hacia el platillo donde están las dos monedas entre las cuales puede haber una que pesa más, entonces está entre esas monedas o es la única del otro platillo que puede pesar menos. Comparamos las dos monedas entre las cuales puede haber una más pesada. Si la balanza se inclina se localiza la más pesada. Si queda en equilibrio es la otra moneda y es más liviana. ∎

Lema I.11 *En dos grupos de* 4.3^{n-1} *monedas* $n = 1, 2, \ldots$, *sabemos que hay una moneda que pesa distinto a las restantes y si está en uno de ellos es más pesada y si está en el otro es más liviana. Si además contamos con* 3^n *monedas adicionales de peso normal, entonces con* $(n+1)$ *pesadas puede localizarse y determinar si pesa más o menos que las restantes.*

Demostración: Por inducción. Para $n = 1$: Colocamos en un platillo 3 monedas entre las cuales puede haber una que pesa menos junto con otra moneda que puede pesar más. En el otro platillo colocamos una moneda que puede pesar menos junto a otras tres de peso normal. Fuera quedan tres monedas entre las cuales puede haber una que pesa más. Tenemos tres posibilidades:

i) La balanza queda en equilibrio. La moneda distinta está en el grupo de tres fuera de la balanza y pesa más. Por el Lema I.1 se localiza con otra pesada.

ii) La balanza se inclina hacia donde están las tres monedas de peso normal. La moneda distinta está en un grupo de tres del otro platillo y pesa menos. Aplicamos el Lema I.1.

iii) La balanza se inclina hacia donde está la moneda que puede pesar más. La moneda distinta está entre dos, una que puede ser más pesada y otra que puede ser mas liviana. Comparando una de ellas con otra de peso normal se localiza.

Supongamos que sea cierto para n. Entonces para $(n+1)$, tenemos dos grupos de 4.3^n monedas. Realizamos una primera pesada de la siguiente forma: Colocamos en un platillo 3^{n+1} monedas entre las cuales puede haber una que pesa menos, junto a 3^n monedas entre las cuales puede haber una más pesada. En el otro platillo colocamos 3^n monedas entre las cuales puede haber una que pesa menos junto a 3^{n+1} monedas de peso normal. Fuera de la balanza quedan 3^{n+1} monedas entre las cuales puede haber una más pesada. Tenemos tres posibilidades:

i) La balanza queda en equilibrio. Entonces la moneda está en el grupo de 3^{n+1} monedas fuera de la balanza y pesa más. Aplicando el Lema I.1 se localiza en $(n+1)$ pesadas más.

ii) La balanza se inclina hacia donde están las 3^{n+1} monedas de peso normal. Entonces la moneda se encuentra en un grupo de 3^{n+1} monedas del otro platillo y pesa menos. Por el Lema I.1 se localiza en $(n+1)$ pesadas más.

iii) La balanza se inclina hacia donde están las 3^n monedas entre las cuales puede haber una más pesada. Entonces o está en ese grupo y es más pesada o está en el grupo de 3^n monedas del otro platillo y es más liviana. Aplicando el Lema I.3 se localiza en $(n+1)$ pesadas más.

■

Lema I.12 *Si tenemos* 39 *monedas y una pesa distinto a las otras, entonces con 4 pesadas puede localizarse y determinar si pesa más o menos.*

Demostración: Dividimos el grupo en tres de 13 monedas cada uno. Ponemos dos de ellos en la balanza. Si queda en equilibrio, aplicando el Lema I.10 se localiza en tres pesadas más y se determina si pesa más o menos. Si se inclina hacemos una nueva pesada, colocando en un platillo 9 monedas entre las cuales puede haber una que pesa menos, junto a 4 monedas, entre las cuales puede haber una que pesa más. En el otro platillo colocamos 4 monedas entre las cuales puede haber una más liviana, junto a 9 monedas de peso normal. Si queda en equilibrio, la moneda pesa más y está en un grupo de 9 fuera de la balanza. Por el Lema I.1 se localiza en dos pesadas más. Si se inclina hacia donde están las 9 monedas de peso normal, la distinta se encuentra en un grupo de

9 del otro platillo y pesa menos. De nuevo con el Lema I.1 se localiza en dos pesadas más. Si se inclina hacia donde están las cuatro entre las cuales puede haber una más pesada, con el Lema I.1 se localiza en dos pesadas más y se determina si pesa más o menos. ∎

Teorema I.13 *Si tenemos* 13.3^{n-1} *monedas* $n = 1, 2, \ldots$ *y hay una que pesa distinto a las otras, esta puede localizarse en* $(n+2)$ *pesadas. Además para* $n \geq 2$*, se puede determinar si pesa más o menos.*

Demostración: Por inducción. Para $n = 1$ tenemos el Lema I.9. Para $n = 2$ es el Lema I.12. Supongamos que sea cierto para $n \geq 2$. Comprobemos que es cierto para $n+1$. Con las 13.3^n monedas, formamos tres grupos de 13.3^{n-1} monedas. Colocamos dos de ellos en la balanza. Si queda en equilibrio está en el grupo fuera de la balanza y por lo supuesto en la inducción se localiza en $(n+2)$ pesadas adicionales y se determina si pesa más o menos.

Si se inclina, realizamos una nueva pesada. En un platillo colocamos 4.3^{n-1} monedas entre las cuales puede haber una menos pesada, junto a 3^{n+1} monedas de peso normal. En el otro platillo colocamos 4.3^{n-1} monedas entre las cuales puede haber una más pesada, junto a 3^{n+1} monedas entre las cuales puede haber una más liviana. Fuera de la balanza queda un grupo de 3^{n+1} monedas entre las cuales puede haber una más pesada. Tenemos tres posibilidades:

- **i)** La balanza queda en equilibrio. Entonces la moneda se encuentra en un grupo de 3^{n+1} monedas y sabemos que es más pesada. Aplicando el Lema I.1 se localiza en $n+1$ pesadas más.

- **ii)** La balanza se inclina hacia donde están las monedas de peso normal. Entonces la de peso distinto se encuentra en el grupo de 3^{n+1} del otro platillo y es más liviana. Aplicando de nuevo el Lema I.1 se localiza en $(n+1)$ pesadas adicionales.

- **iii)** La balanza se inclina hacia donde están las 4.3^{n-1} monedas entre las cuales puede haber una más pesada. Entonces tenemos la alternativa de que está en ese grupo y es más pesada o está en el grupo de 4.3^{n-1} monedas del otro platillo y es más liviana. Aplicando el Lema I.11 se localiza con $(n+1)$ pesadas más.

∎

Disponiendo de monedas adicionales de peso normal pueden mejorarse los resultados.

Teorema I.14 *Si tenemos* $\frac{3^{n+2}-1}{2}$ *monedas* $n = 1, 2, \ldots$ *con una de ellas que pesa distinto a las demás y disponemos de* 3^{n-1} *monedas adicionales de peso normal, entonces la moneda de peso distinto se puede localizar en* $n+2$ *pesadas y determinar si pesa más o menos.*

Demostración: Por inducción. Para $n = 1$ se tiene el Lema I.10. Supongamos que sea cierto para n. Para $\frac{3^{n+3}-1}{2}$ monedas, dividimos el grupo en tres, de 5.3^n, 4.3^n y $\frac{3^{n+2}-1}{2}$ monedas. Añadimos al segundo grupo las 3^n monedas de peso normal. Colocamos en un platillo de la balanza el grupo de 5.3^n monedas, en el otro platillo las 4.3^n monedas más las 3^n de peso normal. Si queda en equilibrio, la moneda de peso distinto está entre las $\frac{3^{n+2}-1}{2}$ que no están en la balanza. Por lo supuesto en la inducción se localiza en $(n+2)$ pesadas adicionales. Quedan dos posibilidades:

i) La balanza se inclina hacia donde están las monedas de peso normal. Realizamos una nueva pesada, colocando en un platillo 3^{n+1} monedas entre las cuales puede haber una más liviana, junto a 2.3^n monedas entre las cuales puede haber una más pesada, en el otro platillo colocamos 3^n monedas entre las cuales puede haber una más liviana, junto a 4.3^n monedas de peso normal. Fuera de la balanza queda un grupo de 3^n monedas entre las cuales puede haber una más liviana junto a 2.3^n monedas entre las cuales puede haber una más pesada.

Si la balanza queda en equilibrio, la moneda distinta se encuentra entre las que quedaron fuera de la balanza. Colocamos en cada platillo las 3^n monedas entre las cuales puede haber una más pesada. de esa forma determinamos en que grupo está y si es más o menos pesada. Por el Lema I.1 se localiza en n pesadas más.

Si la balanza se inclina hacia donde están las 3^n monedas, entre las cuales puede haber una más liviana, la moneda distinta está entre las 3^{n+1} del otro platillo y es más liviana. Aplicando de nuevo el Lema I.1 se localiza en $n+1$ pesadas más.

Si la balanza se inclina hacia donde están las 2.3^n monedas, entre las cuales puede haber una más pesada, tenemos la alternativa de que está en ese grupo y es más pesada o está en el grupo de 3^n monedas del otro platillo y es más liviana. Colocando en cada platillo 3^n monedas entre las cuales puede haber una más pesada, determinamos en cual grupo está y si pesa más o menos. De nuevo con el Lema I.1 se localiza con n pesadas adicionales.

ii) La balanza se inclina hacia el platillo donde no están las monedas de peso normal. Entonces procedemos en forma análoga al paso i) intercambiando los grupos de monedas que pesan más por los que pesan menos.

Todavía podemos aumentar más la cantidad de monedas, aunque no siempre podamos determinar si pesa más o menos. ■

Lema I.15 *Si tenemos* 14 *monedas, entre las cuales se encuentra una que pesa distinto a las demás y disponemos de una moneda adicional de peso normal, esta se puede localizar en tres pesadas.*

Demostración: Colocamos en un platillo de la balanza cinco monedas y en el otro cuatro, más la de peso normal. Si queda en equilibrio se localiza en dos pesadas, aplicando el Lema I.8, entre las cinco monedas que quedaron fuera de la balanza. Si la balanza se inclina continuamos como en el Lema I.10. ■

Finalmente se plantea el siguiente teorema, dejando su demostración al lector y la cual puede basarse en el Teorema I.14 y el Lema I.15.

Teorema I.16 *Si tenemos* $\dfrac{3^{n+2}+1}{2}$ *monedas* $n = 1, 2, \ldots$ *entre las cuales se encuentra una de peso distinto a las demás y disponemos de* 3^{n-1} *monedas adicionales de peso normal, entonces la moneda distinta puede localizarse en* $(n+2)$ *pesadas.*

II Nuevos resultados.

Continuando en el mismo estilo anterior plantearemos un lema previo y después el resultado fundamental.

Lema II.17 *En dos grupos de* $\left(\frac{3^{j+1}-1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$ *monedas* j=1, 2, ..., $n = 1, 2, \ldots$ *hay una de ellas que tiene un peso distinto a las restantes y sabemos que si está en uno de ellos pesa más y si está en el otro pesa menos. Si contamos también con* 3^{j+n-1} *monedas adicionales de peso normal, entonces la moneda que pesa distinto puede localizarse en* $(n+j)$ *pesadas determinando si pesa más o menos que las otras.*

Demostración: Por inducción en $(n+j)$: El caso $n+j=2$ está probado en el Lema I.11. Supongamos que el resultado es cierto para $n+j$. Entonces para $n+j+1$ tenemos dos casos al incrementar la n o la j.

a) Para $j+1$ tenemos que

$$\left(\frac{3^{j+2}-1}{2}\right)\cdot 3^{n-1} = 3^{j+n} + \left(\frac{3^{j+1}-1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$$

Con estas monedas podemos formar los siguientes conjuntos disjuntos:

C_1 formado por 3^{j+n} monedas entre las cuales puede haber una que pesa más que las otras más $\left(\frac{3^{j+1}-1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$ monedas entre las cuales puede haber una de menor peso que las restantes.

C_2 formado por 3^{j+n} de peso normal más $\left(\frac{3^{j+1}-1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$ entre las cuales puede haber una de mayor peso que las restantes.

C_3 formado por 3^{j+n} entre las cuales puede haber una de menor peso que las otras.

Pongamos el conjunto C_1 en uno de los platillos de la balanza y el C_2 en el otro platillo. Analicemos las tres posibilidades:

i) Si la balanza permanece en equilibrio, la moneda de peso distinto se encuentra en C_3 y pesa menos que las restantes y por el Lema I.1 se localiza en $n+j$ pesadas.

ii) Si la balanza desciende con el conjunto C_2, entonces la moneda está en un conjunto de 3^{j+n} monedas y pesa más que las restantes y se aplica también el Lema I.1 para localizarla en $j+n$ pesadas.

iii) Si la balanza desciende con el conjunto C_2, podemos aplicar lo supuesto en la inducción.

b) Para el caso $n+1$ separamos los dos conjuntos de $\left(\frac{3^{j+1}-1}{2}\right)\cdot 3^n$ monedas en tres conjuntos disjuntos A_1, A_2 y A_3 de $\frac{3^{j+1}-1}{2}\cdot 3^{n-1}$ monedas, entre los cuales puede haber una de mayor peso que las restantes y los B_1, B_2 y B_3 de $\left(\frac{3^{j+1}-1}{2}\right)\cdots 3^{n-1}$ monedas, entre los cuales puede haber una de menor peso que las restantes. Con esos conjuntos formamos las tres parejas:

$$A_1+B_1; \qquad A_2+B_3; \qquad A_3+B_2\,.$$

Colocamos en los platillos de la balanza los conjuntos A_2+B_3 y A_3+B_2, respectivamente. Tenemos entonces que

i) Si la balanza permanece en equilibrio, entonces la monedas de peso distinto se encuentra en el conjunto A_1+B_1 y podemos aplicar lo supuesto en la inducción.

ii) Si la balanza se inclina determinamos en cual de los conjuntos A_2+B_2 o A_3+B_3 se encuentra la moneda de peso distinto y aplicamos también lo supuesto en la inducción.

■

El resultado fundamental es el siguiente:

Teorema II.18 *Si en un conjunto de* $\left(\frac{3^{j+1}-1}{2}\right)\cdot 3^n$ *monedas,* $j=1,2,\ldots$, $n=1,2,\ldots$, *se encuentra una que tiene un peso distinto a las restantes, entonces la moneda de peso distinto puede localizarse en* $n+j+1$ *pesadas y se puede determinar si pesa más o menos que las otras monedas.*

Demostración: Por inducción en $n+j$. Para $n+j=2$ el resultado viene dado en el Lema I.6, y es el problema clásico de las 12 monedas.

Supongamos que es cierto para $n+j$ y demostremos que entonces también es cierto para $n+j+1$.

Si incrementamos primero la n tendremos $\left(\frac{3^{j+1}-1}{2}\right)\cdot 3^{n+1}$ monedas y colocamos dos de ellos en la balanza. Si permanece en equilibrio, la moneda se encuentra en el tercer conjunto y podemos aplicar lo supuesto en la inducción. En caso contrario aplicamos el Lema II.17.

Por otra parte si incrementamos j separamos el conjunto de $\left(\frac{3^{j+2}-1}{2}\right)\cdot 3^{n}$ monedas en tres conjuntos disjuntos de $\left(\frac{3^{j+2}-1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$ y procedemos como en el caso anterior para $n \geq 2$.

Para $n = l$, ponemos en la balanza a dos de los conjuntos. Si la balanza queda en equilibrio la moneda distinta está en el otro conjunto y podemos aplicar el Teorema I.14. En caso contrario podemos aplicar el Lema 13. ∎

Con ganas de pensar podemos plantearnos nuevos problemas. Por ejemplo analizar si la cantidad de pesadas es mínima. También podemos añadir monedas de peso distinto, primero dos y después en general: Por ejemplo si m y n son números naturales con $n < m$ y tenemos m monedas entre las cuales hay $m - n$ con el mismo peso y n con peso distinto, analizar la cantidad de pesadas necesarias para localizar las n distintas.

Referencias

[1] Fernández Muñiz, José L., *Bolas y Pesadas.* Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. **14**, 1992, 39–50.